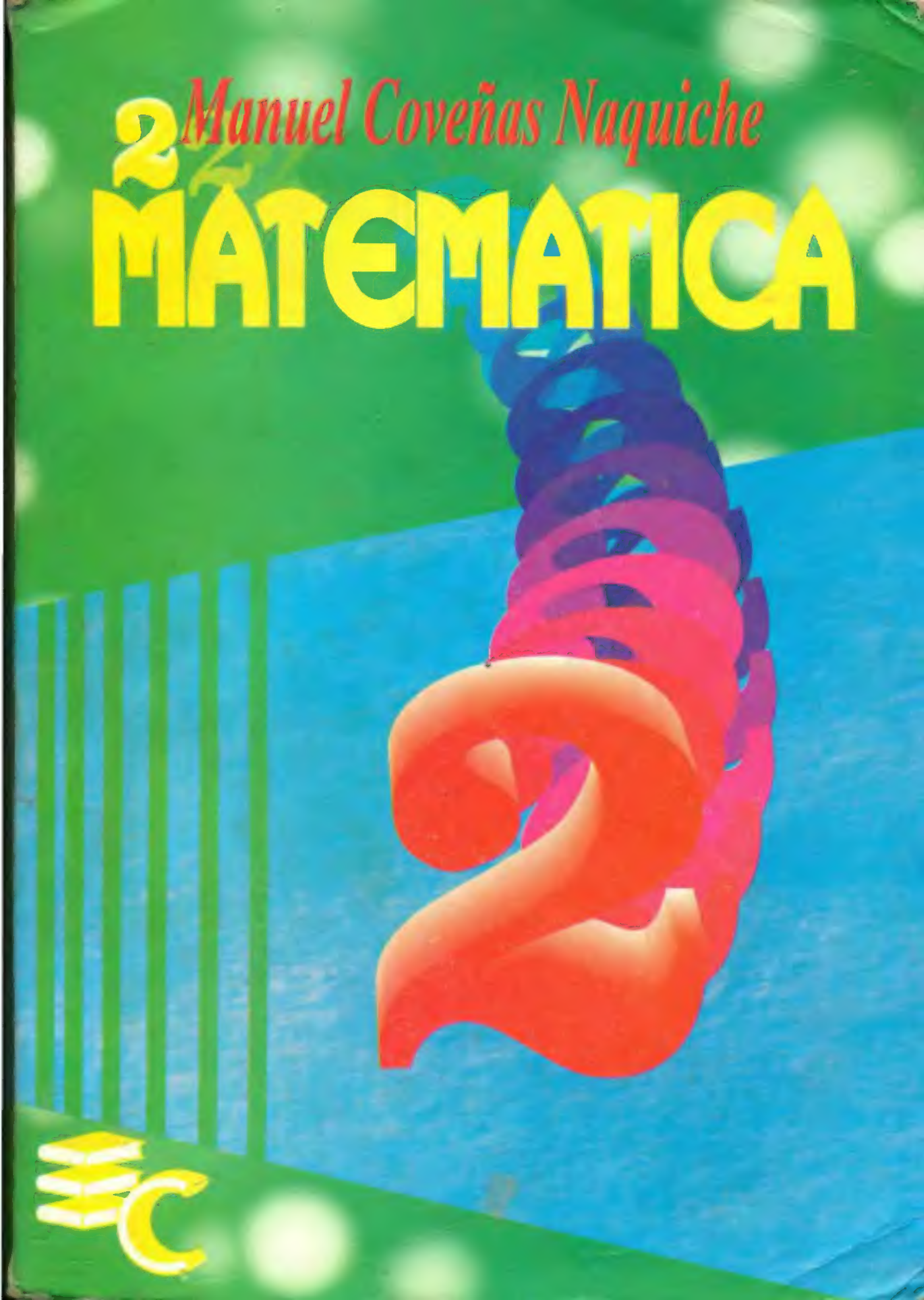
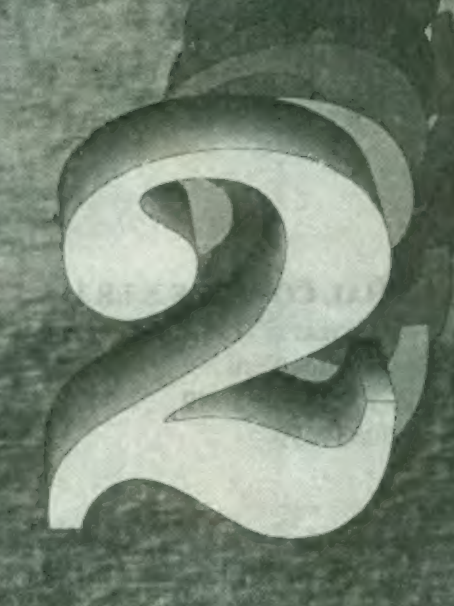

Manuel Coveñas Naquiche
2
MATEMATICA
2

MATEMÁTICA 2

EDICIÓN 1 997

Manuel Coveñas Naquiche

MATEMATICA





MATEMÁTICA

IMPRESO EN EL PERU **PRINTED IN PERU**

Jr. Las Verdolagas N° 199 Urb. "Micaela Bastidas"
Los Olivos - Lima/Perú
Telfs. 486-7957 • 521-0949
RUC. N° 29534659

Diagramación, Composición y Montaje
"EDITORIAL COVEÑAS E.I.R.Ltda"

Presentación

"Caminante no hay camino,
se hace camino al andar"

Estas coplas, en las que el vate Antonio Machado expresa poéticamente una gran verdad de la sabiduría popular, cobran plena vigencia en la actividad de profesional de **Manuel COVEÑAS NAQUICHE**, *con justicia* ***"el Isaac Asimov de las matemáticas peruanas"*** *por su prolífica producción bibliográfica -en el área didáctica- en esta no fácil ciencia formal.*

En efecto, Manolo, como le gusta que le digan sus amigos, se abrió camino como un extraordinario docente, por sus virtudes didácticas, ¡innatas en él!, y por su sencillez; ahora, sigue caminando, haciendo camino, en el difícil arte de crear libros... ¡no se duerme en sus laureles!, por eso, sigue mejorando sus textos escolares, gracias a su experiencia pedagógica y a los consejos de uno de los elementos fundamentales del proceso enseñanza-aprendizaje: ***¡EL MAESTRO DE AULA!****, con quien está en permanente contacto.*

Con ocasión de esta segunda edición -ampliada y corregida de sus textos de ***MATEMÁTICAS****, para cada uno de los grados de Educación Secundaria, nos presenta una nueva estructura de los mismos:*

- ☞ ***Una exposición teórica sencilla****, accesible al alumno, de cada uno de los temas tratados, que se ve clarificada con...*
- ☞ ***Ejemplos resueltos*** *en orden de dificultad progresiva y con...*
- ☞ ***Talleres*** *para cada capítulo, a desarrollarse en clase, ¡mejor si es a nivel grupal!, motivando así la participación activa de los educandos.*

No contento con esto, añade:

- ☞ ***Ejercicios de reforzamiento*** *en dos niveles, según el grado de dificultad y,*
- ☞ ***Propuesta de Olimpíadas Matemáticas,*** *con su respectivo desarrollo, que globalizan los conocimientos impartidos en cada unidad temática.*

Como pueden apreciar amigos/as lectores/as, estos textos se convierten en un material de invalorable valor pedagógico, porque, facilitan el proceso de la enseñanza-aprendizaje de las ***Matemáticas****, saber que permite optimizar la capacidad lógico-deductiva del ser humano.*

Prof. Lucio R. Blanco A.

INDICE



RELACIONES BINARIAS

1.1 Par Ordenado

En el lenguaje usual **un par** significa lo mismo que un **conjunto de dos elementos**. Si los elementos son **a** y **b**, el conjunto de los dos puede indicar de cualquiera de las dos maneras equivalentes:

$$\{a;\ b\} = \{b;\ a\}$$

Porque el orden de los elementos **es indiferente**. no ocurre asi con el concepto de **par ordenado**.

Ejemplo: Manuel recibe una entrada de cine, en ella se lee: fila: 5; asiento: 12; para encontrarse con su enamorada Sara, Manuel le dicta por teléfono los números de su localidad (entrada). Apresuradamente Sara anota en su agenda 5; 12. Al llegar muy tarde al cine, Sara olvida el detalle del orden y busca a su adorado Manuel en el asiento de la fila 12; 5. No lo encontro naturalmente hasta que prendieron la luz. Ni Sara ni Manuel olvidaron ya nunca que los números de la entrada estan en el orden (fila, asiento) y que, por consiguiente, (5; 12) es distinto de (12; 5).

Entrada	*Cine Municipal*	
	Función Noche	
	Fila: 5	*Asiento: 12*

Definición General:

Un par ordenado de elementos es un conjunto de dos elementos **a** *y* **b**, *el par ordenado se escribe:* ***(a; b).***

Donde:

"a" es el primer elemento, **llamado** también **primera componente, y**
"b" segundo elemento o **segunda componente** del par, por lo tanto ahora, es:

$$(a;\ b) \neq (b;\ a)$$

Dicho de otro modo: si dos pares ordenados son iguales, sus componentes deben ser respectivamente iguales así:

(a; b) = (c; d) ; ***quiere decir:*** a = c y b = d

Observaciones:

*Es distinto el **par ordenado** (2;, 3) y el conjunto {2; 3}; pues en el último orden no es esencial, mientras en el primero sí. Osea:*

(2; 3) ≠ (3; 2) ⇨ **el orden si interesa**

{2; 3} = {3; 2} ⇨ **el orden no interesa, porque los dos son conjuntos.**

Es de notar que las componentes de un par ordenado no necesitan ser diferentes, esto es, (3; 3); (4; 4); (4; 4) y (a; a) son pares ordenados válidos.

1.2. Producto Cartesiano:

Conociendo el concepto de **"par ordenado"**, podemos definir un nuevo concepto importante de la matemática, el producto de conjuntos, llamado también **Producto Cartesiano:**

Ejemplo 1: Sean los conjuntos: A = {Camisa} ; B = {Blanca, Azul, Celeste}

Ahora, lo que se trata de formar todos los pares ordenados posibles entre los elementos de estos conjuntos, de modo que el primer elemento de cada par pertenezca al conjunto **A** y el segundo al conjunto **B**.

Estos pares serán: A = {Camisa} ; B = {Blanca, Azul, Celeste}

(Camisa, Blanca); (Camisa, Azul); (Camisa, Celeste) ⇨ **se han formado tres pares ordenados.**

∴ AxB = {(Camisa; Blanca), (Casima, Azul), (Camisa; Celeste)}

Ejemplo 2: Dado los conjuntos: A = {2; 3; 4} y B = {3; 5} ; el producto cartesiano AxB es:

Resolución: AxB = {2; 3; 4}×{3; 5}

∴ AxB = {(2; 3), (2; 5), (3; 3), (3; 5), (4; 3), (4; 5)}

Definición:

*Dados los conjuntos A y B, **el producto cartesiano** de A por B, es el conjunto de todos los pares ordenados (a; b) con a ∈ A y b ∈ B.*
***Se denota por:** "A × B" y se lee: "A por B" o "A aspa B".*

Simbólicamente el producto cartesiano se representa así:

$$A \times B = \{(a; b) / a \in A \wedge b \in B\}$$

1.2.1. Representación gráfica del producto cartesiano de dos conjuntos:

Puede hacerse de las siguientes formas:

a) Diagrama de caminos

b) Diagrama Sagital

c) Diagrama de árbol

d) Diagrama cartesiano

Ejemplo: Sean los conjuntos: $A = \{1; 2\}$ y $B = \{a; b; c\}$

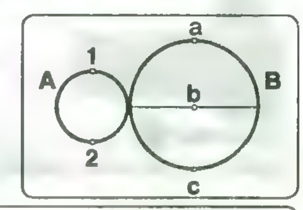
Hallar el producto cartesiano $A \times B$ y graficar:

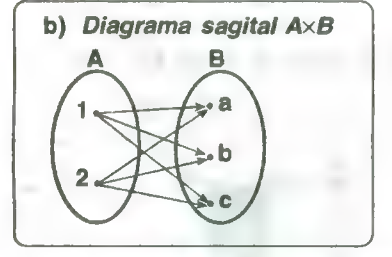
Resolución:

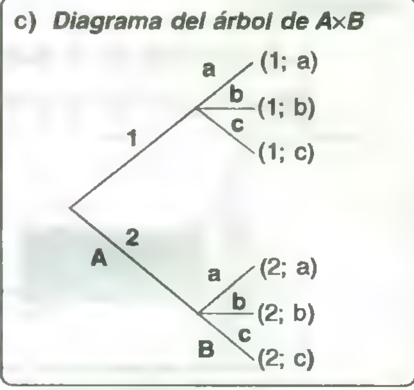
a) ***Diagrama de Caminos de A×B.***

$A \times B = \{1; 2\} \times \{a; b; c\}$

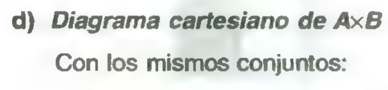
$\therefore$ $A \times B = \{(1; a), (1; b), (1; c), (2; a), (2; b), (2; c)\}$







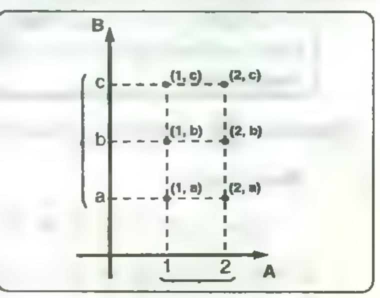
d) ***Diagrama cartesiano de A×B***



Con los mismos conjuntos:

$A = \{1; 2\} \wedge B = \{a; b; c\}$

Trazamos dos rectas perpendiculares que se cortan tomando en ellas escalas apropiadas de tal manera que queden asociados los puntos de cada línea con los elementos de A y B. Así:



* Un par ordenado tal como (1; a) esta representado por el punto de intersección que se obtiene trazando paralelas por cada uno de los puntos de división.

Observación: Recuerda que: A x B ≠ B x A; siempre y cuando A y B sean conjuntos. Si A tiene 2 elementos y B tiene 3 elementos, entonces A x B; tendrá: 2 . 3 = 6 elementos.

- **Tabla de Doble Entrada:**

Con los mismos conjuntos: A = {1; 2} ∧ B = {a; b; c}; hallar el producto cartesiano A x B; haciendo uso de la tabla de doble entrada.

A \ B	a	b	c
1	(1; a)	(1 ; b)	(1 ; c)
2	(2 ; a)	(2 ; b)	(2 ; C)

➠ A x B = {(1 ; a) , (1 ; b) , (1 ; c) , (2 ; a) , (2 ; b) , (2 ; c)}

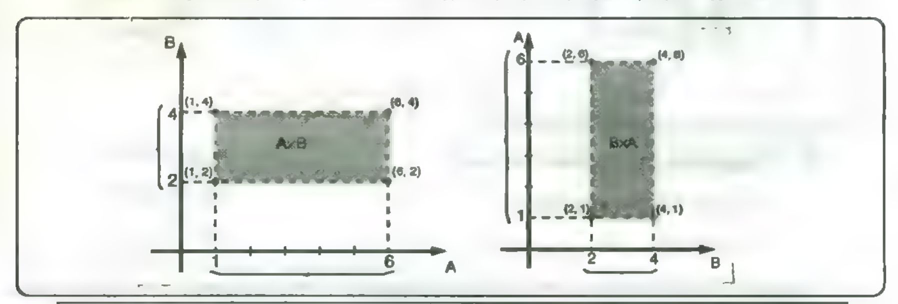
EJERCICIOS RESUELTOS

Ejercicio 1: Si: A = {1;6 } ∧ B = {2 ; 4}; hallar: A x B y luego B x A, representar gráficamente cada producto en diagramas cartesianos.

Resolución:

A×B = {1; 6}×{2; 4} ⇨ A×B = {(1; 2), (1; 4), (6; 2), (6; 4)}

B×A = {2; 4}×{1; 6} ⇨ B×A = {(2; 1), (2; 6), (4; 1), (4; 6)}



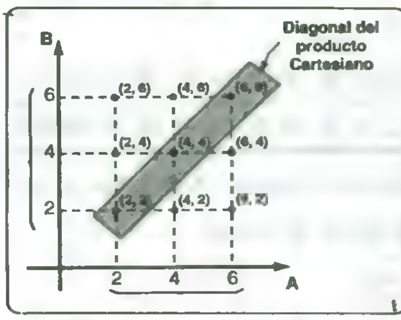
De acuerdo a estos resultados, observamos que: A×B es diferente de B×A, luego podemos afirmar que: ***El producto cartesiano de dos conjuntos no es commutativo.***

Ejercicio 2: Dado el conjunto: A = {2; 4; 6}, hallar: A x A

Resolución:

A×A = {2; 4; 6}×{2; 4; 6}

A × A = {2; 2), (2; 4); (2; 6), (4; 2), (4; 4), (4; 6), (6; 2), (6; 4), (6; 6)}



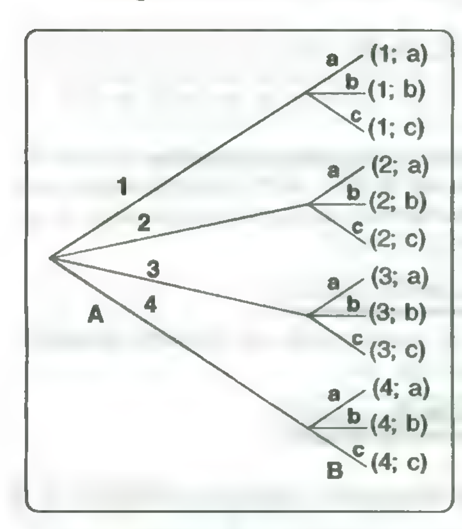
* **Tabla de Doble Entrada:**

A \ A	2	4	6
2	(2; 2)	(2; 4)	(2; 6)
4	(4; 2)	(4; 4)	(4; 6)
6	(6; 2)	(6; 4)	(6; 6)

Ejercicio 3: Dados los conjuntos: A = {1; 2; 3; 4} ∧ B = {a; b; c}, hallar: A x B.

Resolucion:

Por diagrama del árbol, obtenemos:



A×B = {(1; a), (1; b), (1; c), (2; a), (2; b), (2; c), (3; a), (3; b), (3; c), (4; a), (4; b), (4; c)}

Ademas: n(A) = 4 ; n(B) = 3

Luego: n(A)×n(B) = n(A×B)

4 × 3 = 12

"El número de elementos de producto cartesiano de dos conjuntos es igual al producto del número de elementos de A por el nímero de elementos de B". Es decír:

n(A×B) = n(A)×n(B)

Ejercicio 4: Dados los conjuntos: A = {3; 4}; B = {2; 4} ∧ C = {5; 6}, hallar:

a) A×(B∪C) **b)** (A×B) ∪ (A×C)

Resolución:

a) Para hallar: A×(B∪C) ; primero hallamos: (B∪C), veamos:

B∪C = {2; 4} ∪ {5; 6} ⇨ B∪C = {2; 4; 5; 6}

Luego, calculamos: A×(B∪C)

$A\times(B\cup C) = \{3;\ 4\}\times\{2;\ 4;\ 5;\ 6\}$

$= \{(3;\ 2),\ (3;\ 4),\ (3;\ 5),\ (3;\ 6),\ (4;\ 2),\ (4;\ 4),\ (4;\ 5),\ (4;\ 6)\}$

$\therefore$ $\boxed{A\times(B\cup C) = \{(3;\ 2),\ (3;\ 4),\ (3;\ 5),\ (3;\ 6),\ (4;\ 2),\ (4;\ 4),\ (4;\ 5),\ (4;\ 6)\}}$

b) Para hallar: $(A\times B) \cup (A\times C)$; primero hallamos: $(A\times B)$ y $(A\times C)$, veamos:

$A\times B = \{3;\ 4\}\times\{2;\ 4\} = \{(3;\ 2),\ (3;\ 4),\ (4;\ 2),\ (4;\ 4)\}$

$\therefore$ $\boxed{A\times B = \{(3;\ 2),\ (3;\ 4),\ (4;\ 2),\ (4;\ 4)\}}$

$A\times C = \{3;\ 4\}\times\{5;\ 6\} = \{(3;\ 5),\ (3;\ 6),\ (4;\ 5),\ (4;\ 6)\}$

$\therefore$ $\boxed{A\times C = \{(3;\ 5),\ (3;\ 6),\ (4;\ 5),\ (4;\ 6)\}}$

Luego, calculamos: $(A\times B) \cup (A\times C)$

$(A\times B) \cup (A\times C) = \{(3;\ 2),\ (3;\ 4),\ (4;\ 2),\ (4;\ 4)\} \cup \{(3;\ 5),\ (3;\ 6),\ (4;\ 5),\ (4;\ 6)\}$

$\therefore$ $\boxed{(A\times B) \cup (A\times C) = \{(3;\ 2),\ (3;\ 4),\ (3;\ 5),\ (3;\ 6),\ (4;\ 2),\ (4;\ 4),\ (4;\ 5),\ (4;\ 6)\}}$

* De acuedo a lo hallado, observamos que los **pares ordenados** de $A\times(B\cup C)$ son los mismos **pares ordenados** de: $(A\times B) \cup (A\times C)$ y esto se debe a una propiedad llamada **propiedad distributiva**, del producto cartesianos de un conjunto por la reunión o unión de otros dos.

Donde: $\boxed{A\times(B\cup C) = (A\times B) \cup (A\times C)}$

La propiedad distributiva tambien se aplica al caso del producto cartesiano conjunto por la intersección de otros dos, asi:

$$\boxed{A\times(B\cap C) = (A\times B) \cap (A\times C)}$$



EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE PRODUCTO CARTESIANO

Ejercicio 1: De las afirmaciones siguientes colocar en cada paréntesis una **"V"** si es verdadera y una **"F"** si es falsa.

a) $(3^2;\ 4) = (9;\ 2^2)$ ....(V)	f) $(5^2;\ 7) = (2^5;\ 7)$ ....(F)
b) $(1;\ 8) = (1^2,\ 2^3)$ ....(V)	g) $(6;\ 0) = (6;\ 0^3)$ ....( )
c) $(3^{-1};\ 6) = (\frac{1}{3};\ 6)$ ....(V)	h) $(2^4;\ 9) = (4^3,\ 3^2)$ ....( )
d) $(5^0;\ \sqrt{9}) = (1,\ 3)$ ....(V)	i) $(2^{-3},\ 8) = (\frac{1}{8};\ 8)$ ....(V)
e) $(9;\ 3) = (3;\ \sqrt{81})$ ....(F)	j) $(1^3;\ 4) = (4;\ 1)$ ....(F)

Resolucion:

Recuerda que:

* $A^{-n} = \dfrac{1}{A^n}$; Si: $A \neq 0$ ** $A^0 = 1$; Si: $A \neq 0$

a) $(3^2; 4) = (9; 2^2)$ $(9; 4) = (9; 4)$ ....(V)	f) $(5^2; 7) = (2^5; 7)$ $(25; 7) = (32; 7)$ ....(F)
b) $(1; 8) = (1^2; 2^3)$ $(1; 8) = (1; 8)$ ....(V)	g) $(6; 0) = (6; 0^3)$ $(6; 0) = (6; 0)$ .... (V)
c) $(3^{-1}; 6) = (\frac{1}{3}; 6)$ $(\frac{1}{3}; 6) = (\frac{1}{3}; 6)$ ....(V)	h) $(2^4; 9) = (4^3; 3^2)$ $(16; 9) = (64; 9)$ .... (F)
d) $(5^0; \sqrt{9}) = (1; 3)$ $(1; 3) = (1; 3)$ ....(V)	i) $(2^{-3}; 8) = (\frac{1}{8}; 8)$ $(\frac{1}{8}; 8) = (\frac{1}{8}; 8)$ .... (V)
e) $(9; 3) = (3; \sqrt{81})$ $(9; 3) = (3; 9)$ ....(F)	j) $(1^3; 4) = (4; 1)$ $(1; 4) = (4; 1)$ ....(F)

Ejercicio 2: En cada ejercicio halla el valor de "x" y el valor de "y", para que exista igualdad de pares ordenados.

a) $(x + 2; 5) = (6; y - 3)$	d) $\left(\frac{x+1}{3}; \frac{1}{2}\right) = \left(2; \frac{y-2}{4}\right)$
b) $(2x; 1) = (8; y - 5)$	e) $\left(\frac{6}{x}; \frac{-3}{y}\right) = (3; -3)$
c) $(-5; 2y) = (x + 1; -10)$	f) $\left(\frac{2-x}{3}; \frac{-5}{6}\right) = \left(-2; \frac{3-y}{3}\right)$

Resolucion:

a) $(x + 2; 5) = (6; y - 3)$ i) $x + 2 = 6 \Rightarrow$ **$x = 4$** ii) $5 = y - 3 \Rightarrow$ **$y = 8$**	b) $(2x; 1) = (8; y - 5)$ i) $2x = 8 \Rightarrow$ **$x = 4$** ii) $1 = y - 5 \Rightarrow$ **$y = 6$**

c) $(-5; 2y) = (x + 1; -10)$

$$\begin{cases} \text{i) } -5 = x + 1 \Rightarrow \boxed{x = -6} \\ \text{ii) } 2y = -10 \Rightarrow \boxed{y = -5} \end{cases}$$

e) $\left(\frac{6}{x}; \frac{-3}{y}\right) = (3; -3)$

$$\begin{cases} \text{i) } \frac{6}{x} = 3 \Rightarrow \frac{6}{3} = x \Rightarrow \boxed{2 = x} \\ \text{ii) } \frac{-3}{y} = -3 \Rightarrow \frac{-3}{-3} = y \Rightarrow \boxed{1 = y} \end{cases}$$

d) $\left(\frac{x+1}{3}; \frac{1}{2}\right) = \left(2; \frac{y-2}{4}\right)$

$$\begin{cases} \text{i) } \frac{x+1}{3} = 2 \Rightarrow x + 1 = 6 \Rightarrow \boxed{x = 5} \\ \text{ii) } \frac{1}{2} = \frac{y-2}{4} \Rightarrow \frac{4}{2} = y - 2 \Rightarrow \boxed{y = 4} \end{cases}$$

f) $\left(\frac{2-x}{3}; \frac{-5}{6}\right) = \left(-2; \frac{3-y}{3}\right)$

$$\begin{cases} \text{i) } \frac{2-x}{3} = -2 \Rightarrow 2 - x = -6 \Rightarrow \boxed{8 = x} \\ \text{ii) } -\frac{5}{6} = \frac{3-y}{3} \Rightarrow -15 = 18 - 6y \Rightarrow \boxed{y = \frac{11}{2}} \end{cases}$$

Ejercicio 3: Hallar el conjunto de A x B, sabiendo que:

$$A = \{x \in \mathbb{N} / 3 \leq x < 6\} \wedge B = \{x \in \mathbb{Z} / -2 < x \leq 2\}$$

Elabora un diagrama cartesiano para representar dicho producto.

Resolución:

$A = \{x \in \mathbb{N} / 3 \leq x < 6\}$

Los Números Naturales ($\mathbb{N}$) mayores o igual que 3, pero menores que 6 son: 3; 4; 5

$\therefore$ $\boxed{A = \{3; 4; 5\}}$

$B = \{x \in \mathbb{Z} / -2 < x \leq 2\}$

Los Números Enteros ($\mathbb{Z}$) mayores que -2, pero menores o igual que 2 son: -1; 0; 1; 2

$\therefore$ $\boxed{B = \{-1; 0; 1; 2\}}$

*** Tabla de Doble Entrada:**

A \ B	-1	0	1	2
3	(3; -1)	(3; 0)	(3; 1)	(3; 2)
4	(4; -1)	(4; 0)	(4; 1)	(4; 2)
5	(5; -1)	(5; 0)	(5; 1)	(5; 2)

$A \times B = \{(3; -1), (3; 0), (3; 1), (3; 2), (4; -1), (4; 0), (4; 1), (4; 2), (5; -1), (5; 0), (5; 1), (5; 2)\}$

Diagrama Cartesiano:

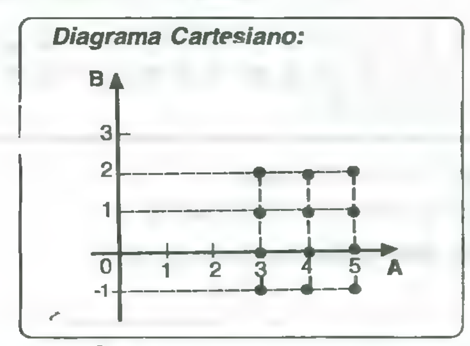
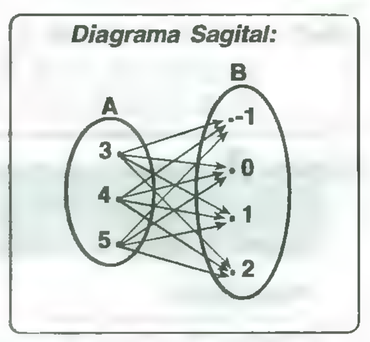


Diagrama Sagital:



Ejercicio 4: Hallar el conjunto de E x F, sabiendo que:

$$E = \{x \in \mathbb{Z} / -3 \leq x < 2\} \wedge F = \{x \in \mathbb{Z} / -2 < x \leq 3\}$$

Elabora el diagrama cartesiano para representar dicho producto.

Resolución:

$E = \{x \in \mathbb{Z} / -3 \leq x < 2\}$

Los Números Enteros ($\mathbb{Z}$) mayores o igual a -3, pero menores que 2 son: -3; -2; -1; 0; 1

$\therefore$ $E = \{-3; -2; -1; 0; 1\}$

$F = \{x \in \mathbb{Z} / -2 < x \leq 3\}$

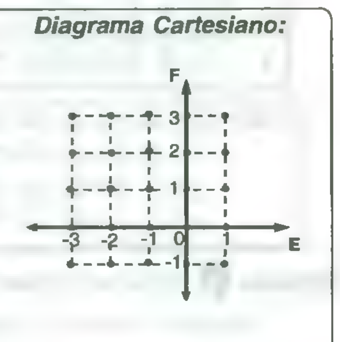
Los Números Enteros ($\mathbb{Z}$) mayores que -2, pero menores o igual que 3 son: -1; 0; 1; 2; 3

$\therefore$ $F = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$

*** Tabla de Doble Entrada:**

E \ F	-1	0	1	2	3
-3	(-3; -1)	(-3; 0)	(-3; 1)	(-3; 2)	(-3; 3)
-2	(-2; -1)	(-2; 0)	(-2; 1)	(-2; 2)	(-2; 3)
-1	(-1; -1)	(-1; 0)	(-1; 1)	(-1; 2)	(-1; 3)
0	(0; -1)	(0; 0)	(0; 1)	(0; 2)	(0; 3)
1	(1; -1)	(1; 0)	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)

Diagrama Cartesiano:



ExF = {(-3; -1), (-3; 0), (-3; 1), (-3; 2), (-3; 3), (-2; -1), (-2; 0), (-2; 1), (-2; 2), (-2; 3), (-1; -1), (-1; 0), (-1; 1), (-1; 2), (-1; 3), (0; -1), (0; 0), (0; 1), (0; 2), (0; 3), (1; -1), (1; 0), (1; 1), (1; 2), (1; 3)}

Ejercicio 5: Hallar el conjunto de C x D, sabiendo que:

$$C = \{x \in \mathbb{Z} / -3 < x \leq 1\} \wedge D = \{x \in \mathbb{N} / 5 \leq x < 9\}$$

Elabora el diagrama cartesiano para representar dicho producto.

Resolución:

$C = \{x \in \mathbb{Z} / \underbrace{-3 < x \leq 1}\}$

Los Números Enteros (Z) mayores que -3, pero menores o igual que 1 son: -2; -1; 0; 1

$\therefore$ C = {-2; -1; 0; 1}

$D = \{x \in \mathbb{N} / \underbrace{5 \leq x < 9}\}$

Los Números Naturales (N) mayores o igual que 5, pero menores que 9 son: 5; 6; 7; 8

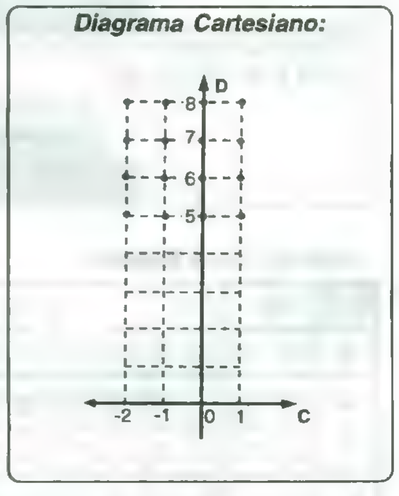
$\therefore$ D = {5; 6; 7; 8}

*** Tabla de Doble Entrada:**

C \ D	5	6	7	8
-2	(-2; 5)	(-2; 6)	(-2; 7)	(-2; 8)
-1	(-1; 5)	(-1; 6)	(-1; 7)	(-1; 8)
0	(0; 5)	(0; 6)	(0; 7)	(0; 8)
1	(1; 5)	(1; 6)	(1; 7)	(1; 8)

CxD = {(-2; 5), (-2; 6), (-2; 7), (-2; 8), (-1; 5), (-1; 6), (-1; 7), (-1; 8), (0; 5), (0; 6), (0; 7), (0; 8), (1; 5), (1; 6), (1; 7), (1; 8)}

Diagrama Cartesiano:



Ejercicio 6: Hallar el conjunto de A x B, sabiendo que:

$$A = \{2x - 1 / -2 \leq x \leq 1 \; ; x \in \mathbb{Z}\} \wedge B = \{3x + 1 / -2 < x \leq 0 \; ; x \in \mathbb{Z}\}$$

Elabora el diagrama cartesiano para representar dicho producto.

Resolución:

$A = \{2x - 1 / -2 \leq x \leq 1 \,;\, x \in \mathbb{Z}\}$

Los valores que toma "x" son: -2; -1; 0; 1

Luego los valores de "x" los reemplazamos en la expresión: 2x - 1, para saber cuales son los elementos del conjunto "A", veamos :

Para: $x = -2 \Rightarrow 2x - 1 = 2(-2) - 1 = -5$

Para: $x = -1 \Rightarrow 2x - 1 = 2(-1) - 1 = -3$

Para: $x = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 2(0) - 1 = -1$

Para: $x = 1 \Rightarrow 2x - 1 = 2(1) - 1 = 1$

$\therefore$ $A = \{-5; -3; -1; 1\}$

Para el conjunto B:

$B = \{3x + 1 / -2 < x \leq 0 \,;\, x \in \mathbb{Z}\}$

Los valores que toma "x" son: -1; 0

Luego los valores de "x" los reemplazamos en la expresión: 3x + 1; para saber cuales son los elementos del conjunto "B", veamos:

Para: $x = -1 \Rightarrow 3x + 1 = 3(-1) + 1 = -2$

Para: $x = 0 \Rightarrow 3x + 1 = 3(0) + 1 = 1$

$\therefore$ $B = \{-2; 1\}$

*** Tabla de Doble Entrada:**

A \ B	-2	1
-5	(-5, -2)	(-5, 1)
-3	(-3, -2)	(-3, 1)
-1	(-1, -2)	(-1, 1)
1	(1, -2)	(1, 1)

Diagrama Sagital:

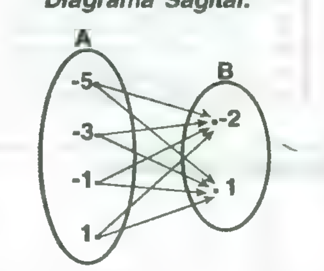
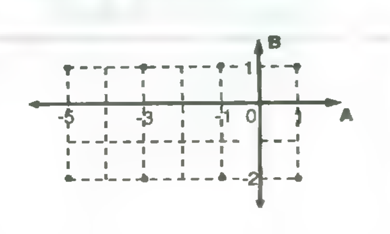


Diagrama Cartesiano:



A×B = {(-5; -2), (-5; 1), (-3; -2), (-3; 1), (-1; -2), (-1; 1), (1; -2), (1; 1)}

Ejercicio 7: Hallar el conjunto de A x A, sabiendo que:

$$A = \{x^2 + 2 / -1 \le x < 3 \; ; x \in \mathbb{Z}\}$$

Elabora el diagrama cartesiano para representar dicho producto.

Resolucion:

$A = \{x^2 + 2 / \underbrace{-1 \le x < 3} ; x \in \mathbb{Z}\}$ — Los valores que toma "x" son: -1; 0; 1; 2

Luego reemplazamos los valores de "x" en la expresión: $x^2 + 2$, para saber cuales son los elementos del conjunto "A", veamos:

Para: $x = -1 \Rightarrow x^2 + 2 = (-1)^2 + 2 = 3$

Para: $x = 0 \Rightarrow x^2 + 2 = (0)^2 + 2 = 2$

Para: $x = 1 \Rightarrow x^2 + 2 = (1)^2 + 2 = 3$

Para: $x = 2 \Rightarrow x^2 + 2 = (2)^2 + 2 = 6$

$\therefore$ A = {2; 3; 6}

*** Tabla de Doble Entrada:**

A \ A	2	3	6
2	(2; 2)	(2; 3)	(2; 6)
3	(3; 2)	(3; 3)	(3; 6)
6	(6; 2)	(6; 3)	(6; 6)

Diagrama Sagital:

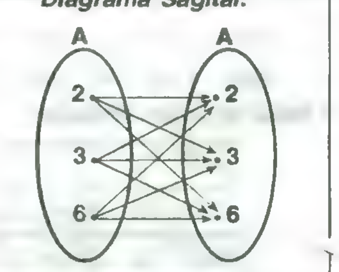
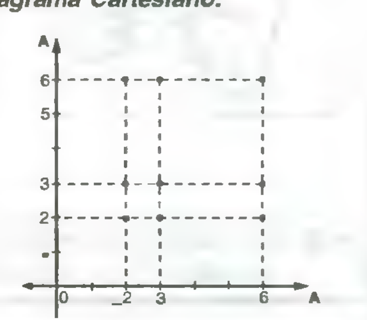


Diagrama Cartesiano:



A×A = {(2, 2), (2, 3), (2, 6), (3, 2), (3, 3), (3, 6), (6, 2), (6, 3), (6, 6)}



TALLER DE EJERCICIOS Nº 1

Ejercicio 1: De las afirmaciones siguientes. ¿Cuáles son verdaderas? Coloca una **V** dentro del paréntesis. ¿Cuáles son falsas? Coloca una **F** dentro del paréntesis.

a)	$\{x ; y\} = \{y ; x\}$	... (V)	**f)**	$(11^0 ; 3^2) = (1 ; 9)$	... ( )
b)	$(x ; y) = (x ; y)$	... ( )	**g)**	$(2^3 ; 7) \neq (3^2 ; 7)$	... ( )
c)	$(25 ; 4) = (5^2 ; 4)$	... ( )	**h)**	$(x ; y) \neq (y ; x)$	... ( )
d)	$(81 ; 64) = (3^4 ; 4^3)$	... ( )	**i)**	$(5^3 ; 4^0) = (3^5 ; 1)$	... ( )
e)	$(2^4 ; 5) = (4^2 ; 5)$	... ( )	**j)**	$\left(\sqrt{81} ; 2\right) = \left(9 ; \sqrt{4}\right)$	... ( )

Ejercicio 2: Si: $(4 ; 7) = (a ; b)$ y $(a ; b) = (x ; y)$. ¿Cuánto vale "y"?

Resolución:

Ejercicio 5: Si: $\left(\frac{x+3}{2} ; 7\right) = (x ; 7)$

¿Cuánto vale "x"?

Resolución:

Ejercicio 3: Si: $(a + 1 ; 4) = (3 ; t)$; ¿Cuánto vale "t" y cuánto vale "a"?

Resolución:

Ejercicio 6: Si: $(8^2 ; 4) = (x^6 ; 2^2)$ ¿Cuánto vale "x"?

Resolución:

Ejercicio 4: Si: $(3a ; 5) = (6 ; y)$ ¿Cuánto vale "a"?

Resolución:

Ejercicio 7: Si: $\left(\frac{x+1}{4} ; 6\right) = \left(2 ; \frac{y-1}{2}\right)$

¿Cuánto vale: $\frac{x+y}{2}$?

Resolución:

Ejercicio 8 : Si: (n , 3) = (x ; y) y (x ; y) = (6 ; 3); escribe dentro de cada paréntesis una **F** o una **V** según sea **Falsa** o **Verdadera** en cada una de las siguientes afirmaciones:

a) (6 ; 3) = (y ; x)	...... ( )	**d)** (3 ; n) = (x ; y) ...... ( )
b) (x ; y) = (n ; 3)	...... ( )	**e)** (6 ; y) = (n ; 3) ...... ( )
c) (x ; y) ≠ (6 ; 3)	...... ( )	**f)** (6 ; y) = (3 ; n) ...... ( )

Ejercicio 9 : Escriba los pares ordenados de cada producto cartesiano y observa si se cumple la propiedad conmutativa, graficar en un diagrama cartesiano.

a) A = {5 ; 2} ∧ B = {3 ; 7}

A x B = {...}

B x A = {...}

b) P = {3 ; 5 ; 9} ∧ Q = {6 ; 0 ; 8}

P x Q = {...}

Q x P = {...}

c) M = {a ; b ; c ; d} ∧ N = {3 ; 6}

M x N = {...}

N x M = {...}

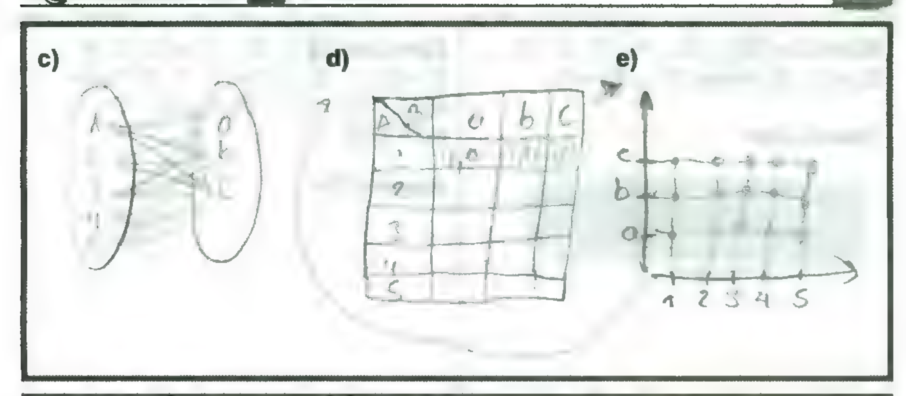
Ejercicio 10 : Si: A = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5} ∧ B = {a ; b ; c}. Hallar: A x B y graficar el producto.

a) En un diagrama de caminos.
b) En un diagrama de árbol
c) En un diagrama de sagital
d) En un diagrama cartesiano
e) Construir una tabla de doble entrada.

Resolución:

a)

b)



Ejercicio 11 : Si: A = {x ∈ IN/3 < x < 7} ∧ B = {x ∈ IN/4 ≤ x ≤ 6}. Hallar: A x B.

Resolución:

Ejercicio 13 : Si: M = {x ∈ IN/0 ≤ x ≤ 2} ∧ N = {x ∈ IN/2 < x < 6}. Hallar: M x N.

Resolución:

Ejercicio 12 : Si: P = {x ∈ IN/2 ≤ x < 5} ∧ Q = {x ∈ IN/7 < x < 10}. Hallar: P x Q.

Resolución:

Ejercicio 14 : Si: R = {x ∈ IN/1 < x < 4} ∧ S = {x ∈ IN/3 ≤ x < 5}. Hallar: R x S.

Resolución:

Ejercicio 15 : Si: $P = \{1 ; 2 ; 3\} \wedge Q = \{2 ; 6\}$. Hallar: $(P \cup Q) \times Q$.

Resolución:

Ejercicio 16 : Si: $M = \{3 ; 4 ; 6\} \wedge N = \{3 ; 6 ; 7\}$. Hallar: $(M \cap N) \times M$.

Resolución:

Ejercicio 17 : Si: $E = \{3 ; 4 ; 5\} \wedge F = \{4 ; 6 ; 8\}$. Hallar: $(E - F) \times F$.

Resolución:

Ejercicio 18 : Si: $A = \{2 ; 3 ; 4\} \wedge B = \{5 ; 1 ; 8\} \wedge C = \{3 ; 1 ; 6\}$ Hallar:

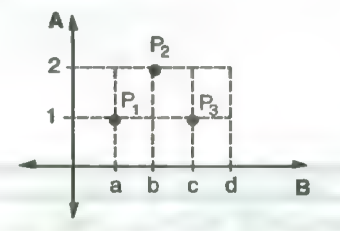
a) $(A \cup B) \times C$ **b)** $A \times (B \cup C)$

c) $A \times (B - C)$

Resolución:

Ejercicio 19 : Hallar los pares ordenados correspondientes a los puntos $P_1 ; P_2 ; P_3 ; P_4 ; P_5 ; P_6$ y P_7 que aparecen en los diagrmas **(1)** y **(2)**.

Resolución:

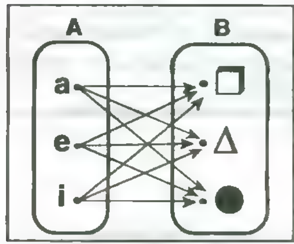


Ejercicio 20 : Dado el conjunto: $A = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$. Calcular la diagonal del producto cartesiano A x A. Trazar su gráfico.

Resolución:

1.3 Noción de correspondencia:

Este diagrama es el diagrama de flechas del producto A×B.

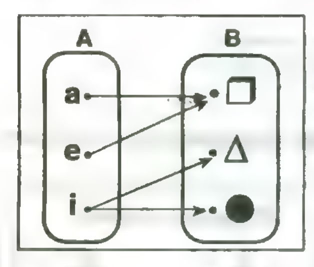


Observa que se ha unido con flechas cada elemento de "A" con todos los elementos de : "B". Estos son los pares de elementos que forman el producto A×B.

A×B = {(a; ❒), (a; Δ), (a; ●), (e; ❒), (e; Δ), (e; ●), (i; ❒), (i; Δ), (i; ●)}

(al conjunto de estos pares ordenados es a los que llamamos grafo)

Ahora, unimos los elementos de **A** con algunos de **B**.



* *Al conjunto A se llama **conjunto de partida** y conjunto B se llama **Conjunto de llegada**. Los pares de elementos correspondientes que se ha formado en estos dos últimos conjuntos son:*

a le corresponde ❒
e le corresponde ❒
i le corresponde Δ
i le corresponde ●

*(A este conjunto de pares de elementos le llamamos **S**)*

Luego:

S = {(a; ❒), (e; ❒), (i; Δ), (i; ●)}

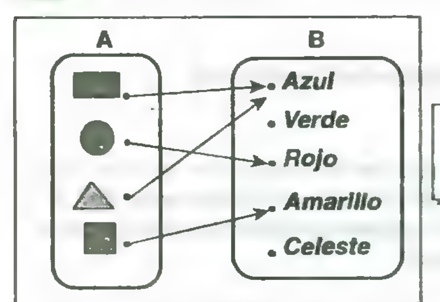
Observa que: $S \subset A \times B$ (El grafo "S" es un subconjunto del producto A×B)

∴ S es una correspondencia de A hacia B.

Una correspondencia de A hacia B es un subconjunto del producto cartesiano A×B

1.3.1. Correspondencia Unívoca:

Entre los conjuntos A y B se ha establecido la siguiente correspondencia F, (ver diagrama).



Una correspondencia es Unívoca cuando de cada elemento de conjunto de partida sale una sola flecha.

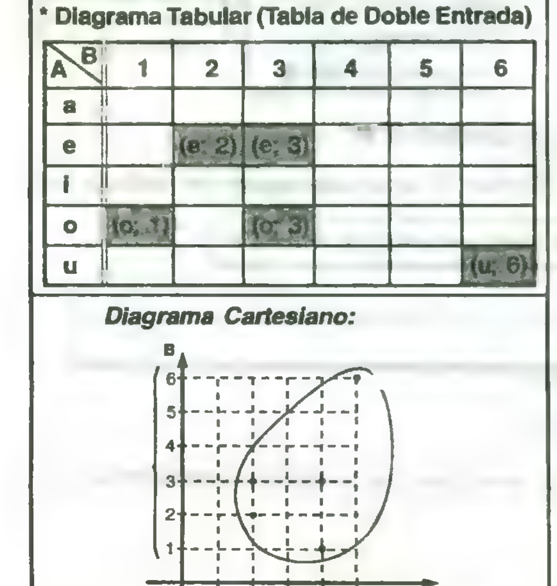
1.3.2. Cómo construir una correspondencia entre dos conjuntos:

Para construir una correspondencia, basta dar el conjunto de partida A, el conjunto de llegada B, y el gráfo o subconjunto del conjunto producto A×B. Estos son los tres elementos esenciales de una correspondencia.

Ejemplos: Sean los conjuntos: A = {a; e; i; o; u} ∧ B = {1; 2; 3; 4; 5; 6} ; La correspondencia de A hacia B es:

S = {(e; 2), (e; 3), (o; 1), (o; 3), (u; 6)}
Grafo

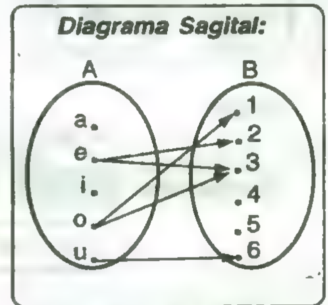
La correspondencia asi definida puede también expresarse por cualquiera de los tres diagramas siguientes:



*** Diagrama Tabular (Tabla de Doble Entrada)**

A \ B	1	2	3	4	5	6
a						
e		(e; 2)	(e; 3)			
i						
o	(o; 1)		(o; 3)			
u						(u; 6)

Diagrama Cartesiano:



Observación:

No confundas Grafo con Gráfico de una correspondencia, el gráfo es el conjunto de pares que define una correspondencia y Gráfico es cualquiera de los diagramas que la representan.

- Del diagrama sagital, podemos decir que:

2 es **la imagen** de **e** en **B**;
3 es **la imagen** de **e** y de **o**;
1 es **la imagen** de **o** y
6 es **la imagen** de **u**, mediante la correspondencia **"F"**.

A su vez:

"e" es el **origen** ó **pre-imagen** de **2** y de **3**;
"o" es el **origen** ó **pre-imagen** de **1** y de **3**;
"u" es el **origen** ó **pre-imagen** de **6**.



Esto se expresa de cualquiera de estas dos formas siguientes:

$e \xrightarrow{f} 2$; $f(e) = 2$
$e \xrightarrow{f} 3$; $f(e) = 3$
$o \xrightarrow{f} 1$; $f(o) = 1$
$o \xrightarrow{f} 3$; $f(o) = 3$
$u \xrightarrow{f} 6$; $f(u) = 6$

- Observamos que en ésta correspondencia solamente los elementos "e", "o" y "u" del conjunto A tienen **imágenes** en B. Su conjunto se llama **dominio** de la correspondencia f. Se escribe así:

dom. f = {e; o, u}

Dominio de una correspondencia f entre A y B es el conjunto de los orígenes o pre-imágenes de los pares de f.

También observamos que solamente los elementos 1, 2, 3 y 6 del conjunto B son imágenes de otros elementos del conjunto A. Su conjunto se llama Rango de la correspondencia f. Se escribe así: Ran. f = {1; 2; 3; 6}

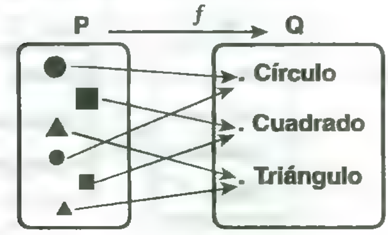
***Rango** de una correspondencia f entre A y B es el conjunto de imágenes de los pares de f.*

1.3.3. Correspondencia Inversa:

Sean los conjuntos: P y Q.

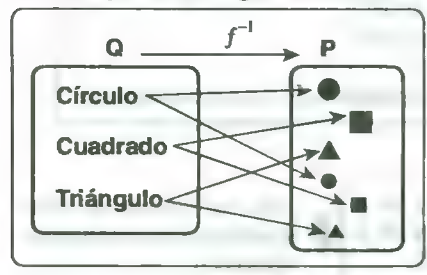
P = {●; ■; ▲; •; ▪; ▴} ∧ Q = {círculo; cuadrado; triángulo}

Se ha establecido la correspondencia $P \xrightarrow{f} Q$, (Ver diagrama)



*. En este diagrama, **P** es el **conjunto de Partida** y **Q** el **conjunto de llegada.***

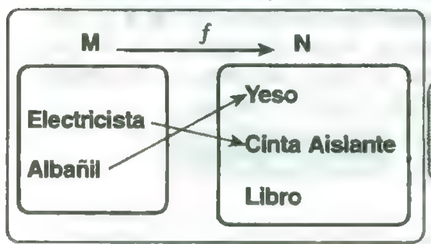
Consideremos ahora al conjunto **Q** como **conjunto de partida** y **P** como **Conjunto de llegada**, siendo el diagrama el siguiente:



* f^{-1} es la inversa de la correspondencia f.
* El conjunto de partida de una correspondencia es el conjunto de llegada de la correspondencia inversa.
* El conjunto de llegada de una correspondencia es el conjunto de partida de la correspondencia inversa.

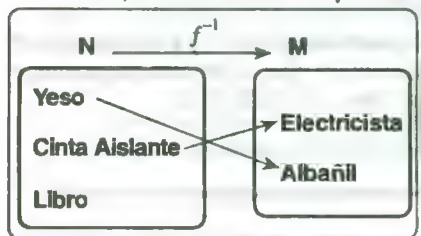
1.3.4. Correspondencia Biunívoca:

Entre los puntos M y N se ha establecido la correspondencia (ver figura)



*Como se observará la correspondencia es **unívoca** por que de cada elemento del conjunto de partida sale una **sóla flecha***

Ahora, hallamos la correspondencia inversa, veamos:



*También la correspondencia es **unívoca** porque de cada elemento del conjunto de partida sale una **sóla flecha***

Luego: f y f^{-1} *son **unívocas***

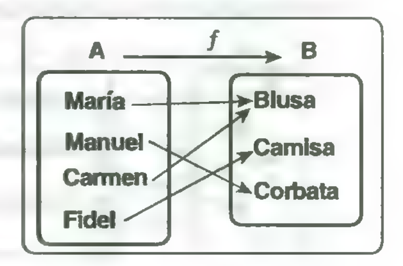
*Cuando una correspondencia es **Unívoca** y su inversa también lo es, esa correspondencia se llama **Biunívoca.***

1.4. Aplicación:

Consideremos los conjuntos:

A = {María; Manuel; Carmen; Fidel} $\wedge$

B = {Blusa; Camisa; Corbata}

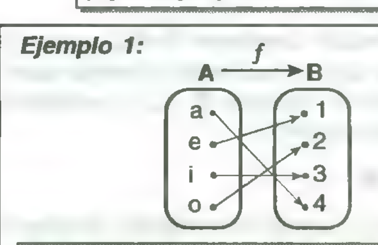


- *Como se observará, la correspondencia es **unívoca.***

- *Del conjunto de partida A, salen flechas de todos sus elementos.*

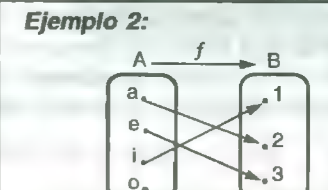
> *Para que una correspondencia sea **aplicación** es necesario que sea **Unívoca** y que salgan flechas de todos los elementos del conjunto de Partida.*

Ejemplo 1:



*Esta correspondencia **sí es aplicación** porque de todos los elementos del conjunto de partida salen flechas.*

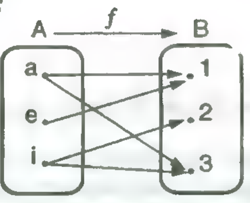
Ejemplo 2:



*Esta correspondencia **no es aplicación** porque del elemento **o** no sale ninguna flecha.*

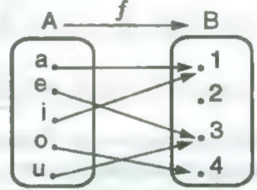


Ejemplo 3:



*Esta correspondencia **no es aplicación** porque de los elementos **a** é **i** salen de cada una 2 flechas.*

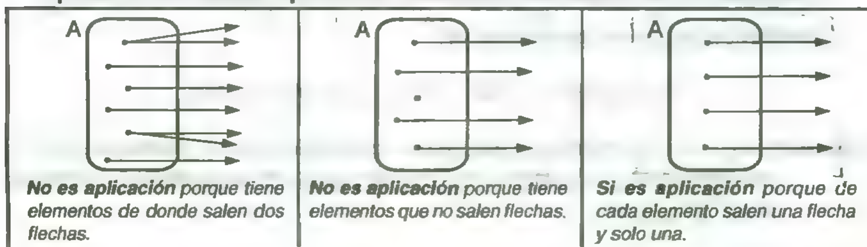
Ejemplo 4:



*Esta correspondencia **sí es aplicación** porque de todos los elementos del conjunto de partida salen flechas.*

1.4.1. Cómo distinguir las aplicaciones:

Para saber si una correspondencia es una **aplicación** basta observar el conjunto de partida. Lo más sencillo es trazar el diagrama sagital, y ver si de cada elemento de **A** (Conjunto de Partida), **sale una, y sólo una flecha**.
Fijémonos en las tres figuras siguientes, que representan los conjuntos de partida de tres correspondencias:



***No es aplicación** porque tiene elementos de donde salen dos flechas.*

***No es aplicación** porque tiene elementos que no salen flechas.*

***Sí es aplicación** porque de cada elemento salen una flecha y solo una.*

1.5. Relaciones Binarias:

Recordemos que un "**par ordenado**" es un conjunto **binario** o conjunto de dos elementos ordenados según una cierta relación o correspondencia. Asi mismo, acabamos de conocer el producto cartesiano de conjuntos como un conjunto de pares ordenados.

Si entre los "**pares ordenados**" del producto cartesiano (A×B), buscamos aquellos que entre sus elementos exista una correspondencia según cierto criterio o condición formaremos un nuevo conjunto **R**, que llamaremos **Relación binaria** del conjunto A sobre el conjunto B.

Ejemplo: Si: $A = \{3; 4\} \wedge B = \{1; 2; 5; 6\}$

Hallar R (Relación binaria) de A en B para la condición o relación "**es menor que**".

Resolución:

En primer lugar hallamos: A×B

$$A \times B = \{3; 4\} \times \{1; 2; 5; 6\}$$

$$A \times B = \{(3; 1), (3; 2), \underline{(3; 5)}, \underline{(3; 6)}, (4; 1), (4; 2), \underline{(4; 5)}, \underline{(4; 6)}\}$$

Ahora buscamos los "**pares ordenados**" que cumplan con la condición o Relación "**es menor que**" es decir: "que el primer elemento sea menor que el segundo elemento", siendo estos: (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6).

Luego:

$R = \{\underline{(3; 5)}, \underline{(3; 6)}, \underline{(4; 5)}, \underline{(4; 6)}\}$; observamos que **R** es un subconjunto de **A×B**.

> ***Definición:***
>
> *Dados dos conjuntos A y B, llamaremos **Relación binaria** entre los elementos de ambos conjuntos, a un subconjunto **R** del producto cartesiano **A×B**.*

Simbólicamente se representa así:

$$R = \{(a; b) \in A \times B / a \in A \text{ y } b \in B; \text{ según } a \,\mathbf{R}\, b\}$$

Se lee: Conjunto R formado por los pares ordenados (a, b), pertenecientes al producto A×B, tal que $a \in A$ y $b \in B$, según una condición o Relación R de "a" con "b".

1.5.1. Dominio y Rango de una Relación Binaria:

* **Dominio de una Relación R:** Es el conjunto formado por todos los primeros elementos o componentes de los pares ordenados que pertenecen a R, se denota por $D_{(R)}$.

* **Rango de una Relación R:** Es el conjunto formado por todos los segundos elementos o componentes de los pares ordenados que pertenecen a R se denota por $R_{(R)}$.

Así en el ejemplo anterior, en la relación binaria R.

$$R = \{(3; 5), (3; 6), (4; 5), (4; 6)\}$$

El dominio de R, es: $D_{(R)} = \{3; 4\}$
El Ragno de R, es: $R_{(R)} = \{5; 6\}$

1.5.2. Imagen de una Relación R.

Cada uno de los elementos del Rango de R, que satisfacen a cada elemento del dominio, se llama **imagen**. Asi en el ejemplo; podemos afirmar que **5** es imagen de **3**, **6** es imagen de **3**, **5** es imagen de **4** y **6** es imagen de **4**.

También se puede decir:

3 es pre-imagen de **5**, **3** es pre-imagen de **6**, **4** es pre-imagen de **5** y **4** es pre-imagen de **6**.

1.5.3. Representación Gráfica de una Relación Binaria:

Puede hacerse de las siguientes formas:

a) El Diagrama Sagital   b) El Diagrama Cartesiano.

 **Diagrama Sagital para R.**

Ejemplo: Sea: $A = \{3; 5; 7\} \wedge B = \{2; 4; 6; 8\}$; hallar y graficar la relación R, definida por la condición: "a > b"

Resolución:

- En primer lugar, hallamos AxB.

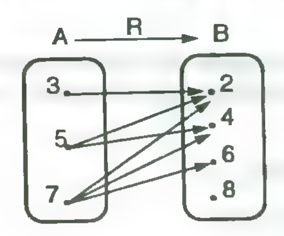
$A\times B = \{3; 5; 7\}\times\{2; 4; 6; 8\}$

$A\times B = \{\underline{(3; 2)}, (3; 4), (3; 6), (3; 8), \underline{(5; 2)}, \underline{(5; 4)}, (5; 6), (5; 8), \underline{(7; 2)}, \underline{(7; 4)}, \underline{(7; 6)}, (7; 8)\}$

Ahora, buscamos los pares que cumplan la condición: "a > b"; siendo estos:

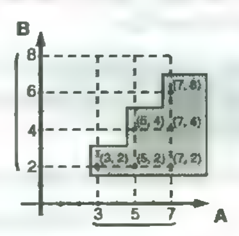
$$R = \{\underline{(3; 2)}, \underline{(5; 2)}, \underline{(5; 4)}, \underline{(7; 2)}, \underline{(7; 4)}, \underline{(7, 6)}\}$$

Los pares hallados los llevamos a un Diagrama Sagital así:



Dominio = $D_{(R)}$ = {3; 5; 7}
Rango = $R_{(R)}$ = {2; 4; 6}

 **Diagrama Cartesiano para R.**



$D_{(R)}$ = {3; 5; 7}

$R_{(R)}$ = {2; 4; 6}

1.5.4. Relación de A en A:

Entre los elementos de un mismo conjunto se puede establecer también una relación binaria R, llamada Relación R de A en A, o simplemente R en A.

Ejemplo: Sea el conjunto: A ={1; 3; 5} ; Hallar R de A en A; para "a = b"

Resolución:

En primer lugar, hallamos A×A

A×A = {1; 3; 5}×{1; 3; 5}

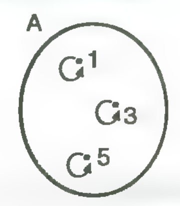
A×A = {(1; 1), (1; 3), (1; 5), (3; 1), (3; 3), (3; 5), (5; 1), (5; 3), (5; 5)}

Luego: R = {(1; 1), (3; 3), (5; 5)} ; aquí también: R ⊂ A×A.

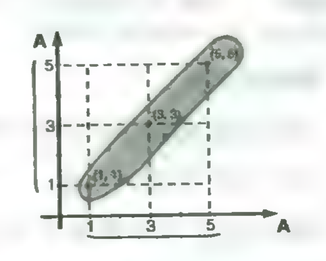
Los pares hallados los llevamos a un Diagrama Sagital y a un Diagrama Cartesiano, así:



* ***Diagrama Sagital***



Dominio = $D_{(R)}$ = {1; 3; 5}
Rango = $R_{(R)}$ = {1; 3; 5}



$D_{(R)}$ = {1; 3; 5}

$R_{(R)}$ = {1; 3; 5}

1.5.5. Relación Simétrica:

Una Relación R de A en A, se llama simétrica:

Si: $(a; b) \in R \longrightarrow (b; a) \in R$

Ejemplo: Del conjunto: $A = \{1; 2; 3; 5\}$

Se ha establecido una relación cuyos pares son:

$$R = \{(1; 5), (2; 3), (5; 1), (3; 2)\}$$

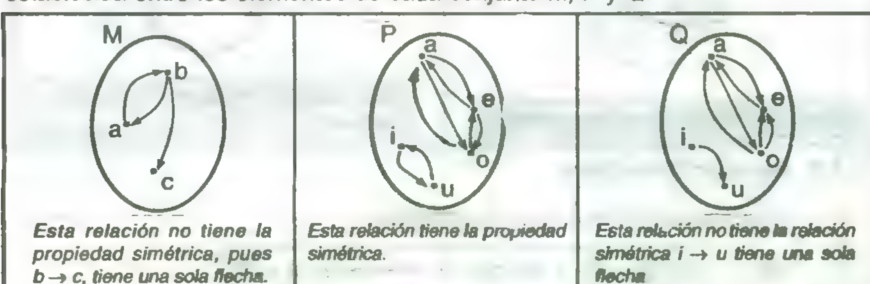
Esta relación es simétrica porque:

$$(1; 5) \in R \ \wedge \ (5; 1) \in R$$
$$(2; 3) \in R \ \wedge \ (3; 2) \in R$$

* ***Diagrama Sagital***	**Diagrama Cartesiano**
A: 1, 2, 3, 5	(1; 5), (2; 3), (3; 2), (5; 1) — ejes A: 1, 2, 3, 5

Una relación definida en un conjunto tiene la propiedad simétrica cuando en su Diagrama de flechas (Sagital) no hay ningún par de elementos que esté unido por una sola flecha.

Ejemplos: Observa los diagramas de flechas que representan la Relación establecida entre los elementos de cada conjunto M, P y Q.



Esta relación no tiene la propiedad simétrica, pues b → c, tiene una sola flecha.

Esta relación tiene la propiedad simétrica.

Esta relación no tiene la relación simétrica i → u tiene una sola flecha

1.5.6. Relación Reflexiva:

Una relación R de A en A es reflexiva cuando:

$\forall a \in A \longrightarrow (a; a) \in A$ (∀ se lee: para todo)

Ejemplo: Sea: A = {1; 5; 6} y la relación en A.

R = {(1; 1), (5; 1), (5; 5), (5; 6), (6; 6)}

Es reflexiva, pues:

$1 \in A \wedge (1; 1) \in R$
$5 \in A \wedge (5; 5) \in R$
$6 \in A \wedge (6; 6) \in R$

*** Diagrama Sagital***

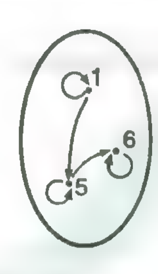
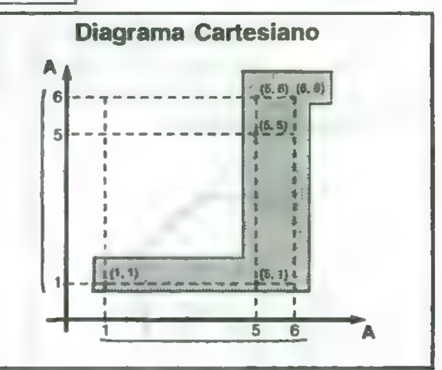
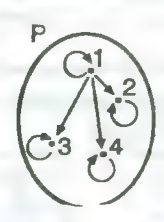


Diagrama Cartesiano



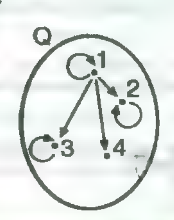
*Una relación en un conjunto tiene la **propiedad reflexiva** cuando en su diagrama de flecha (Sagital) todos los elementos tiene un lazo( )*

Ejemplo 1:



Esta relación tiene la propiedad reflexiva.

Ejemplo 2:



Esta relación no tiene la propiedad reflexiva.

1.5.7. Relación Transitiva:

Una relación R de A en A es transitiva:

Si: $(a; b) \in R \wedge (b; c) \in R \longrightarrow (a; c) \in R$

Ejemplo: Dada la relación:

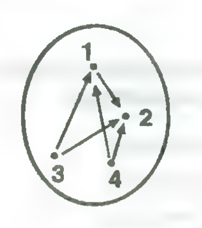
$$R = \{(1; 2), (3; 1), (3; 2), (4; 1), (4; 2)\}$$

Es transitiva pues:

i) $(3; 1) \in R \wedge (1; 2) \in R \longrightarrow (3; 2) \in R$

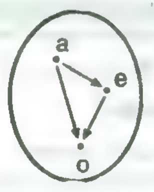
ii) $(4; 1) \in R \wedge (1; 2) \in R \longrightarrow (4; 2) \in R$

Diagrama Sagital:



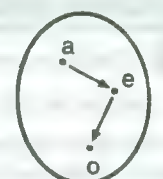
*Una relación tiene la **propiedad transitiva** cuando se cumple que si un elemento está relacionado con un segundo y éste está relacionado con un tercero, el primero estará relacionada con el tercero.*

Ejemplo 1:



Esta relación tiene la propiedad transitiva.

Ejemplo 2:



Esta relación no tiene la propiedad transitiva.

1.5.8. Relación de Equivalencia:

Una relación de R de A en A es de equivalencia, si cumple las tres condiciones siguientes:

1) $\forall a \in A \longrightarrow (a; a) \in A$ ***(Relación Reflexiva)***
2) Si: $(a; b) \in R \longrightarrow (b; a) \in R$ ***(Relación Simétrica)***
3) Si: $(a; b) \in R \longrightarrow (b; c) \in R \longrightarrow (a; c) \in R$ ***(Relación transitiva)***

Ejemplo: Dado el conjunto: $A = \{1; 2; 3\}$, y la relación: $R : A \longrightarrow A$:

$R = \{(1; 1), (2; 2), (1; 2), (2; 1), (3; 3)\}$; ¿Es relación de equivalencia?

Resolución:

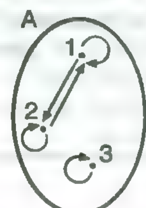
1) $1 \in A \wedge (1;1) \in R$
   $2 \in A \wedge (2,2) \in R$
   $3 \in A \wedge (3;3) \in R$
   } ***"R" es reflexiva***

2) $(1;2) \in A \wedge (2;1) \in R$
   $(1;1) \in A \wedge (1;1) \in R$
   } ***"R" es simétrica***

3) $(1;1) \in R \longrightarrow (1;2) \in R \longrightarrow (1;2) \in R$
   $(2;2) \in R \longrightarrow (2;1) \in R \longrightarrow (2;1) \in R$
   $(1;2) \in R \longrightarrow (2;1) \in R \longrightarrow (2;1) \in R$
   } ***"R" es transitiva***

Luego, "R" es una **relación de equivalencia.**

Diagrama Sagital:



Es una relación de equivalencia porque cumple con las tres condiciones:

- *Es una Relación Reflexiva*
- *Es una Relación Simétrica*
- *Es una Relación Transitiva*

Ejercicios Resueltos sobre Relaciones Binarias



Ejercicio 1: Dado los conjuntos: A = {1 ; 3 , 5 ; 7 ; 9} ∧ B = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}

Halla la relación de A en B, definida por la condición:

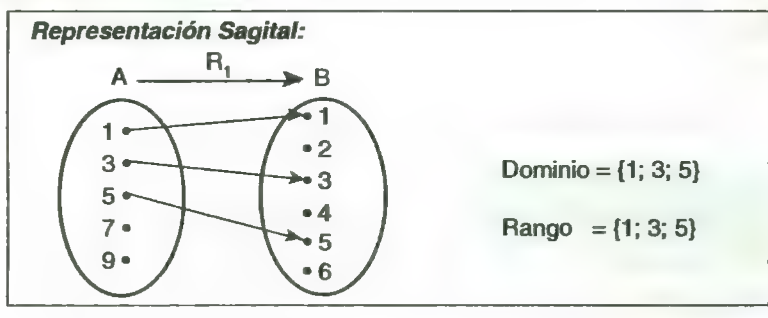
a) Primera componente es igual a la segunda componente.
b) Primera componente es menor que la segunda componente.
c) Segunda componente es el doble de la primera componente.

Resolución:

A \ B	1	2	3	4	5	6
1	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	(1; 6)
3	(3; 1)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(3; 5)	(3; 6)
5	(5; 1)	(5; 2)	(5; 3)	(5; 4)	(5; 5)	(5; 6)
7	(7; 1)	(7; 2)	(7; 3)	(7; 4)	(7; 5)	(7; 6)
9	(9; 1)	(9; 2)	(9; 3)	(9; 4)	(9; 5)	(9; 6)

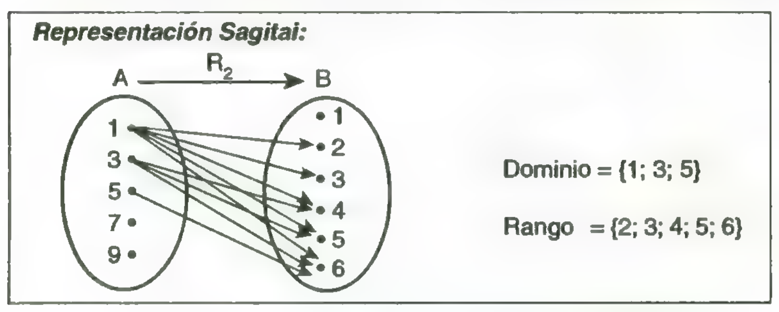
Luego, de la tabla, hallamos las relaciones pedidas:

a) $R_1 = \{(x, y) \in A \times B / x = y\} \Rightarrow$ $\boxed{R_1 = \{(1;1), (3;3), (5;5)\}}$

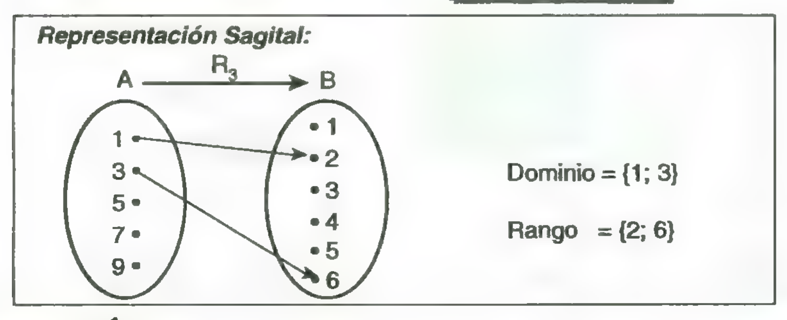


b) $R_2 = \{(x, y) \in A \times B / x < y\}$

$R_2 = \{(1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6), (3; 4), (3; 5), (3; 6), (5; 6)\}$



c) $R_3 = \{(x, y) \in A \times B / x = 2x\}$ $\Rightarrow$ $R_3 = \{(1; 2), (3; 6)\}$



Ejercicio 2 : Dado los conjuntos: $E = \{3 ; 5 ; 8\} \wedge F = \{2 ; 3 ; 4\}$; definimos la relación R_1 de la siguiente manera:

$$R_1 = \{(x ; y) \in E \times F / x > y\}$$

Esta notación nos indica que la relación está formada por pares ordenados, donde "x" es elemento del conjunto E e "y" es elemento del conjunto "F", tal que "x es mayor que y", hallar su dominio y rango.

Resolución:

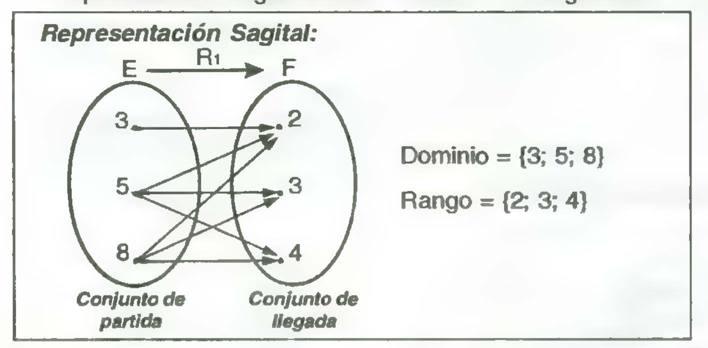
En este caso:

- El conjunto de partida de la relación R_1 es E = {3; 5; 8}

- El conjunto de llegada de la relación R_1 es F = {2; 3; 4}

* La regla de correspondencia es "....... **es mayor que** ...."

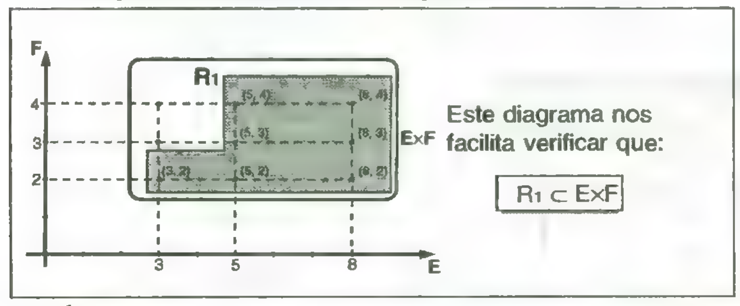
La representacion sagital de esta relación es la siguiente:



Representación mediante, pares ordenados de R_1

$$R_1 = \{(3; 2), (5; 2), (5; 3), (5; 4), (8; 2), (8; 3), (8; 4)\}$$

El diagrama cartesiano R_1 es el siguiente:



Ejercicio 3: Representar la relación siguiente, como un conjunto de pares ordenados.

Si: $P = \{2x / 4 \leq x < 9 \,;\, x \in \mathbb{N}\} \wedge Q = \{2x - 1 / 1 < x \leq 4 \,;\, x \in \mathbb{N}\}$

Entonces: $R_2 = \{(x; y) \in P \times Q / \ y = \frac{x}{2}\}$

Hallar la dominio y su rango.

Resolución:

Del conjunto P:

$P = \{2x / \underbrace{4 \leq x < 9}; x \in \mathbb{N}\}$

Los valores que toma "x" son: 4; 5; 6; 7; 8

Luego remplazamos los valores de "x" en la expresión 2x para saber cuales son los elemementos de conjunto P, veamos:

$$\left.\begin{array}{lll} \textit{Para: } x=4 & \Rightarrow & 2x = 2(4) = 8 \\ \textit{Para: } x=5 & \Rightarrow & 2x = 2(5) = 10 \\ \textit{Para: } x=6 & \Rightarrow & 2x = 2(6) = 12 \\ \textit{Para: } x=7 & \Rightarrow & 2x = 2(7) = 14 \\ \textit{Para: } x=8 & \Rightarrow & 2x = 2(8) = 16 \end{array}\right\} \therefore \boxed{P = \{8; 10; 12; 14; 16\}}$$

Del conjunto Q:

$Q = \{2x - 1 / \underbrace{1 < x \leq 4}; x \in \mathbb{N}\}$

Los valores que toma "x" son: 2; 3; 4

Luego reemplazamos los valores de "x" en la expresión **2x - 1** ; para saber cuales con los elementos del conjunto Q. veamos:

$$\left.\begin{array}{lll} \textit{Para: } x=2 & \Rightarrow & 2x - 1 = 2(2) - 1 = 3 \\ \textit{Para: } x=3 & \Rightarrow & 2x - 1 = 2(3) - 1 = 5 \\ \textit{Para: } x=4 & \Rightarrow & 2x - 1 = 2(4) - 1 = 7 \end{array}\right\} \therefore \boxed{P = \{3; 5; 7\}}$$

En esta relación:

- El conjunto de partida es: P = {8; 10; 12; 14; 16}
- El conjunto de llegada es: Q = {3; 5; 7}
- La regla de correspondencia establece que: "la segunda componente de cada par ordenado es igual a la mitad de la primera componente".

$\boxed{y = \frac{x}{2}}$; para determinar los pares ordenados de R_2 seleccionamos los elementos "x de P" é "y de Q" que cumple con la regla de correspondencia: y= x/2 esta selección se efectua por el proceso denominado **TABULACION**.

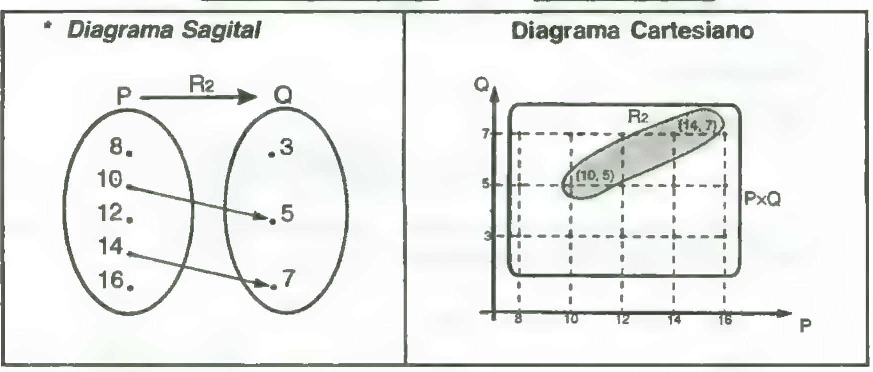
x	y = x/2	
8	y = 8/2 = 4	➪ (8; 4) $\notin$ R_2 ; porque: 4 $\notin$ Q
10	y = 10/2 = 5	➪ (10; 5) $\in$ R_2
12	y = 12/2 = 6	➪ (12; 6) $\notin$ R_2 ; porque: 6 $\notin$ Q
14	y = 14/2 = 7	➪ (14; 7) $\in$ R_2
16	y = 16/2 = 8	➪ (16; 8) $\notin$ R_2 ; porque: 8 $\notin$ Q

En consecuencia:

R_2 = {(10; 5), (14; 7)}

Donde:

Dominio = {10; 14} **Rango = {5; 7}**



Ejercicio 4: Dado los conjuntos:

$$A = \{2 - x \;/\; -1 \leq x < 2 \;;\; x \in \mathbb{Z}\} \;\wedge\; B = \{2x + 1 \;/\; -3 < x \leq 1 \;;\; x \in \mathbb{Z}\}$$

Definimos la relación R_3 ; como: $R_3 = \{(x, y) \in A \times B / \; y = 2x - 5\}$

Representar R_3 como un conjunto de pares ordenados.

Hallar su dominio y su rango.

Resolución:

Del conjunto A:

$A = \{2 - x \;/\; \underbrace{-1 \leq x < 2}\;;\; x \in \mathbb{Z}\}$

Los valores que toma "x" son: -1; 0; 1

Luego remplazamos los valores de "x" en la expresión: **2 - x** para saber cuales son los elementos del conjunto A.

Para: $x = -1 \Rightarrow 2 - x = 2 - (-1) = 3$
Para: $x = 0 \Rightarrow 2 - x = 2 - (0) = 2$
Para: $x = 1 \Rightarrow 2 - x = 2 - (1) = 1$

$\therefore$ $A = \{1; 2; 3\}$

Del conjunto B:

$B = \{2x + 1 / \underbrace{-3 < x \leq 1}; x \in \mathbb{Z}\}$

Los valores que toma "x" son: -2; -1; 0; 1

Luego, reemplazamos los valores de "x" en la expresión: 2x + 1, para saber cuáles son los elementos del conjunto B.

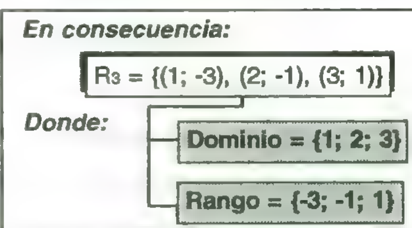
Para: $x = -2 \Rightarrow 2x + 1 = 2(-2) + 1 = -3$
Para: $x = -1 \Rightarrow 2x + 1 = 2(-1) + 1 = -1$
Para: $x = 0 \Rightarrow 2x + 1 = 2(0) + 1 = 1$
Para: $x = 1 \Rightarrow 2x + 1 = 2(1) + 1 = 3$

$\therefore$ $B = \{-3; -1; 1; 3\}$

En esta relación:

- El conjunto de partida es: A = {1; 2; 3}
- El conjunto de llegada es: B = {-3; -1; 1; 3}
- La regla de correspondencia y = 2x - 5, La encontramos mediante una **tabulación**:

x	y = 2x - 5	
1	y = 2(1) - 5 = -3	⇨ $(1; -3) \in R_3$
2	y = 2(2) - 5 = -1	⇨ $(2; -1) \in R_3$
3	y = 2(3) - 5 = 1	⇨ $(3; 1) \in R_3$


En consecuencia:

$R_3 = \{(1; -3), (2; -1), (3; 1)\}$

Donde:

Dominio = {1; 2; 3}

Rango = {-3; -1; 1}

Diagrama Cartesiano

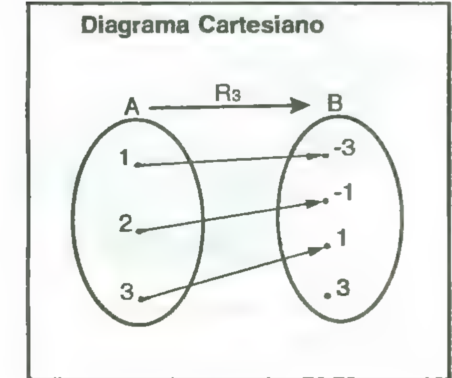
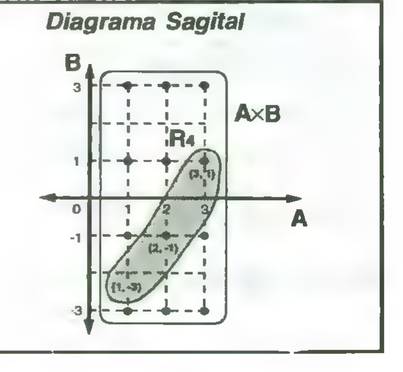


Diagrama Sagital



Ejercicio 5: Dado el conjunto: $A = \{x^2 - 1 / -2 \leq x < 3 ; x \in Z\}$; definimos R_4

$$R_4 = \{(x , y) \in A \times IN / y = x^2 + 3\}$$

Representar R4 como un conjunto de pares ordenados.

Hallar su dominio y su rango.

Resolución:

Del conjunto A:

$A = \{x^2 - 1 / -2 \leq x < 3 ; x \in Z\}$

Los valores que toma "x" son: -2; -1; 0; 1; 2

Luego remplazamos los valores de "x" en la expresión: $x^2 - 1$, para saber cuales son los elementos del conjunto A. Veamos:

Para: $x = -2 \Rightarrow x^2 - 1 = (-2)^2 - 1 = 3$
Para: $x = -1 \Rightarrow x^2 - 1 = (-1)^2 - 1 = 0$
Para: $x = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = (0)^2 - 1 = -1$
Para: $x = 1 \Rightarrow x^2 - 1 = (1)^2 - 1 = 0$
Para: $x = 2 \Rightarrow x^2 - 1 = (2)^2 - 1 = 3$

$\therefore$ $A = \{-1; 0; 3\}$

Del conjunto:

$\mathbb{N}$ = {Números Naturales} $\Rightarrow$ $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; ....\}$

En esta expresión:

- El conjunto de partida es: $A = \{-1; 0; 3\}$
- El conjunto de llegada es: $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; ....\}$
- La regla de correspondencia: $y = x^2 + 3$, la encontramos mediante una **tabulación:**

x	$y = x^2 + 3$	
-1	$y = (-1)^2 + 3 = 4$	⇨ $(-1; 4) \in R_4$
0	$y = (0)^2 + 3 = 3$	⇨ $(0; 3) \in R_4$
3	$y = (3)^2 + 3 = 12$	⇨ $(3; 12) \in R_4$

En consecuencia:

$R_4 = \{(-1; 4), (0; 3), (3; 12)\}$

Donde:

Dominio = {-1; 0; 3}

Rango = {4; 3; 12}

Ejercicio 6: Siendo: $E = \{2 - x^2 / -3 < x \leq 3 ; x \in Z\}$; definimos R_5 como:

$$R_5 = \{(x , y) \in E \times Z / y = 2x - 3\}$$

Representar R_5 como un conjunto de pares ordenados.

Hallar su dominio y su rango.

Resolución:

Del conjunto E:

$E = \{2 - x^2 \,/\, -3 < x \leq 3 \,;\, x \in \mathbb{Z}\}$

Los valores que toma "x" son: -2; -1; 0; 1; 2; 3

Luego reemplazamos los valores de "x" en la expreesión: $\mathbf{2 - x^2}$, para saber cuales son los elementos del conjunto E, veamos:

Para: $x = -2 \Rightarrow 2 - x^2 = 2 - (-2)^2 = -2$

Para: $x = -1 \Rightarrow 2 - x^2 = 2 - (-1)^2 = 1$

Para: $x = 0 \Rightarrow 2 - x^2 = 2 - (0)^2 = 2$

Para: $x = 1 \Rightarrow 2 - x^2 = 2 - (1)^2 = 1$

Para: $x = 2 \Rightarrow 2 - x^2 = 2 - (2)^2 = -2$

Para: $x = 3 \Rightarrow 2 - x^2 = 2 - (3)^2 = -7$

$\therefore$ $E = \{-7; -2; 1, 2\}$

Del conjunto:

$\mathbb{Z}$ = {Números Enteros} $\Rightarrow$ $\mathbb{Z}$ = {........., -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ....}

En esta relación:

- El conjunto de partida es: $E = \{-7; -2; 1; 2\}$

- El conjunto de llegada es: $\mathbb{Z}$ = {........, -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3;.........}

-La regla de correspondencia: $y = 2x - 3$, la encontramos por **tabulación:**

x	y = 2x - 3	
-7	$y = 2(-7) - 3 = -17$	➪ $(-7; -17) \in R_5$
-2	$y = 2(-2) - 3 = -7$	➪ $(-2; -7) \in R_5$
1	$y = 2(1) - 3 = -1$	➪ $(1; -1) \in R_5$
2	$y = 2(2) - 3 = 1$	➪ $(2; 1) \in R_5$

En consecuencia:

$R_5 = \{(-7; -17), (-2; -7), (1; -1), (2; 1)\}$

Donde:

Dominio = {-7; -2; 1; 2}

Rango = {-17; -7; -1; 1}



TALLER DE EJERCICIOS Nº 2

Ejercicio 1 : Dados los conjuntos:
$A = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\} \wedge B = \{2 ; 4 ; 6 ; 8\}$
Hallar la relación de A en B definida por la condición: primera componente es menor que la segunda componente.

Resolución:

Ejercicio 2 : Dados los conjuntos:
$P = \{2 ; 3 ; 5 ; 7\} \wedge Q = \{4 ; 5 ; 6\}$
Hallar la relación de P en Q definida por la condición: primera componente es mayor que la segunda componente.

Resolución:

Ejercicio 3 : Dados los conjuntos:
$A = \{2 ; 4 ; 6\} \wedge B = \{3 ; 5 ; 8\}$; definimos la relación R_1 de la siguiente manera:

$$R_1 = \{(x ; y) \in A \times B / x < y\}$$

Esta notación nos indica que la relación está formado por pares ordenados donde "x" es elemento del conjunto A, e "y" es elemento del conjunto B tal que "x" es menor que "y".

Resolución:

Ejercicio 4 : Dados los conjuntos:
$A = \{3 ; 5 ; 7 ; 9\} \wedge B = \{1 ; 2 ; 4 ; 6\}$; definimos la relación R_2 de la siguiente manera:

$$R_2 = \{(x ; y) \in A \times B / x + y > 4\}$$

Esta notación nos indica que la relación está formado por pares ordenados donde "x" es elemento del conjunto A, e "y" es elemento del conjunto B tal que "x" más "y" es mayor que 4.

Resolución:

Ejercicio 5 : Dado: $A = \{1 ; 3 ; 4 ; 5\} \wedge B = \{2 ; 6 ; 8\}$ y la relación:

$$R = \{(x ; y) \in A \times B / x + y \geq 6\}$$

¿Cuántos pares ordenados satisfacen la relación R?

Nota: $\overset{o}{3}$ significa "múltiplos de 3"

Resolución:

Ejercicio 6 : Dado: $P = \{2 ; 4 ; 6 , 8\} \wedge Q = \{4 ; 6 ; 8 ; 10\}$ y la relación

$$R = \{(x ; y) \in P \times Q / x + y = \overset{o}{3}\}$$

¿Cuántos pares ordenados satisfacen la relación R?

Resolución:

Ejercicio 7 : Dados los conjuntos: $M = \{1 ; 3 ; 6 ; 7\} \wedge N = \{4 , 5 ; 6\}$; definimos la relación R_3 de la siguiente manera:

$$R_3 = \{(x ; y) \in M \times N / x > y\}$$

Esta notación nos indica que la relación está formado por pares ordenados donde "x" es elemento del conjunto M, e "y" es elemento del conjunto N tal que "x es mayor que y".

a) Hallar su dominio y su rango.

b) Representar gráficamente.

Resolución:

Ejercicio 8 : Representar la relación siguiente como un conjunto de pares ordenados si:

$S = \{2x/3 \leq x < 7; x \in \mathbb{N}\} \wedge$
$T = \{3x - 1/4 \ < x \leq 6; x \in \mathbb{N}\}$

Entonces: $R = \{(x ; y) \in S \times T / y = x + 2\}$

a) Hallar su dominio y su rango

b) Representar gráficamente

Resolución:



EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE RELACIONES BINARIAS



NIVEL I

Ejercicio 1 : Dado los conjuntos:
A = {3 ; 7 , 9 ; 11} ∧ B = {1 ; 5 ; 6 ; 10}.
Hallar la relación de A en B definida por la condición:

a) Primera componente es menor que la segunda componente
b) Primera componente es mayor que la segunda componente
c) Segunda componente es la tercera parte de la primera componente

Ejercicio 2 : Dado los conjuntos:
P = {1 ; 3 ; 5} ∧ Q = {2 ; 3 ; 6}, definimos la relación R_1 de la siguiente manera:

$$R_1 = \{(x ; y) \in P \times Q / x < y\}$$

Esta notación nos indica que la relación está formado por pares ordenados donde "x" es elemento de conjunto P, e "y" es elemento del conjunto Q tal que "x es menor que y".

- Hallar su dominio y su rango.
- Representar gráficamente

Ejercicio 3 : Dado los conjuntos:
A = {2 ; 4 ; 5} ∧ B = {1 ; 3 ; 4}, definimos la relación R_2 de la siguiente manera:

$$R_2 = \{(x ; y) \in A \times B / x > y\}$$

Esta notación nos indica que la relación está formado por pares ordenados donde "x" es elemento de conjunto A, e "y" es elemento del conjunto B tal que "x es mayor que y".

- Hallar su dominio y su rango.
- Representar gráficamente.

Ejercicio 4 : Dado los conjuntos:
P = {1 ; 4 ; 6 ; 8} ∧ Q = {2 ; 3 ; 4}; definimos la relación R_3 de la siguiente manera:

$$R_3 = \{(x ; y) \in P \times Q / x = 2y\}$$

Esta notación nos indica que la relación está formado por pares ordenados donde "x" es elemento de conjunto P, e "y" es elemento del conjunto Q tal que "x es el doble de y".

- Hallar su dominio y su rango
- Representar gráficamente

Ejecicio 5 : Dado los conjuntos:
C = {1 ; 2 ; 3 ; 4} ∧ D = {2 ; 4 , 5 ; 8}; definimos la relación R_4 de la siguiente manera:

$$R_4 = \{(x ; y) \in C \times D / x = y/2\}$$

Esta notación nos indica que la relación está formado por pares ordenados donde "x" es elemento de conjunto C, e "y" es elemento del conjunto D tal que "x es la mitad de y".

- Hallar su dominio y su rango
- Representar gráficamente

Ejercicio 6 : Representar la relación siguiente, como un conjunto de pares ordenados si:

S = {3x /2 ≤ x < 6 ; x ∈ IN} y
T = {3x - 2/2 < x ≤ 5 ; x ∈ IN}

Entonces: $R_2 = \{(x ; y) \in S \times T / y = x + 1\}$

- Hallar su dominio y su rango
- Representar gráficamente

Ejercicio 7 : Dados los conjuntos:
$A = \{3 - x / -1 \leq x < 3 ; x \in Z\}$ y
$B = \{2x + 3 / -2 < x \leq 3 ; x \in Z\}$

Definimos la relación R_3 como:
$R_3 = \{(x ; y) \in A \times B / y = 3x - 2\}$; representar R_3 como un conjunto de pares.

- Hallar su dominio y su rango
- Representar gráficamente

Clave de Respuestas

1. a) $R = \{(3;5), (3;6), (3;10), (7;10)\ (9;10)\}$
   b) $R = \{(3 ; 1), (7 ; 1), (7 ; 5), (7 ; 6), (9 ; 1), (9 ; 5), (9 ; 6), (11 ; 1), (11 ; 5), (11 ; 6), (11 ; 10)\}$
   c) $R = \{(3 ; 1)\}$

2. $R_1 = \{(1 ; 2), (1 ; 3), (1 ; 6), (3 ; 6), (5 ; 6)\}$ Dom $(R_1) = \{1 ; 3 ; 5\}$ Ran $(R_1) = \{2 ; 3 ; 6\}$

3. $R_2 = \{(2 ; 1), (4 ; 1), (4 ; 3), (5 ; 1), (5 ; 3)\}$ Dom $(R_2) = \{2 ; 4 ; 5\}$ Ran $(R_2) = \{1 ; 3\}$

4. $R_3 = \{(4; 2), (6 ; 3), (8 ; 4)\}$
   Dom $(R_3) = \{4 ; 6 ; 8\}$
   Ran $(R_3) = \{2 ; 3 ; 4\}$

5. $R_4 = \{(1 ; 2), (2 ; 4), (4 ; 8)\}$
   Dom $(R_4) = \{1 ; 2 ; 4\}$
   Ran $(R_4) = \{2 ; 4 ; 8\}$

6. $R_2 = \{(6 ; 7), (9 ; 10), (12 ; 13)\}$
   Dom $(R_2) = \{6 ; 9 ; 12\}$
   Ran $(R_2) = \{7 ; 10 ; 13\}$

7. $R_3 = \{(1 ; 1), (3 ; 7)\}$
   Dom $(R_3) = \{1 ; 3\}$
   Ran $(R_3) = \{1 ; 7\}$

NIVEL II

Ejercicio 1 : Dados elconjunto:

$$G = \{x^2 - 3 / -3 \leq x < 2 ; x \in Z\}$$

Definimos R_4:

$$R_4 = \{(x ; y) \in G \times IN / y = x^2 + 1\}$$

Representar R_4 como un conjunto de pares ordenados.
Hallar su dominio y su rango.

Ejercicio 2 : Siendo:

$$E = \{3 - x^2 / -2 < x \leq 4; x \in Z\}$$

Definimos R_5 como:

$$R_5 = \{(x, y) \in E \times Z / y = 3x - 1\}$$

Representar R^5 como un conjunto de pares ordenados.

- Hallar su dominio y su rango.
- Representar gráficamente

Ejercicio 3 : Dado: $A = \{2 ; 4 ; 6 ; 8\}$ y las relaciones en A:

$R_1 = \{(2 ; 4), (6 ; 4), (4 ; 6), (4 ; 2)\}$
$R_2 = \{(2 ; 2), (4 ; 4), (6 ; 6), (8 ; 8)\}$
$R_3 = \{(4 ; 2), (2 ; 6), (4 ; 6)\}$
$R_4 = \{(4 ; 2), (2 ; 8), (4 ; 8), (2 ; 6), (6 ; 4)\}$

Decide cuál es reflexima, cuál es simétrica y cuál es transitiva.

Construye el diagrama sagital y el diagrama cartesiano para cada relación.

Ejercicio 4: Dado: $A = \{3 ; 4 ; 5 ; 6\} \wedge B = \{4 ; 6 ; 8\}$ y la relación:

$$R = \{(x ; y) \in A \times B / x + y \geq 11\}$$

¿Cuántos pares ordenados satisfacen la relación R?

Ejercicio 5: Dado los conjuntos: $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\} \wedge F = \{1 ; 4 ; 6 ; 9\}$ y la relación: $R = \{(x ; y) \in E \times F / y = x^2\}$

¿Cuántos pares ordenados satisfacen la relación R?

Ejercicio 6: Si tenemos el siguiente cuadro de doble entrada:

A \ B	1	2	3	4	5
1	(;)				
2			(;)		
3		(;)			
4				(;)	
5					(;)

¿Cuál de las siguientes relaciones corresponde a este cuadro?

a) {(5 ; 5) , (4 ; 5) , (2 ; 3) , (3 ; 2) , (1 ; 2)}

b) {(1 ; 1) , (2 ; 3) , (5 ; 5) , (2 ; 3) , (4 ; 4)}

c) {(1 ; 2) , (2 ; 3) , (3 ; 2) , (4 ; 4) , (5 ; 5)}

d) {(1 ; 1) , (5 ; 5) , (4 ; 4) , (4 ; 3) , (4 ; 1)}

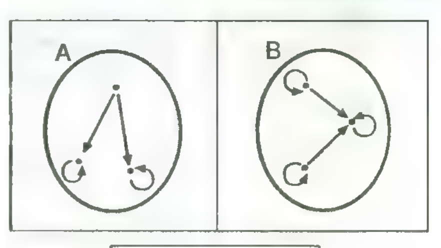
Ejercicio 7: La relación:

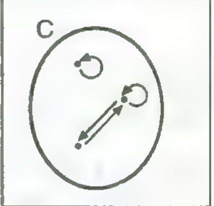
R = {(3 ; 6) , (6 ; 3) , (6 ; 9) , (9 ; 6)}; definida en el conjunto: A = {3 ; 6 ; 9}, ¿Será simétrica?

Ejercicio 8: La relación:

R = {(2 ; 4) , (4 ; 2) , (2 ; 6)}; definida en el conjunto: A = {2 ; 4 ; 6}, ¿Será simétrica?

Ejercicio 9: ¿Cuál de estos diagramas de flechas representa una relación que tiene la propiedad reflexiva?





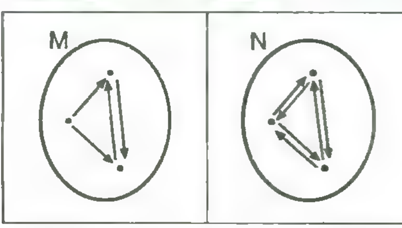
Ejercicio 10: Tenemos el conjunto: M = {1 ; 2 ; 3 ; 4}; se ha establecido una relación cuyos pares son:

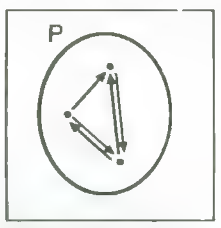
{(1 ; 1) , (1 ; 2), (2 ; 2), (2 ; 4) , (3 ; 3) , (3 ; 1) , (3 ; 4), (4 ; 1)}

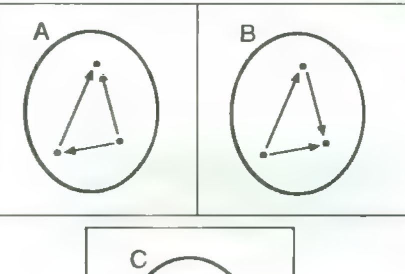
i) Confecciona el diagrama de flechas de esa relación

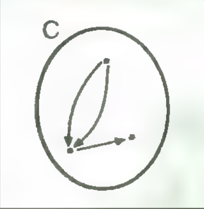
ii) Cuáles de estos pares son los que indican que dicha relación tiene la propiedad reflexiva.

Ejercicio 11: ¿Cuál de estas relaciones tiene propiedad simétrica?









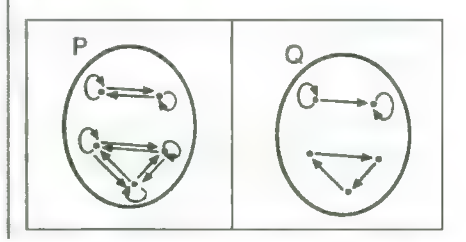
Ejercicio 12: Tenemos el conjunto: T = {a ; b ; c ; d}; se ha establecido una relación cuyos pares son:

{(a ; c) , (c ; a) , (b ; d) , (d ; b) , (b ; c)}

i) Confecciona su diagrama de flechas.
ii) ¿Tiene esta relación la propiedad simétrica? ¿por qué?

Ejercicio 13: ¿Cuál de estas relaciones tiene la propiedad transitiva?

Ejercicio 14: ¿Cuál de estos diagramas de flechas representa una relación de equivalencia?



Clave de Respuestas

1. R_4 = {(1 ; 2) , (-2 ; 5) , (-3 ; 10) , (6 ; 37)} Dom (R_4) = {-2 ; -3 ; 1 ; 6}
Ran (R_4) = {2 ; 5 ; 10 ; 37}

2. R_5 = {(-1 ; -4) , (-6 ; -19) , (-13 ; -40) , (2 ; 5) , (3 ; 8)} Dom (R_5) = {-13 ; -6 ; -1 ; 2 ; 3}
Ran (R_5) = {-40; -19 ; -4 ; 8 ; 5}

3. R_1 = {Simétrica; R_2 = Reflexiva ; R_3 = Transitiva y R_4 = Transitiva

4. 6 **5.** 3 **6.** c



¿SABÍAS QUE...

... a veces nos resulta mejor escribir el número que la palabra?

Por ejemplo: 31 es más fácil expresarlo numéricamente, que decir treinta y uno.

Sin embargo, debemos estar agradecidos, porque para decir treinta y uno los indios cunas de Panamá usan esta palabra:

Tulquencacambeguicacaquensac



NÚMEROS REALES

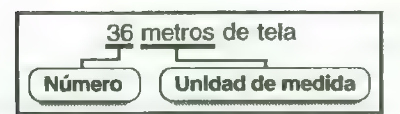
Objetivos:

Conocer y efectuar operaciones con números reales y usar sus propiedades y técnicas en la solución de problemas, como extensión de las propiedades de los números racionales y con aproximaciones a estos.

2.1. Introducción:

Desde la más remota antiguedad los hombres, manejaron los números:

- Para indicar el número de objetos de un conjunto (**contar, ordenar**).
- Como resultado de una media (**medir**). Toda medida de una cantidad viene dada por un número y la unidad empleada. Por ejemplo:





Ya desde un principio los conceptos de medir (**Geométria**) y de contar (**Aritmética**) han sido fuentes de desarrollo comunes y raices sobre las que ha crecido toda la matemática.

Para medir la longitud de un objeto se aplica a éste una cierta unidad de longitud y se calcula cuantas veces contiene dicha longitud a la unidad tomada. Pero en este proceso de medida puede ocurrir:

1º Que la longitud a medir contenga un número exacto de veces a la unidad. Entonces el resultado viene expresado sólo por un **número natural**. Así, decimos que una calle mide 528 m, esta medida se dice que es **conmensurable.**

2º Si estando en un punto determinado nos dicen que nos traslademos 20m surge la duda de **¿hacia dónde debemos movernos?** Duda que se resuelve al darnos un sentido y una dirección (20 m hacia el Sur) y matemáticamente, los expresamos con el signo -20. Entendiendo que +20 significará caminar 20 m en dirección Norte. Así surgen **los números enteros** que son una primera ampliación de los **números naturales**. Las medidas cuyo resultado viene expresado por un número entero se dicen también conmensurables, ya que únicamente se ha introducido una dirección en la medida.

3º Generalmente en el proceso de medir ocurre que la unidad elegida no está contenida en un número entero de veces en la cantidad a medir. Surge la necesidad de fraccionar la unidad para poder expresar la medida con mayor exactitud. Asi empleamos los **números fraccionarios** (números racionales), como una extensión del concepto de número entero. Decimos que una habitación tiene una longitud de 6 1/4 m. Estas medidas siguen siendo **conmensurables**, aunque en este caso no basta la unidad sino que deben tomarse partes de dicha unidad (**fracciones**).

4º Al medir una cantidad podemos encontrarnos con que su magnitud puede expresarse por:

* **Un número entero** a veces no dando exacto, si sobraba una pequeña parte se desechaba. Asi surgen los conceptos de error absoluto y error relativo.

* **Un número fraccionario (racional).** También ocurre que al dividir se llegaba a partes muy pequeñas que se desechaban. No llegaban a una precisión total en la medida (error absoluto).

* En este estudio surgen medidas **inconmensurables**, así la diagonal de un cuadrado es **inconmensurable** con su lado, osea el cociente de los dos no puede expresarse como fracción, osea cociente de dos números enteros (no es un número racional). Surgen asi unos nuevos números, a los que llamaremos **irracionales** y que sirven para expresar esas medidas **inconmensurables.**

Al intentar expresar esas medidas **inconmensurables** por medio de números se obtiene una nueva generalización del concepto de número, surgen los **números Irracionales**. Y el nuevo conjunto que engloba a los racionales e irracionales lo llamaremos conjunto de los **números reales,** $\mathbb{R}$.

¡Atención!

- **Conmensurable:** Que puede medirse.
- **Inconmensurable:** Que no puede medirse.

2.2. Sucesivas Ampliaciones del Concepto de Número

2.2.1. Número Natural:

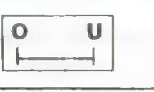
Al considerar lo que tiene en común todos los conjuntos coordinables surge el concepto de **número natural.**

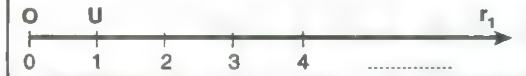
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

Admitimos el cero como cardinal del conjunto vacio.

> **Recuerda que:**
>
> • ***Conjunto Coordinables:***
>
> *Para que un conjunto sea coordinable con otro, ambos tienen que tener el mismo número de elementos, es decir que su correspondencia tiene que ser **Biunívoca,** o correspondencia uno a uno.*
>
> | A | B |
> |---|---|
> | a | 1 |
> | b | 2 |
> | c | 3 |
> | d | 4 |

* Para representar los números naturales basta tomar una semirecta $\mathbf{r_1}$ y el origen **O** de la semirecta que representa el número cero. A continuación se toma un segmento $\overline{\mathbf{OU}}$ como unidad de longitud y se lleva sucesivamente hacia la derecha. Los puntos de división representan los números naturales.





Hemos establecido asi una **aplicación** entre el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales y los puntos de una semirecta r_1. El número que corresponde a una división se llama **abscisa** de dicho punto. Esta aplicación es **inyectiva,** ya que a cada número le corresponde un punto y sólo uno, pero hay puntos que no tienen su preimagen en $\mathbb{N}$.

2.2.1.1. Operaciones con Números Naturales



La Adición; es una operación cerrada en $\mathbb{N}$. Esto quiere decir que "La suma de dos números naturales es un número natural".

> ***Ejemplos:***
>
> **a).** $3 + 2 = 5$; si : $3 \in \mathbb{N}$; $2 \in \mathbb{N} \Rightarrow 5 \in \mathbb{N}$
>
> **b).** $9 + 8 = 17$; si : $9 \in \mathbb{N}$; $8 \in \mathbb{N} \Rightarrow 17 \in \mathbb{N}$

B. **La Multiplicación;** es una operación cerrada en $\mathbb{N}$; pues quiere decir que: "El producto de dos números naturales es un número natural".

> ***Ejemplos:***
>
> **a).** $9{\times}2 = 18$; si : $9 \in \mathbb{N}$; $2 \in \mathbb{N} \Rightarrow 18 \in \mathbb{N}$
>
> **b).** $5{\times}6 = 30$; si : $5 \in \mathbb{N}$; $6 \in \mathbb{N} \Rightarrow 30 \in \mathbb{N}$

C. **La Potenciación;** es una operación cerrada en $\mathbb{N}$; pues quiere decir que: "Un número natural, elevado a un exponente natural resulta otro número natural".

> ***Ejemplos:***
>
> a). $(3)^2 = 9$; si : $3 \in \mathbb{N}$; $2 \in \mathbb{N} \Rightarrow 9 \in \mathbb{N}$
>
> b). $(4)^3 = 64$; si : $4 \in \mathbb{N}$; $3 \in \mathbb{N} \Rightarrow 64 \in \mathbb{N}$

D. **La Sustracción, la División y la Radiación;** no son operaciones cerradas en $\mathbb{N}$, pues quiere decir que: "La diferencia de dos números naturales, no siempre es un número natural".

"El cociente de dos números naturales, no siempre es un número natural".

"La raiz de un número natural, no siempre es un número natural".

Ejemplos:

> a). $3 - 5 = -2$; si : $3 \in \mathbb{N}$; $5 \in \mathbb{N} \Rightarrow -2 \notin \mathbb{N}$
>
> b). $9 : 4 = 2{,}25$; si : $9 \in \mathbb{N}$; $4 \in \mathbb{N} \Rightarrow 2{,}25 \notin \mathbb{N}$
>
> c). $\sqrt{3} = \sqrt[2]{3} = 1{,}7320508.....$; si : $2 \in \mathbb{N}$; $3 \in \mathbb{N} \Rightarrow 1{,}7320508... \notin \mathbb{N}$

Propiedades de $\mathbb{N}$.

1. El conjunto de números naturales es infinito.
2. Tiene primer elemento: **Cero.** No tiene último elemento.
3. Todo número natural tiene un **sucesor.** Un número natural y su sucesor se dicen **consecutivos.**

Ejemplo: 5 es el sucesor de 4 $\Rightarrow$ 4 y 5 son **consecutivos.**

4. Todo número, excepto cero, tiene un **antecesor.**
5. Entre dos números naturales existe siempre un número finito de números naturales. Por eso decimos que el conjunto de números naturales es **discreto.**

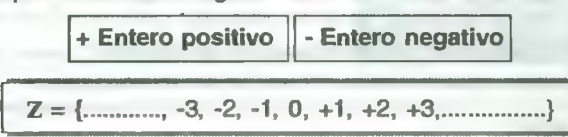
Por ejemplo:

Entre 2 y 3 existe **0** números naturales.
Entre 2 y 4 existe **1** números naturales.
Entre 2 y 5 existe **2** números naturales.
Entre 4 y 13 existe **8** números naturales.

2.2.2. Número Entero:

Surgen como respuesta al intentar dar medidas negativas y es una ampliación de los números naturales que hacen posible la sustracción en todos los casos.

Los números enteros, salvo el cero, se representan mediante los números naturales precedido de un signo.



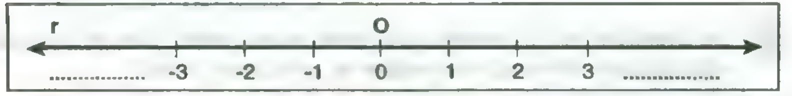
* Para representar los números enteros basta tomar una recta r y un punto **O** como origen que represente el número entero cero.

a) Elijamos un segmento $\overline{OU}$ como unidad de longitudes, y llevémoslo sucesivamente hacia la derecha. Los puntos de división representan los enteros positivos, por tanto, el conjunto de los enteros engloba a los números naturales.

O U



b) Llevémoslo también hacia la izquierda. Los puntos de división representan los enteros negativos, y junto con los enteros positivos representa todos los números enteros. Por tanto:



Esto equivale a establecer una aplicación entre el conjunto **Z, de los** enteros (Abscisas de los puntos) y los puntos de una recta **r.** Esta aplicación sigue siendo **inyectiva,** ya que a cada número le corresponde un punto y sólo uno, pero existen infinitos puntos que no tienen su preimagen en Z.

2.2.2.1. Operaciones con Números Enteros.

A. **La Adición;** es una operación cerrada en Z, pues quiere decir: "La suma de dos números enteros es un número entero".

> ***Ejemplos:***
>
> a). $9 + 4 = 13$; si : $9 \in Z$; $4 \in Z \Rightarrow 13 \in Z$
>
> b). $(-3) + (-8) = -11$; si : $-3 \in Z$; $-8 \in Z \Rightarrow -11 \in Z$

B. **La Sustracción;** es una operación cerrada en Z pues quiere decir: "La diferencia de dos números enteros es un número entero".

Ejemplos:

a). $7 - 4 = 3$; si : $7 \in \mathbb{Z}$; $4 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3 \in \mathbb{Z}$

b). $(-3) - (1) = -4$; si : $-3 \in \mathbb{Z}$; $1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow -4 \in \mathbb{Z}$

b). $(-5) - (-6) = 1$; si : $-5 \in \mathbb{Z}$; $-6 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1 \in \mathbb{Z}$

C. **La Multiplicación;** es una operación cerrada en Z, pues quiere decir. "El producto de dos números enteros es un número entero".

Ejemplos:

a). $2 \times 7 = 14$; si : $2 \in \mathbb{Z}$; $7 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 14 \in \mathbb{Z}$

b). $(-3) \times (-4) = 12$; si : $-3 \in \mathbb{Z}$; $-4 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 12 \in \mathbb{Z}$

D. **La Potenciación;** no es una operación cerrada en Z, pues quiere decir: "Un número entero, elevado a un exponente entero, no siempre es un número entero".

Ejemplos:

a). $(2)^{-3} = \frac{1}{(2)^3} = \frac{1}{8}$; si : $-3 \in \mathbb{Z}$; $2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{1}{8} \notin \mathbb{Z}$

b). $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$; si : $-3 \in \mathbb{Z}$; $-2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{1}{9} \notin \mathbb{Z}$

E. **La División;** no es cerrada en Z, pues quiere decir: "Que el cociente de dos números enteros, no siempre es un número entero".

Ejemplos:

a). $4 : 5 = 0{,}8$; si : $4 \in \mathbb{Z}$; $5 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 0{,}8 \notin \mathbb{Z}$

b). $3 : 4 = 0{,}75$; si : $3 \in \mathbb{Z}$; $4 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 0{,}75 \notin \mathbb{Z}$

F. **La Radicación;** no es cerrada enZ ; pues quiere decir: "Que la raiz de un número entero, no siempre es un número entero".

Ejemplos:

a). $\sqrt{2} = \sqrt[2]{2} = 1{,}4142135.....$; si : $2 \in \mathbb{Z}$; $3 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1{,}4142135... \notin \mathbb{Z}$

b). $\sqrt{5} = \sqrt[2]{5} = 2{,}2360679.....$; si : $2 \in \mathbb{Z}$; $5 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2{,}2360679... \notin \mathbb{Z}$

Propiedades de Z.

1. El conjunto de números enteros es infinito.
2. No tiene primero ni último elemento.
3. Todo número entero tiene un **sucesor**. Un número entero y su sucesor se dicen **consecutivos.**

Ejemplo: -2 es el **sucesor** de -3 ⇒ -2 y -3 son **consecutivos**.

4. Todo número entero tiene un **antecesor**.

   -1 es el antecesor de cero

   -6 es el antecesor de -5

5. Entre dos números enteros existe siempre un número finito de números enteros. Por eso decimos que el conjunto de números enteros es **discreto.**

Ejemplos:

a). Entre -11 y -4 hay 6 números enteros (-4 > -11)

b). Entre 9 y 21 hay 11 números enteros (21 > 9).

2.2.3. Número Racional:

Un número racional es el formado por una fracción (cociente de dos números enteros) y todos sus equivalentes.

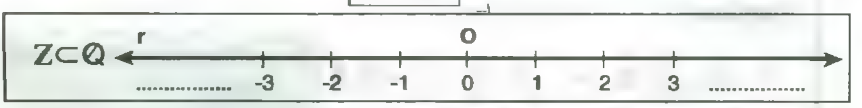
El conjunto Q de los números racionales tienen como elementos a todos los números que pueden ser expresados de la forma x/y siendo: x, y números enteros, además $y \neq 0$.

Los números racionales Q, engloban a:

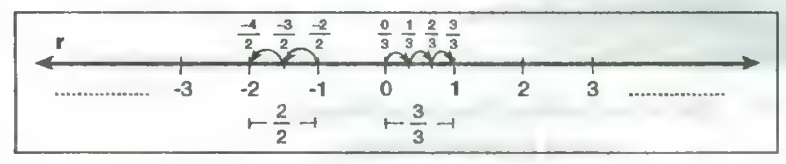
* **Enteros** (fracciones que son cocientes exactos: $\frac{16}{8} = 2$)
* **Fraccionarios** (fracciones que no sean cocientes exactos: $\frac{12}{5} = 2{,}4$ y que pueden expresarse en forma de número decimal).

Para representar los números racionales Q en una recta r se inicia el mismo proceso que en Z, ya que en particular los enteros pertenecen a Q.

Tendremos: 



La representación de los números fraccionarios quedará vista una vez sepamos dividir un segmentos cualquiera en n partes iguales ($n \in \mathbb{Z}$); pues una fracción $\frac{m}{n}$ indica que la unidad se ha dividido en n partes iguales, de las cuales se ha cogido m.



2.2.3.1. Operaciones con Números Racionales

(A) La Adición, la Sustracción, la Multiplicación, la División y la Potenciación; son operaciones cerradas en $\mathbb{Q}$. Esto quiere decir:

a). $\forall\ (x, y) \in \mathbb{Q} \Rightarrow (x + y) \in \mathbb{Q}$ (**∀ se lee:** para todo)

Ejemplos:

*) $2 \text{ y } \frac{1}{3} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \left(2+\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{3}=2,\widehat{3}$ ▶ Es un decimal periódico puro. **Luego:** $2,\widehat{3} \in \mathbb{Q}$

) $\frac{2}{5} \text{ y } \frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \left(\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{10}=0,9$ ▶ Es un decimal exacto. **Luego: $0,9 \in \mathbb{Q}$

b). $\forall\ (x, y) \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \cdot y \in \mathbb{Q}$

Ejemplos:

*) $2 \text{ y } \frac{1}{3} \in \mathbb{Q} \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{3}=\frac{2}{3}=0,\widehat{6}$ ▶ Es un decimal periódico puro. **Luego:** $0,\widehat{6} \in \mathbb{Q}$

) $\frac{2}{5} \text{ y } \frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}=\frac{2}{10}=0,2$ ▶ Es un decimal exacto. **Luego: $0,2 \in \mathbb{Q}$

c). $\forall\ (x, y) \in \mathbb{Q} \Rightarrow (x - y) \in \mathbb{Q}$

Ejemplos:

*) $2 \text{ y } \frac{1}{3} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \left(2-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{3}=1,\widehat{6}$ ▶ Es un decimal periódico puro. **Luego:** $1,\widehat{6} \in \mathbb{Q}$

) $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{5} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{10}=0,3$ ▶ Es un decimal **exacto. **Luego:** $0,3 \in \mathbb{Q}$

d). $\forall (x, y) \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}\ ;\ y \neq 0$

Ejemplos:

*) $\frac{1}{4}$ y $2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{\frac{1}{4}}{2}=\frac{1}{8}=0,125$ ▶ Es un decimal exacto. **Luego:** $0,125 \in \mathbb{Q}$

**) 6 y $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{6}{\frac{1}{3}}=18 \in \mathbb{Q}$

e). $\forall (x, y) \in \mathbb{Q} \Rightarrow x^y \in \mathbb{Q}\ ;\ x$ é $y \neq 0$

Ejemplos: *) 2 y $3 \in \mathbb{Q} \Rightarrow 2^3=8 \in \mathbb{Q}$

**) 3 y $-2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow 3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9} \in \mathbb{Q}$

- El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es **denso** lo que quiere decir que cualquiera que sean los números racionales "x" e "y" $(x < y)$, existe siempre un $W \in \mathbb{Q}$, tal que:

$$x < w < y$$

Ejemplo: Comprobar que entre los números siguientes de $\mathbb{Q}$, existe otro.

a). $\frac{3}{4}$ y $\frac{4}{5}$ b). $\frac{7}{10}$ y $\frac{4}{5}$

Resolución:

a). $\frac{\frac{3}{4}+\frac{4}{5}}{2}$; Está entre $\frac{3}{4}$ y $\frac{4}{5}$

$\frac{\frac{31}{20}}{2}$; Está entre $\frac{3}{4}$ y $\frac{4}{5}$

$\therefore$ $\frac{31}{40}$ Está entre $\frac{3}{4}$ y $\frac{4}{5}$

b). $\frac{\frac{7}{10}+\frac{4}{5}}{2}$; Está entre $\frac{7}{10}$ y $\frac{4}{5}$

$\frac{\frac{15}{10}}{2}$; Está entre $\frac{7}{10}$ y $\frac{4}{5}$

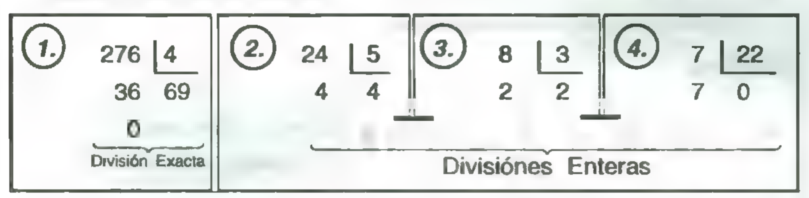
$\therefore$ $\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$; Está entre $\frac{7}{10}$ y $\frac{4}{5}$

2.2.4. Números Decimales:

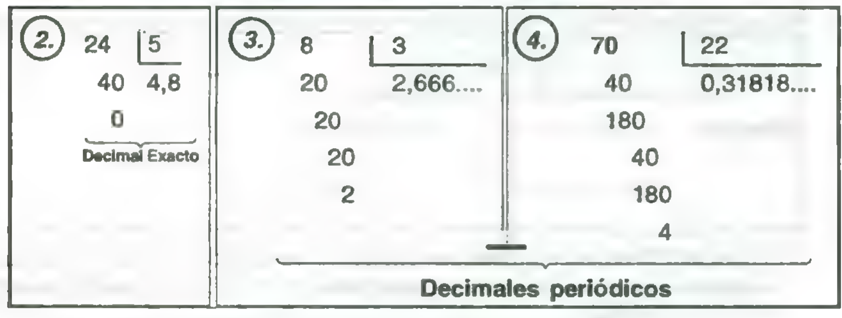
2.2.4.1. Introducción:

Sean los números racionales: $\frac{276}{4}$; $\frac{24}{5}$; $\frac{8}{3}$; $\frac{7}{22}$ (Cocientes de dos enteros).

Hallamos dichas divisiones:



* Si la división no es exacta podemos sacar cifras decimales, separando las cifras enteras de las decimales mediante una coma:



Al continuar la división vemos que son posibles dos casos:

a) que se llegue a un resto ó residuo 0; obtenemos un número **decimal exacto** (4,8). **(Ver división ②)**.

b) que se acabe la división, pues nunca se llega a obtener resto Cero. En este caso obtenemos un **número decimal** (pero desde un lugar de la división en adelante hay un grupo de cifras que se repiten indefinitivamente y al que llamaremos **período**).

Por lo tanto, tenemos un **número decimal periódico**, que lo denotaremos abreviadamente por:

$2,666............ = 2,\widehat{6}$	$0,31818............ = 0,3\widehat{18}$
Decimal Periódico Puro	**Decimal Periódico Mixto**

*Un **número decimal periódico** se llama **puro** si el período empieza inmediatamente después de la coma decimal y **mixto** si tiene alguna cifra (anteperíodo) después de la coma decimal y antes del período.*

Generalizando tendremos que todos los números racionales podemos clasificarlos según el siguiente esquema:

NUMEROS RACIONALES			
ENTEROS	FRACCIONARIOS		
	FRACCIONES DECIMALES	FRACCIONES NO DECIMALES	
$\frac{276}{4};\frac{40}{8};$........	Número decimal exacto	Número decimal periódico puro	Número decimal periódico mixto
	$\frac{24}{5};\frac{9}{2};$........	$\frac{8}{3};\frac{3}{11};$........	$\frac{7}{22};\frac{13}{6};$........

Donde:

1) Las fracciones cuyo cociente es **exacto** corresponden a los **números enteros**.

2) Las fracciones cuyo cociente dan un **número decimal exacto** corresponden a las **fracciones decimales** (aquellas cuya fracción irreducible sólo contiene en el denominador potencias de 2 y de 5).

3) Las fracciones cuyo cociente da un **número decimal periódico** corresponden a **fracciones no decimales**.

Si convenimos en considerar:

(A.) Los números enteros como decimales, al añadirles una coma y todos los ceros que deseemos a la derecha de la coma (los ceros a la derecha de un número decimal dejan invariable dicho número), los convertimos en **números decimales periódicos puros** del período cero:

Ejemplos:
*) $3 = 3{,}0000........ = 3{,}\widehat{0}$
**) $8 = 8{,}0000........ = 8{,}\widehat{0}$

(B.) Los números decimales exactos como números decimales periódicos al añadirles los ceros que deseemos a la derecha de la última cifra decimal. Asi lo convertimos en **números decimales periódicos mixtos** de período 0 y de anteperiodo los números que tuvieran como decimal exacto:

Ejemplos:
*) $6{,}25 = 6{,}25000........ = 6{,}25\widehat{0}$
**) $2{,}38 = 2{,}38000........ = 2{,}38\widehat{0}$

2.2.4.2. Equivalencia de números racionales y números decimales periódicos.

Con el convenio anterior podemos enunciar el siguiente teorema:

Todo número racional puede ponerse como número decimal con infinitas cifras decimales que se repiten en período y viceversa.

- Ya hemos comprobado que todo número racional (al hallar la división que viene indicada por la fracción que la representa), nos da las siguientes posibilidades:

I.	***Número Entero*** ⇒ Convenio Ⓐ ⇒ Número decimal periódico puro de período 0: ***Ejemplo:*** $\frac{16}{8}=2=2{,}000.......=2{,}\widehat{0}$
II.	***Número Decimal Exacto*** ⇒ Convenio Ⓑ ⇒ Número decimal periódico mixto de período 0: ***Ejemplo:*** $\frac{25}{4}=6.25=6{,}25000.......=6{,}25\widehat{0}$
III.	***Número Decimal periódico puro:*** $\frac{8}{3}=2{,}666.............=2{,}\widehat{6}$
IV.	***Número Decimal periódico mixto:*** $\frac{7}{22}=0{,}31818.............=0{,}3\widehat{18}$

•• Comprobar que todo número decimal con infinitas cifras decimales que se repiten en período puede ponerse como un número racional equivale a hallar la fracción generatriz de dichos números decimales.

I. ***Número Decimal periódico puro de período 0.***

$6{,}\widehat{0}=6{,}000.......=6$ ***(Número Entero)***

II. ***Número Decimal Exacto*** (Número decimal periódico mixto de período 0)

> La fracción generatriz de un número decimal exacto tiene:
> - **Por numerador:** El mismo decimal, sin la coma.
> - **Por denominador:** La unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga.

Así, si tenemos los números decimales exactos: 0,475; 10,05; 0,0027.

Obtenemos las fracciones generatrices de dichos números que son:

*) $0{,}475=0{,}475\cdot\frac{1\,000}{1\,000}=\frac{475}{1\,000}$

***) $0{,}0027=0{,}0027\cdot\frac{10\,000}{10\,000}=\frac{27}{10\,000}$

**) $10{,}05=10{,}05\cdot\frac{100}{100}=\frac{1\,005}{100}$

III. Expresión Decimal Pura:

(a) Si la parte entera es nula:

La fracción generatriz de un número decimal periódico puro, cuya parte entera es nula, tiene:

- **Por numerador:** El período.
- **Por denominador:** Un número formado por tantos nueves como cifras tiene el período.

Asi, los números decimales siguientes: $0,\widehat{723}$ $0,\widehat{92}$; $0,\widehat{7}$ tiene como fracciones operaciones generatrices respectivamente:

$$\frac{723}{999};\frac{92}{99};\frac{7}{9}$$

(b) Si la parte entera no es nula:

La fracción generatriz se compondrá de la parte entera más la fracción equivalente a la parte decimal (según ⓐ).

Asi para la expresión decimal periódica pura: $f = 5,\widehat{42}$ tiene como fracción generatriz:

$$5,2121............. = 5\,\frac{21}{99}$$

IV. Expresión decimal periódica mixta

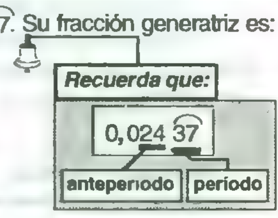
(a) Si la parte entera es nula:

La fracción generatriz de un **número decimal periódica mixto**, cuya parte entera es nula, tiene:

- **Por numerador:** La diferencia entre el número formado por el anteperíodo seguido del período y el número formado por el anteperíodo.
- **Por denominador:** Un número formado por tantos nueves como cifras tiene el período seguido de tantos ceros como cifras tiene el anteperíodo.

- Sea la expresión decimal periódica mixta: $0,024\widehat{37}$. Su fracción generatriz es:

$$f = \frac{2\,437 - 24}{99\,000} = \frac{2\,413}{99\,000}$$



- Sea la expresión decimal periódica mixta: $0,31\widehat{4}$. Su fracción generatriz es:

$$f = \frac{314 - 31}{900} = \frac{283}{900}$$

(b) Si la parte entera no es nula:

La fracción generatriz se compondría de la parte entera más la fracción equivalente a la parte decimal (según (a)).

- Asi la expresión periódica mixta: $2{,}3\widehat{46}$; su fracción generatriz es:

$$2{,}3\widehat{46} = 2\,\frac{346 - 34}{900} = 2\,\frac{312}{900}$$

- La expresión periódica mixta: $5{,}21\widehat{35}$, su fracción generatriz es:

$$5{,}21\widehat{35} = 5\,\frac{2\,135 - 21}{9\,900} = 2\,\frac{2\,114}{9\,900}$$

2.2.4.3. Aproximaciones Decimales de los números racionales.

Después de convenir en que los números enteros y los números decimales exactos podemos ponerlos como números decimales de período cero, hemos visto que los números decimales periódicos coinciden con los números racionales.

La representación de los enteros es inmediata, pero para la representación de los decimales exactos con varias cifras decimales o de los periódicos se acude a aproximaciones por exceso o por defecto, así:

1). Si queremos medir una longitud que exija hasta milésimas de mm y disponemos de un metro dividido en mm, la medida sólo podrá ser aproximada.

2). Si queremos dar una medida que viene expresada por un número decimal periódico podemos hacerlo como sigue. Sea el número decimal periódico

$$2{,}\widehat{3} = 2\,\frac{3}{9} = 2\,\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

podemos ponerlo como:

$$2{,}\widehat{3} = \frac{7}{3} = 2{,}333\ldots\ldots\ldots\ldots = 2 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1\,000} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Entonces cuanto mayor sea el número de cifras decimales que demos, la aproximación al valor de 7/3 será mayor.

*A la diferencia entre el valor exacto y la aproximación decimal tomada se llama **error absoluto**.*

Asi. si tomamos $\frac{7}{3} = 2,33$; tendremos que el error absoluto es:

$$2,333..... - 2,33 = \boxed{0,003\,33.........}$$ (Es decir, el error es menor que una **centésima**)

Ejemplo:

a) Hallar las aproximaciones decimales de tercer orden de los números racionales: $\frac{4}{3}; \frac{8}{15}$

b) Hallar el error absoluto de dichas aproximaciones.

Resolución: a) $\frac{4}{3} = 1,333$; $\frac{8}{15} = 0,533$

b) Error Absoluto $= \frac{4}{3} - 1,333 = 1,3333...... - 1,333 = \boxed{0,000\,33.........}$

Error Absoluto $= \frac{8}{15} - 0,533 = 0,533...... - 0,533 = \boxed{0,000\,33.........}$

Propiedades de Q.

1. El conjunto de números racionales es infinito.
2. No tiene primero ni último elemento.
3. Entre dos números racionales existe siempre un número infinito de racionales. **Por eso** decimos que el conjunto de números racionales es **denso.**

Por Ejemplo: Entre 1/3 y 2/3 podemos encontrar tanto racionales como se quiera. Basta convertir 1/3 y 2/3 en fracciones equivalentes de denominador mayor, veamos:

$$\frac{1}{3} \xrightarrow{\times\frac{2}{2}} \frac{2}{6} \xrightarrow{\times\frac{5}{5}} \frac{10}{30} \qquad\qquad \frac{2}{3} \xrightarrow{\times\frac{2}{2}} \frac{4}{6} \xrightarrow{\times\frac{5}{5}} \frac{20}{30}$$

$$\boxed{\frac{10}{30}}; \frac{11}{30}; \frac{12}{30}; \frac{13}{30}; \frac{14}{30}; \frac{15}{30}; \frac{16}{30}; \frac{17}{30}; \frac{18}{30}; \frac{19}{30}; \boxed{\frac{20}{30}}$$

y asi sucesivamente podemos encontrar más fracciones comprendidas entre 1/3 y 2/3 a medida que aumenta el denominador.

En consecuencia:

4. Ningún número racional tiene sucesor ni antecesor.

2.2.5. Existencia de Números No Racionales (Irracionales):

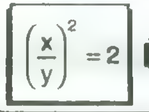
Desde muy antiguo se conoce que números como $\sqrt{2}$ no son números racionales, es decir no pueden expresarse como números decimales periódicos.

A esta conclusión podemos llegar por diversos caminos:

a) Hallando la raíz cuadrada y observando que al ir obteniendo más y más decimales nunca se lleguen a repetir en período (obtendriamcs un número decimal de infinitas cifras decimales que no se repiten en período y diremos que es un **número irracional**). Como el proceso de obtener más cifras decimales es infinito, siempre nos puede quedar la duda de que a partir de una cifra puedan repetirse.

b) Demostrando que dicho número $\sqrt{2}$, no es racional, osea que no puede ponerse como cociente de dos números enteros.

No existe ningún número racional tal que su cuadrado sea igual a 2. Osea:



$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 2$$

Ningún número **irracional** puede ser expresado en la forma $\frac{x}{y}$ siendo "x" e "y" números enteros.

Los números irracionales pueden ponerse como números decimales con infinitas cifras que no se repiten en período.

Ejemplos: de Números Irracionales:

$\sqrt{2}$; cuya expresión decimal no periodica es: 1,4142135.......

$\sqrt{3}$; cuya expresión decimal no periódica es: 1,7320508.......

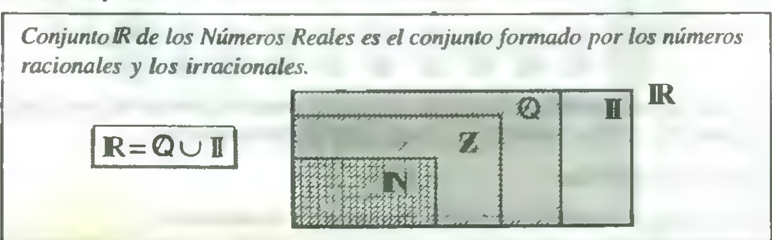
π ; cuya expresión decimal no periódica es: 3,141592.......

2.2.6. Conjunto de los Números Reales ($\mathbb{R}$).

Los elementos del conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales son todos los elementos de los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$; puede quiere decir que todos los números naturales son reales, todos los números enteros son reales, todos los números racionales son reales y todos los números irracionales son reales.

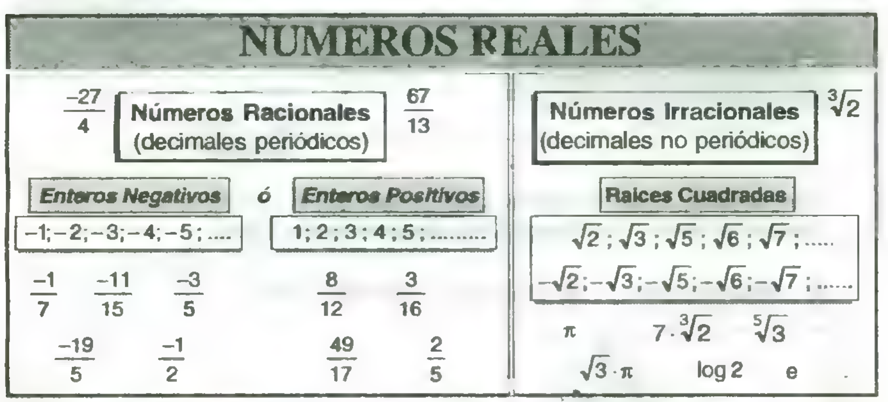
Conjunto $\mathbb{R}$ de los Números Reales es el conjunto formado por los números racionales y los irracionales.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

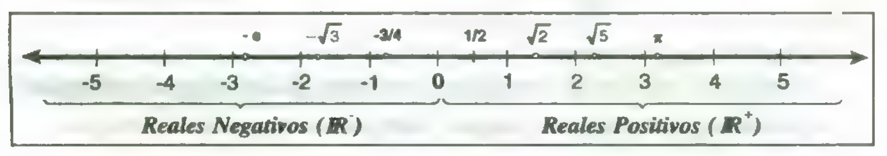


2.2.6.1. Representación Gráfica de los Números Reales

Los números racionales (decimales periódicos) y los números irracionales (decimales no periódicos) forman un conjunto de números llamados los **números reales.**



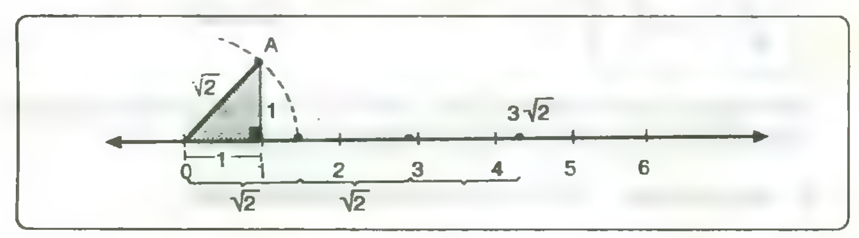
Como todo decimal (sea o no periódico) determina un punto en la recta numérica y como todo punto en la recta numérica está asociado a un decimal, decimos que la recta numérica esta completa y la llamamos la **recta numérica real.**



Algunos números reales y sus puntos correspondientes en la recta numérica real.

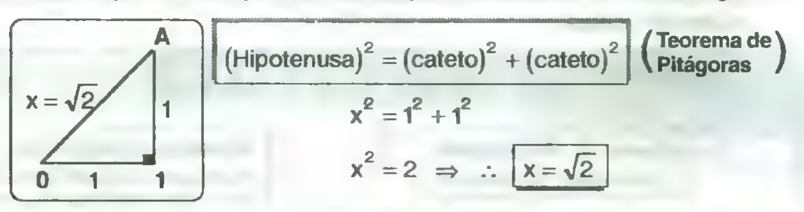
Conocemos las propiedades o principios fundamentales para la adición y la multiplicación de números racionales. Toda vez que el conjunto de los números reales comprende al conjunto de los números racionales, aceptamos las mismas propiedades fundamentales para la adición y la multiplicación de los números reales.

➊. **Representar:** $3\sqrt{2}$ en la Recta numérica Real.



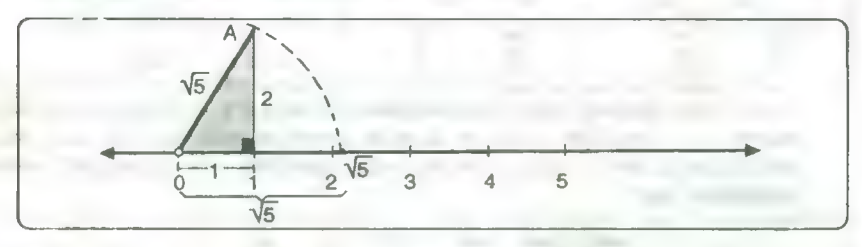
* En primer lugar medimos 1 unidad a partir de 0, de igual manera medimos 1 unidad hacia arriba (ver figura), formando así un triángulo rectángulo.

• En el Triángulo Rectángulo formado, aplicamos el Teorema de Pitágoras.



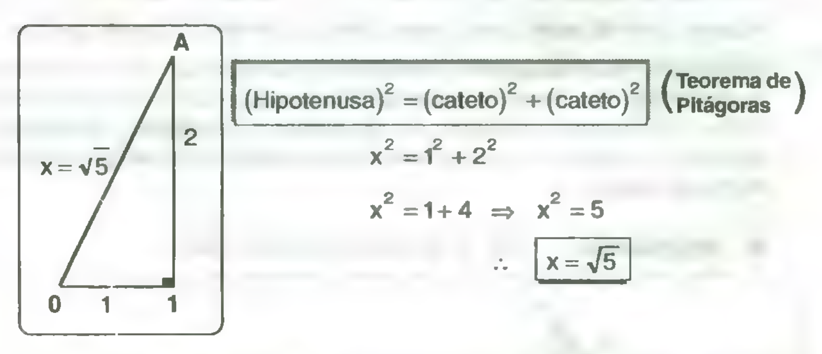
* En segundo lugar tomamos como centro de la circunferencia el punto o pasando dicha circunferencia por el punto **A** (Ver figura).

❷. **Representar:** $\sqrt{5}$ en la Recta Numérica Real.



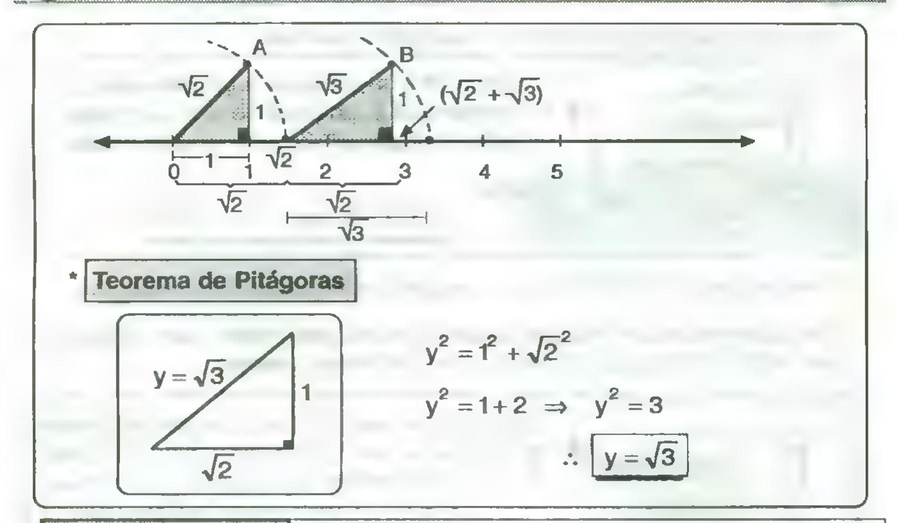
* En primer lugar medimos 1 unidad a partir de 0, de igual manera medimos 2 unidades hacia arriba (ver figura), formando asi un triángulo rectángulo.

• En el triángulo rectángulo formado; aplicamos el teorema de Pitágoras.



* En segundo lugar tomamos como centro de la circunferencia el punto o pasando dicha circunferencia por el punto A (ver figura).

❸. **Representar:** $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ en la Recta Numérica Real.



Propiedades de ℝ.

El conjunto de los números reales cumple todas las propiedades del conjunto de los números racionales.

1. Es infinito
2. No tiene primero ni último elemento.
3. Entre dos números reales existe siempre un número infinito de números reales, pues por esta razón se dice que el conjunto de números reales es **denso.**
4. El conjunto ℝ de los números reales es un conjunto **totalmente ordenado** por la relación $\leq$

2.2.6.2. Aproximación y Redondeo:

Por lo general, los cálculos en lo que intervienen los decimales periódicos puros, los decimales periódicos mixtos o los irracionales se efectuan reemplazando dichos números por números racionales, según el grado de exactitud que deseamos. **Ejemplo:**

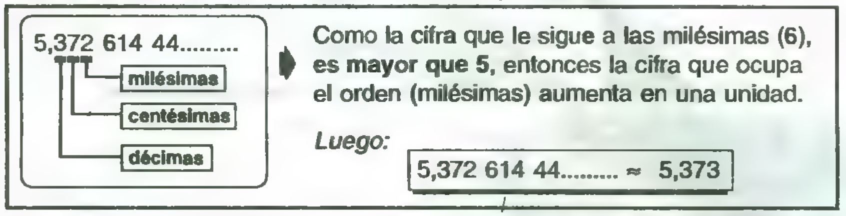
Una aproximación de π es **3,14**; otra aproximación es **3,1415** mayor aproximación es **3,14159**. Esta última se escribe π **= 3,1416**.

Ejemplo 1: Redondear: 5,372 614 44.........; hasta el orden de las milésimas.

Resolución:

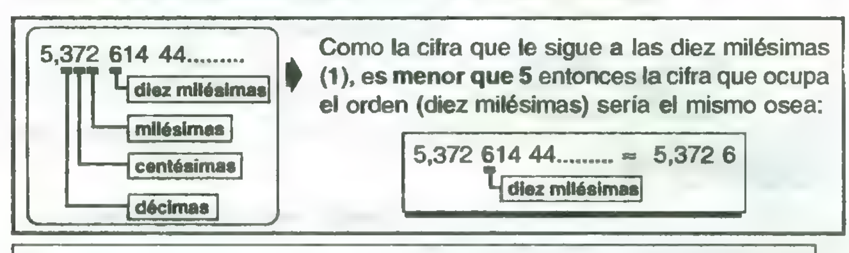
Nos piden redondear hasta el orden de las milésimas, esto quiere decir que

solamente debemos contar con 3 decimales, veamos:



• Redondear: 5,372 614 44......... hasta el orden de las diez milésimas.

Nos piden redondear hasta el orden de las diez milésimas, esto quiere decir que solamente debemos contar con 4 decimales, veamos:



Nota:

*En el resultado: **24,6**. Como la cifra siguiente a la "coma decimal" es **mayor que 5** entonces la parte entera se aproxima a la unidad inmediata superior; osea: **24,6 ≈ 25***

*En el resultado: **32,5**; como la cifra siguiente a la "coma decimal" es igual a 5, entonces la parte entera se aproxima a la unidad inmediata superior; osea: **32,5 ≈ 33***

*En el resultado: **43,2** ; como la cifra siguiente a la "coma decimal" es menor que 5, entonces la parte entera no varía osea: **43,2 ≈ 43***

Ejemplos: Redondear:

a) 13,537 ≈ 13,54 **c)** 83,548 6 ≈ 83,549

b) 416,245 ≈ 416,25 **d)** 672,34 ≈ 672,3

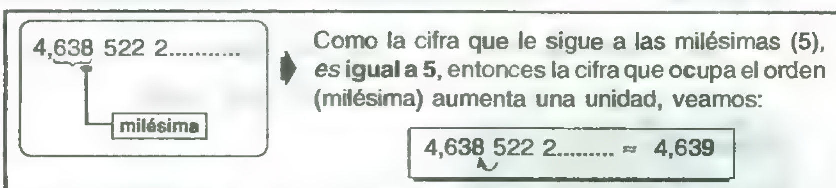
e) 48,564 87 ≈ 48,564 9 ≈ 48,565 ≈ 48,57 ≈ 48,6 ≈ 49

Ejemplo 2: Redondear: 4,638 522 2.........; hasta el orden de las milésimas:

Resolución:

Nos piden redondear hasta, el orden de las milésimas, esto quiere decir que

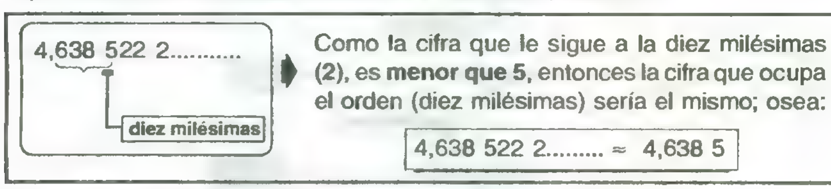
solamente debemos contar con 3 decimales, veamos:



Como la cifra que le sigue a las milésimas (5), *es* **igual a 5**, entonces la cifra que ocupa el orden (milésima) aumenta una unidad, veamos:

- Redondear: 4,638 522 2.........; hasta el orden de las diez milésimas.

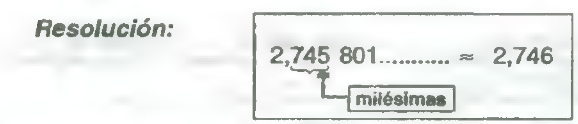
Nos piden redondear hasta el orden de las diez milésimas, esto quiere decir que solamente debemos contar con 4 decimales, veamos:



Como la cifra que le sigue a la diez milésimas (2), es **menor que 5**, entonces la cifra que ocupa el orden (diez milésimas) sería el mismo; osea:

Ejemplo 3: Redondear: 2,745 801..........; hasta el orden de las milésimas.

Resolución:



Ejemplo 4: Redondear: 3,074 3..........;hasta el orden de las centésimas.

Resolución:

3,074 3.......... ≈ 3,07

centésimas

Ejemplo 5: Redondear: $6,\overset{\frown}{378}$, hasta el orden de las centésimas.

Resolución:

$6,\overset{\frown}{378} = 6,378\ 378..... \approx 6,38$

centésimas

Ejemplo 6: Redondear: $83,6\overset{\frown}{8}$, hasta el orden de las milésimas.

Resolución:

$83,6\overset{\frown}{8} = 83,686\ 8.......... \approx 83,687$

milésimas

Ejemplo 7: Halla el resultado de las siguientes operaciones, redondeando cada resultado hasta las:

I). Décimas **II).** Centésimas **III).** Milésimas

a) $4{,}834+\sqrt{2}-0{,}\widehat{48}$ **c)** $36\times 4{,}547=$

b) $\pi+\sqrt{5}-1{,}\widehat{72}$ **d)** $\sqrt{3}+2\sqrt{2}+9{,}\widehat{56}$

Resolución:

a) $4{,}834+\sqrt{2}-0{,}\widehat{48}=4{,}834+1{,}414\ 213\ 5\ldots-0{,}484\ 848\ldots$

$=5{,}763\ 413\ 5\ldots\approx \boxed{5{,}8}$ (décimas)

$=5{,}763\ 413\ 5\ldots\approx \boxed{5{,}76}$ (centésimas)

$=5{,}763\ 413\ 5\ldots\approx \boxed{5{,}763}$ (milésimas)

b) $\pi+\sqrt{5}-1{,}\widehat{72}=3{,}141\ 592\ldots+2{,}236\ 006\ 9\ldots-1{,}727\ 2\ldots$

$=3{,}650\ 459\ 9\ldots\approx \boxed{3{,}7}$ (décimas)

$=3{,}650\ 459\ 9\ldots\approx \boxed{3{,}65}$ (centésimas)

$=3{,}650\ 459\ 9\ldots\approx \boxed{3{,}650}$ (milésimas)

c) $36\times 4{,}547=163{,}692\approx \boxed{163{,}7}$ (décimas)

$=163{,}692\approx \boxed{163{,}69}$ (centésimas)

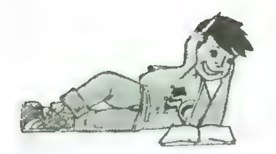
$=163{,}692\approx \boxed{163{,}692}$ (milésimas)

d) $\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 9,\widehat{56} = 1,732\,050\,8...... + 2(1,414\,213\,5.....) + 9,565\,6......$

$= 12,711\,864\,3.......... \approx$ **12,7** (décimas)

$= 12,711\,864\,3.......... \approx$ **12,71** (centésimas)

$= 12,711\,864\,3.......... \approx$ **12,712** (milésimas)



TALLER DE EJERCICIOS Nº 3

Ejercicio 1 : Evaluar cada una de las siguientes proposiciones y coloca dentro de cada paréntesis una **V** si es verdadero o una **F** si es falso.

a) 4 y $\frac{3}{5} \in \mathbb{R}$; $\left(4+\frac{3}{5}\right) \in \mathbb{Q}$ ... ( )

b) $8 \in \mathbb{R}$; $8 \in \mathbb{N}$ ... ( )

c) -2 y $6 \in \mathbb{Z}$; $(-2) \times 6 \in \mathbb{R}$ ... ( )

d) 9 y $5 \in \mathbb{R}$; $(9 - 5) \in \mathbb{Q}$ ... ( )

e) $\sqrt{3} \in \mathbb{I}$; $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ ... ( )

f) $\frac{8}{2} \in \mathbb{R}$; $\frac{8}{2} \in \mathbb{N}$ ... ( )

g) -3 y $-6 \in \mathbb{R}$; $(-3)(-6) \in \mathbb{Z}$ ... ( )

h) $\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$; $\frac{3}{4} \in \mathbb{I}$ ... ( )

Ejercicio 2 : Evaluar cada una de las siguientes proposiciones y coloca dentro de cada paréntesis una **V** si es verdadero o una **F** si es falso.

a) La sustracción es una operación cerrada en IR ... ( )

b) La división es una operación cerrada en Z ... ( )

c) A cada punto de la recta le corresponde un número real ... ( )

d) A cada punto de la recta le corresponde un número racional ... ( )

e) $\frac{12}{0}$ es un número real ... ( )

f) $\frac{0}{36}$ es un número real ... ( )

g) $3\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$, son números reales ... ( )

h) $5,\widehat{2}$ y $0,\widehat{4}$, son números reales ... ( )

Ejercicio 3: Redondear las siguientes expresiones decimales hasta las:

I. Décimas **II. Centésimas**
III. Milésimas **IV. Diez milésimas**

a) 4,76543 =

b) 2,34792 =

c) 13,65401 =

d) 4,29568 =

e) $3,87\overset{\frown}{24}$ =

f) $5,24\overset{\frown}{39}$ =

g) $18,7\overset{\frown}{28}$ =

h) $36,4\overset{\frown}{579}$ =

i) 27,46753 =

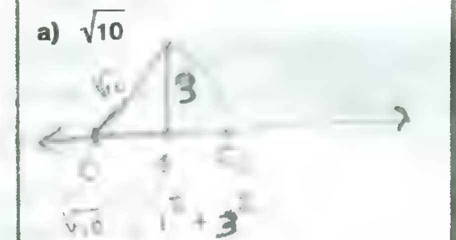
j) 128,74658 =

k) $47,56\overset{\frown}{85}$ =

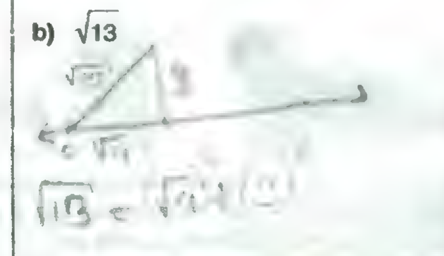
l) $5,8\overset{\frown}{7656}$ =

Ejercicio 4: Representar en la recta numérica real. ***(Sugerencia:** Aplicar el Teorema de Pitágoras)*

a) $\sqrt{10}$



b) $\sqrt{13}$



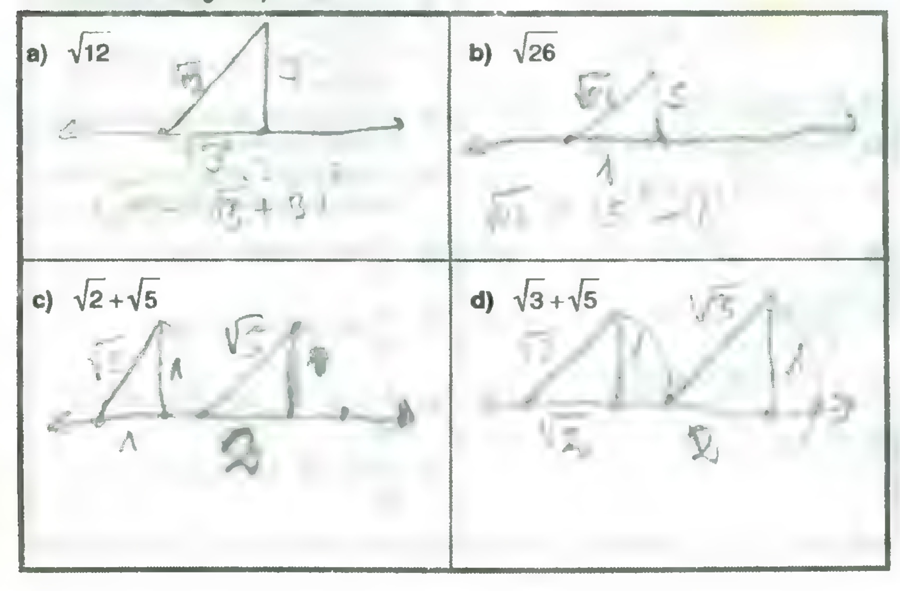
Ejercicio 5: Representar en la recta numérica real. ***(Sugerencia:** Aplicar el Teorema de Pitágoras)*

a) $\sqrt{12}$

b) $\sqrt{26}$

c) $\sqrt{2}+\sqrt{5}$

d) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$



Ejercicio 6 : Halla el resultado de las siguientes operaciones, redondeando cada resultado hasta las: **I. Décimas** **II. Centésimas**

a) $6{,}748 + \sqrt{3} - 0{,}\widehat{76} =$	**a)** $\frac{5}{6} \times 12 - \sqrt{2} =$	**a)** $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} - \sqrt{2} + \pi =$
b) $\sqrt{5} + \pi - 2{,}\widehat{49} =$	**b)** $2\sqrt{3} - 3{,}\widehat{48} + \pi =$	**b)** $\frac{4}{7} \times 28 - 5{,}4\widehat{76} =$
c) $63{,}547 - 5{,}4\widehat{63} =$	**c)** $\sqrt{5} - \sqrt{2} + \sqrt{3} =$	**c)** $62{,}54785 + 2{,}5\widehat{83} =$

2.3. Operaciones con Números Reales:

2.3.1. Adición de Números Reales:

Llamamos **adición** a la operación que hace corresponder a cada par (a ; b) de números reales, un tercer número real único que se denota (a + b) y llamado **suma** de los reales **a** y **b**. Se escribe: a + b = c.

Esto es:

$(a\,;\,b) \Rightarrow a + b$

Así:

$(2{,}5\,;\,3) \Rightarrow 2{,}5 + 3 \Rightarrow (2{,}5\,;\,3) = 5{,}5$

• **Cálculo de la suma de dos Números Reales.**

Para hallar la suma de dos números reales expresado en forma decimal exacta o periódica, podemos proceder como en los ejemplos siguientes:

Ejemplo 1: Halla la suma de: **6,32 y 3,4.**

Resolución:

6,32 + 3,4 = 9,72

Otra forma:

$$\begin{array}{r} 6{,}32\ + \\ 3{,}4 \\ \hline 9{,}72 \end{array}$$

Ejemplo 2: Halla la suma de: 0,232 323........ y 0,454 545.........

Resolución:

0,232 323......... +
0,454 545.........
0,686 868......... ***(es un número Irracional)***

Pero, como el conjunto $\mathbb{R}$ (Números Reales) está formado por la reunión de racionales e irracionales en la práctica se acostumbra efectuar operaciones fundamentales con números reales, utilizando aproximaciones decimales correspondientes.

Ejemplo 3: Halla la suma de: 6,3 y $\sqrt{2}$ aproximada al décimo.

Resolución:

Sabemos que: $\sqrt{2}$ = 1,414 213 5..........

Como el valor aproximado al décimo es: $\sqrt{2}$ =1,4

Luego: $6,3 + \sqrt{2} = 6,3 + 1,4 = \boxed{7,7}$ **(aproximado al décimo).**

Ejemplo 4: Halla la suma de los siguientes números reales: $\sqrt{3}$ y π; aproximado al centésimo.

Resolución:

$\sqrt{3}$ = 1,732........; aproximado al centésimo = 1,73
π = 3,141........; aproximado al centésimo = 3,14

Luego: $\sqrt{3} + \pi = 1,73 + 3,14 = \boxed{4,87}$ **(aproximado al centésimo).**

Ejemplo 5: Halla la suma: 3/4 y $\sqrt{2}$; aproximada al milésimo.

Resolución:

$\frac{3}{4}$ = 0,75 ;aproximada al milésimo = 0,750

$\sqrt{2}$ = 1,414 2 ;aproximada al milésimo = 1,414

Luego: $\frac{3}{4} + \sqrt{2} = 0,750 + 1,414 = \boxed{2,164}$

Propiedades de la Adición:

1. Propiedad de Clausura:
La suma de dos números reales es un número real.

$\forall\, a \in \mathbb{R}\ ;\ \forall\, b \in \mathbb{R}\ ;\ (a+b) \in \mathbb{R}$

Ejemplo:

$3{,}7 \in \mathbb{R}\ ;\ \sqrt{2} \in \mathbb{R}\ ;\ (3{,}7 + \sqrt{2}) \in \mathbb{R}$

2. Propiedad Asociativa:
La suma no altera si se agrupan los sumando de diferente manera.

Si: a, b, c son reales entonces:

$(a + b) + c = a + (b + c)$

Ejemplo:

Sean los reales: 8,5 ; 1,4 y 6,2

$(8{,}5 + 1{,}4) + 6{,}2 = 8{,}5 + (1{,}4 + 6{,}2)$

$9{,}9 + 6{,}2 = 8{,}5 + 7{,}6$

$16{,}1 = 16{,}1$

3. Propiedad de Conmutativa:
El orden de los sumandos no altera la suma.

$\forall\, a \in \mathbb{R}\ ;\ \forall\, b \in \mathbb{R}\ ;\ a + b = b + a$

Ejemplo:

$\frac{3}{5} \in \mathbb{R}\ ;\ 0{,}6 \in \mathbb{R}\ ;\ \frac{3}{5} + 0{,}6 = 0{,}6 + \frac{3}{5}$

4. Propiedad del Elemento Neutro:
En $\mathbb{R}$ existe el elemento cero denominado neutro aditivo o identidad aditiva, tal que para cualquier número real "a", se tiene:

$a + 0 = a$

Ejemplo:

$3{,}8 + 0 = 3{,}8$

5. Propiedad del inverso Aditivo u opuesto:
Para cada número real "a" existe un único número real "-a" tal que:

$a + (-a) = 0$

Ejemplo:

El opuesto de $\sqrt{3}$ es $-\sqrt{3}$ porque:

$\sqrt{3} + \left(-\sqrt{3}\right) = 0$

2.3.2. Sustracción de Números Reales:

Dado los números reales **a** y **b** se llama diferencia de a y b, y se denota por **a - b**, al número real a + (-b).

Es decir: $a - b = a + (-b)$  ***Así:*** $13{,}4 - \sqrt{3} = 13{,}4 + \left(-\sqrt{3}\right)$

La **sustracción** es la operación que hace corresponder a todo par **(a ; b)** de números reales, su diferencia.

Esto es: $(a\ ;\ b) \Rightarrow a - b$

Ejemplo 1: Halla la diferencia entre 7 y 0,372 372 372............ aproximada al centésimo.

Resolución:

Aproximado el irracional 0,372 372 372............ al centésimo se tiene: 0,37

Luego: $7 - 0,372\ 372\ 372\ldots = 7 - 0,37 = \boxed{6,63}$

Ejemplo 2: Halla la diferencia entre: $0,\widehat{36}$ y $0,\widehat{14}$

Resolución:

$$0,\widehat{36} - 0,\widehat{14} = \boxed{0,\widehat{22}}$$

Ejemplo 3: Halla la diferencia entre $\sqrt{3}$ y $\sqrt{2}$ aproximada al milésimo.

Resolución:

$\sqrt{3} - \sqrt{2} = 1,732 - 1,414 = \boxed{0,318}$ **(aproximada al milésimo).**

2.3.3. Operaciones Combinadas de Adición y Sustracción:

En las operaciones combinadas de adición y sustracción de números reales, se transforma cada sustracción en una adición y luego se procede a simplificar.

Ejemplo 1: Halla el resultado de: $\frac{8}{3} + 0,42 - 2,\widehat{74}$; aproximado al décimo.

Resolución:

$\frac{8}{3} + 0,42 - 2,\widehat{74} = 2,6 + 0,4 - 2,7$; aproximado al décimo.

$= \boxed{0,3}$ **(Aproximado al décimo).**

Ejemplo 2: Calcula: $\frac{2}{7} + \sqrt{5} - 0,3\widehat{6}$; con aproximación al centésimo.

Resolución:

$\frac{2}{7}$ = 0,285 7........; aproximado al centésimo = 0,29

$\sqrt{5}$ = 2,236 06........; aproximado al centésimo = 2,24

$0,3\widehat{6}$ = 0,366 66........; aproximado al centésimo = 0,37

Luego: $\frac{2}{7} + \sqrt{5} - 0,3\widehat{6} = 0,29 + 2,24 - 0,37 = \boxed{2,16}$





Cálculo del producto de dos Números Reales:

Ejemplo 1: Halla el resultado de: $\sqrt{3}\times 8$; aproximado al milésimo.

Resolución:

$\sqrt{3}\times 8 = (1{,}732.....)\times 8 = 1{,}732\times 8 = \boxed{13{,}856}$ **(aproximado al milésimo).**

Ejemplo 2: Halla el resultado de: $\frac{2}{3}\times\pi$ aproximado al diez milésimo.

Resolución:

$\frac{2}{3} = 0{,}666\ 66.......$; aproximado al diez milésimo $= 0{,}666\ 7$

$\pi = 3{,}141\ 592........$; aproximado al diez milésimo $= 3{,}141\ 6$

Luego:

$$\frac{2}{3}\times\pi = 0{,}666\ 7\times 3{,}141\ 6 = 2{,}094\ 504\ 72 = \boxed{2{,}094\ 5}$$

Ejemplo 3: Calcular: $0{,}\widehat{47}\times 6{,}21\widehat{6}$ con la aproximación de un milésimo.

Resolución:

$0{,}\widehat{47} = 0{,}474\ 747.....$; aproximado al milésmo $= 0{,}475$

$6{,}21\widehat{6} = 6{,}216\ 666...$; aproximado al milésimo $= 6{,}216$

Luego:

$$0{,}\widehat{47}\times 6{,}2\widehat{16} = 0{,}475\times 6{,}216 = 2{,}952\ 6 = \boxed{2{,}953}$$

Propiedades de la Multiplicación:

1. ***Propiedad de Clausura:*** El producto de dos números reales es un número real.

$$\boxed{\forall\ a \in \mathbb{R}\ ;\ \forall\ b \in \mathbb{R}\ ;\ ab \in \mathbb{R}}$$

2. ***Propiedad Asociativa:*** El producto no altera si se agrupan los factores de diferentes maneras.

Si: $\boxed{a\ ;\ b\ ;\ c \text{ son reales entonces: } (ab)\cdot c = a\cdot(bc)}$

3. ***Propiedad Conmutativa:*** El orden de los factores no altera el producto.

$$\boxed{\forall\ a \in \mathbb{R}\ ;\ \forall\ b \in \mathbb{R}\ ;\ ab = ba}$$

4. ***Propiedad del Elemento Neutro:*** En $\mathbb{R}$ existe el número denominado neutro multiplicativo o identidad multiplicativa, tal que para cualquier número real "a" se tiene:

$$a \cdot 1 = a$$

5. ***Propiedad del Inverso Multiplicativo:*** Para cualquier número real "a" diferente de cero ($a \neq 0$) existe un número real denotado por a^{-1} o por $\frac{1}{a}$ tal que:

$$a \cdot a^{-1} = 1 \quad \text{ó} \quad a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1$$

Ejemplos:

a) El inverso multiplicativo de 2 es $\frac{1}{2}$; porque: $2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

b) El inverso multiplicativo de $\frac{3}{5}$ es $\frac{5}{3}$; porque: $\frac{3}{5}\left(\frac{5}{3}\right) = 1$

c) El inverso multiplicativo de $\sqrt{3}$ es $\frac{1}{\sqrt{3}}$; porque: $\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1$

6. ***Propiedad Distributiva:*** Para todo número Real a ; b ; c se cumple:

$$a(b + c) = ab + ac \quad ; \quad a(b - c) = ab - ac$$

Ejemplo:

$$6(7 + 2) = 6 \cdot 7 + 6 \cdot 2 = 42 + 12 = 54$$

Ejemplo:

$$5(x - 3) = 5 \cdot x - 5 \cdot 3 = 5x - 15$$

Obtención del factor común:

Ejemplo 1: $4n + 4m = 4(n + m)$ (Factor Común)

Ejemplo 2: $5ab + 8abx = ab(5 + 8x)$ (Factor Común)

Ejemplo 3: $3y - 4 = 3y - \frac{4 \cdot 3}{3} = 3\left(y - \frac{4}{3}\right)$

Ejemplo 4: $\frac{2}{3}x + 1 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{2}{3}\left(x + \frac{3}{2}\right)$

Ejemplo 5: $4x - 3y = 4x - 3y \cdot \frac{4}{4} = 4\left(x - \frac{3y}{4}\right)$

2.3.5. División de Dos Números Reales:

Tal como sucede en los números racionales Q el cociente de dos números reales es un número real, siempre que el divisor sea diferente de cero.

$$\forall\, a \in \mathbb{R}\ ;\ \forall\, b \in \mathbb{R}\ ;\ b \neq 0\ ;\ (a : b) \in \mathbb{R}$$

Sabemos que: $a : b = c$; equivale a: $a = b \cdot c$ ó

$\frac{a}{b} = c$; equivale a: $a = bc$

Ejemplos:

a) $\frac{72}{8} = 9$; equivale a: $72 = 8(9)$

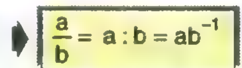
b) $\frac{x}{3} = 5$; equivale a: $x = 3(5) \Rightarrow x = 15$

c) $7x = 42$; equivale a: $x = \frac{42}{7} \Rightarrow x = 6$

d) $\frac{6}{x} = 2$; equivale a: $x = \frac{6}{2} \Rightarrow x = 3$

Nota:

Otra manera de representar el cociente de dos números ***(a : b)*** *es:* ab^{-1}*; osea:*



$$\frac{a}{b} = a : b = ab^{-1}$$

Ejemplos:

a) $4(2^{-1}) = 4 \times \frac{1}{2} = 2$

b) $6(3^{-1}) = 6 \times \frac{1}{3} = 2$

d) $7x^{-1} = \frac{7}{x}$

e) $8y^{-1} = \frac{8}{y}$

*** Las Reglas de los signos son las mismas que en $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$:**

1. El Valor Absoluto del cociente de dos números Reales es igual al cociente de sus valores Absolutos; osea:

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

2. El cociente de dos números Reales positivos es positivo.

$(+6) : (+2) = +3$; osea: $(+) : (+) = (+)$

3. El cociente de un número Real positivo por otro negativo es un número real negativo.

$(+12) : (-4) = -3$; osea: $\boxed{(+) : (-) = (-)}$

$(-12) : (+4) = -3$; osea: $\boxed{(-) : (+) = (-)}$

4. El cociente de dos números Reales negativos es un número real positivo:

$(-10) : (-2) = +5$; osea: $\boxed{(-) : (-) = (+)}$

5. El cociente de un número Real cualquiera por el Real Cero no existe.

$\frac{8}{0}$ = no existe ; osea: $\boxed{\frac{\text{Número}}{\text{Cero}} = \text{no existe}}$

Cálculo del Cociente de Dos Números Reales.

Ejemplo 1: Halla el cociente de: $0,0\overset{\frown}{27}$ entre 3.

Resolución:

Sabemos que: $0,0\overset{\frown}{27} = 0,027\ 272\ 7 \ldots\ldots$

Luego:

$$0,0\overset{\frown}{27} : 3 = \frac{0,027\ 272\ 7 \ldots\ldots}{3} = 0,009\ 090\ 9 \ldots\ldots$$

$$\therefore \boxed{0,027 : 3 = 0,009\ 090\ 9 \ldots\ldots = 0,0\overset{\frown}{09}}$$

Ejemplo 2: Halla el resultado de: $4 : \frac{1}{\sqrt{3}}$

Resolución:

$$4 : \frac{1}{\sqrt{3}} = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{1} = 4 \times 1{,}732 \ldots\ldots = 6{,}928 \ldots\ldots$$

$$\therefore \boxed{4 : \frac{1}{\sqrt{3}} = 6{,}928 \ldots\ldots}$$

Recuerda que:

$$a : \frac{b}{c} = a \times \frac{c}{b}$$

Ejemplo 3: Calcular: $3,\overset{\frown}{81} : 1,632$ con la aproximación de un centésimo.

Resolución:

$$3,\overset{\frown}{81} : 1,632 = (3,818\ 181 \ldots\ldots) : 1,632 = \frac{3,82}{1,63} = 2,343\ 558\ 282$$

Luego:

$$3,\overset{\frown}{81} : 1,632 = \boxed{2,34}$$ **(Aproximación al centésimo)**

* **La División en los Reales** es sólo distributiva por la derecha respecto a la Adición y a la sustracción, esto es:

$$(a+b):c=(a:c)+(b:c)\ \Rightarrow\ \frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$$

$$(a-b):c=(a:c)-(b:c)\ \Rightarrow\ \frac{a-b}{c}=\frac{a}{c}-\frac{b}{c}$$

Ejemplos:

a) $(x+6):2=\frac{x}{2}+\frac{6}{2}=\frac{x}{2}+3$

b) $\frac{2x+7}{2}=\frac{2x}{2}+\frac{7}{2}=x+\frac{7}{2}$

c) $(x-8):4=\frac{x}{4}-\frac{8}{4}=\frac{x}{4}-2$

d) $\frac{6x-3y}{3}=\frac{6x}{3}-\frac{3y}{3}=2x-y$

2.3.6. Operaciones Combinadas:

Si las operaciones con números Reales se presentan en formas combinadas, el resultado de ellas se obtiene respetando las Reglas siguientes:

1. Las operaciones dentro de los signos de agrupación paréntesis, corchetes, llaves, se realizan primero.
2. Las operaciones se efectúan en el siguiente orden:

   1º. La División ; 2º. La Multiplicación ; 3º. La Adición y Sustracción.

Ejemplo 1: Halla el resultado de: $\frac{5}{4}\times\sqrt{3}:\sqrt{3}+0,\widehat{6}$

Resolución:

$$\frac{5}{4}\times\sqrt{3}:\sqrt{3}+0,\widehat{6}=\frac{5}{4}\times\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}+0,\widehat{6}$$

$$=\frac{5}{4}+0,\widehat{6}$$

$$=\frac{5}{4}+\frac{6}{9}=\frac{5}{4}+\frac{2}{3}=\frac{15+8}{12}=\frac{23}{12}$$

$$=\frac{23}{12}=1,916\,66\ldots\ldots=\boxed{1,91\widehat{6}}$$

Ejemplo 2: Halla el resultado de:

$\sqrt{5}-\frac{3}{4}:\left[16-2(5-4,6)-1,8\right]$; con la aproximación de un centésimo.

Resolución:

$$\sqrt{5}-\frac{3}{4}:\left[16-2(5-4,6)-1,8\right]=\underbrace{2,236\ 067..........}-0,75:\left[16-2(0,4)-1,8\right]$$

$$=2,24-0,75:[16-0,8-1,8]$$

$$=2,24-\underbrace{0,75:[13,4]}$$

$$=2,24-0,055\ 970$$

$$=2,184\ 03=\boxed{2,18}\ \textbf{(Aprox. al centésimo)}$$

Ejemplo 3: Halla el resultado:

$$12:\left[\left(\frac{7}{6}:2\right)\times 3-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right];$$ con la aproximación de un centésimo.

Resolución:

$$12:\left[\left(\frac{7}{6}:2\right)\times 3-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right]=12:\left[\left(\frac{7}{6}\times\frac{1}{2}\right)\times 3-(1,73-1,41)\right]$$

$$=12:\left[\frac{7}{12}\times 3-(0,32)\right]$$

$$=12:\left[\frac{7}{4}-(0,32)\right]=12:[1,75-0,32]$$

$$=12:[1,43]=\boxed{8,39}\ \textbf{(Aprox. al centésimo)}$$

Ejemplo 4: Halla el resultado de:

$$\frac{6}{7}\left[\left(4,6-\frac{7}{6}\right):(10:2)-6,4\right];$$ con la aproximación de un milésimo.

Resolución:

$$\frac{6}{7}\left[\left(4,6-\frac{7}{6}\right):(10:2)-6,4\right]=\frac{6}{7}[(\underbrace{4,6-1,167}):(5)-6,4]$$

$$=\frac{6}{7}[(3,433):5-6,4]$$

$$=\frac{6}{7}\left[3,433\times\frac{1}{5}-6,4\right]$$

$$=\frac{6}{7}[0,686\ 6-6,4]=\frac{6}{7}[-5,713\ 4]$$

$$=\frac{-34,280\ 4}{7}=-4,897\ 2=\boxed{-4,897}$$



TALLER DE EJERCICIOS Nº ⑤

1. Halla el resultado de:

a) $0,\widehat{2} \times 13$; aprox. al décimo	**e)** $4,0\widehat{36} \times 1,\widehat{2}$; aprox. al centésimo
b) $1,\widehat{03} \times 1/3$; aprox. al centésimo	**f)** $5/8 \times 2,1\widehat{6} \times 0,04\widehat{2}$; aprox. al milésimo
c) $(-1,25) \times (0,4)$; aprox. al milésimo	**g)** $\sqrt{2}\times\left(\frac{-3}{16}\right)\times 2,\widehat{42}$; aprox. al diez milésimo
d) $3,0\widehat{5} \times 1/5$; aprox. al décimo	**h)** $3,6\times\sqrt{3}\times 2,0\widehat{81}$; aprox. al centésimo

2. Aplicando convenientemente las propiedades de la multiplicacón halla el resultado de:

a) $3,9\times 0,45\times\frac{1}{4,8}$	d) $0,\widehat{6}\times 9\times\left(-\frac{1}{3}\right)$	g) $\left(-\frac{3}{4}\right)\times 0,\widehat{8}\times\left(5\frac{1}{3}\right)$
b) $\left(-\sqrt{3}\times 0,4\right)\times\sqrt{3}$	e) $\left(\sqrt{3}+4\right)\times\sqrt{3}$	h) $\left(3\sqrt{2}-4\right)\times\sqrt{2}$
c) $2,5\times\frac{1}{4}\times\sqrt{5}$	f) $0,8\times\pi + 0,2\times\pi$	i) $2,\widehat{3}\times 0,3\times\frac{5}{27}$

3. Aplica la propiedad del inverso multiplicativo y halla el valor de "x".

a) $3x = 15$	e) $\frac{3}{7}x = 6$	i) $-\frac{1}{3}x = 8$	m) $\frac{1}{2}x = 6$
b) $-2x = 8$	f) $\frac{2}{9}x = 4$	j) $\frac{7}{8}x = 14$	n) $\frac{-2}{3}x = 8$
c) $-x = 3,6$	g) $5x = 5^{-1}$	k) $4x = 16$	ñ) $5x = -10$
d) $2,4x = 7,2$	h) $3x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$	l) $2x = 4^{-1}$	o) $-3^{-1}x = 6$

Ejemplo: Resolver: $-4x = 20$

Resolución: Aplicando la propiedad del inverso multiplicativo, obtenemos:

$$-\cancel{4}x\left(\frac{1}{\cancel{4}}\right) = 20\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$-x = 5 \Rightarrow \therefore \boxed{x = -5}$$

4. Aplica la propiedad del inverso aditivo y la del inverso multiplicativo para hallar el valor de cada letra (resuelve las ecuaciones).

a) $3x - 1 = 2{,}6$	e) $-\frac{1}{3}x - 2 = 5$	i) $3{,}4z + 1 = 6$
b) $5x + 3 = 1{,}5$	f) $\frac{2}{5}x + 2 = \frac{3}{4}$	j) $\frac{7}{10}z - \frac{1}{4} = 2$
c) $-2y + 3 = 9$	g) $\frac{3}{5}y - 3 = \frac{1}{2}$	k) $\frac{2}{9}x + 7 = -1$
d) $\frac{3}{2}x - 4 = 2$	h) $2{,}5x - 4 = 6$	l) $\frac{-3}{4}x - 2 = 7$

Ejemplo: Resolver: $3x - 2 = 10$; Aplica la propiedad del inverso aditivo y la del inverso multiplicativo.

Resolución:

$$\boxed{3x - 2 = 10}$$

- ***Por propiedad del inverso Aditivo, se tiene:***

$$3x - \cancel{2} + \cancel{2} = 10 + 2 \Rightarrow \boxed{3x = 12}$$

- ***Por propiedad del inverso multiplicativo, se tiene:***

$$\cancel{3}x \cdot \left(\frac{1}{\cancel{3}}\right) = 12 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \therefore \boxed{x = 4}$$

5. Aplica la propiedad distributiva y expresa el resultado en la forma más simple:

a) $8(x + 1) =$	d) $\frac{3}{4}(x - 8) =$	g) $-x(8 - x) =$
b) $-3(y - 1) =$	e) $\frac{-2}{3}(6 - x) =$	h) $z(y + 2) =$
c) $a(x - 3) =$	f) $\frac{2}{7}\left(\frac{7}{3} + y\right) =$	i) $-y(7 + y) =$

6. Aplica la propiedad distributiva, obtén el factor común y escribe cada expresión como el producto de dos factores.

a) $3x + 3y =$	e) $6x - 9y =$	i) $5xyz + 3xz =$
b) $\frac{3}{5}x - \frac{3}{5}y =$	f) $-3x - 4y =$	j) $2a - 8ax =$
c) $5x + 30 =$	g) $-11 - 22x =$	k) $5xb + 10\ xz =$

d) $-3x + 9 =$	h) $\frac{6}{5} - \frac{6}{5}y =$	l) $3ax - 12\,ay =$

> ***Ejemplo:*** Aplica la propiedad distributiva, obten el factor común en la expresión: $6x + 42$.
>
> ***Resolución:***
>
> $$6x + 42 = \underline{6}x + \underline{6}.7$$
> (Factor Común)
> $$= \underline{6}\,(x + 7)$$

7. Aplica la propiedad distributiva y completa las igualdades, escribiendo el factor que falta:

a) $3x - 4 = 3(\qquad)$	e) $7x + 1 = 7(\qquad)$
b) $5 + 3y = 5(\qquad)$	f) $-6 + 4x = 4(\qquad)$
c) $8a + 7 = 8(\qquad)$	g) $\frac{1}{4}y + 5 = \frac{1}{4}(\qquad)$
d) $-3x + 5 = -3(\qquad)$	h) $\frac{5}{3}x - 2y = \frac{5}{3}(\qquad)$

8. En cada uno de los ejercicios siguientes halla el cociente con la aproximación indicada:

a) $6 : \frac{5}{13}$; aproximado al décimo	d) $0,\widehat{081} : 0,1\widehat{8}$; aproximado al centésimo
b) $\frac{3}{5} : 6\frac{1}{4}$; aproximado al centésimo	e) $\sqrt{5} : \frac{1}{\pi}$; aproximado al milésimo
c) $3,\widehat{54} : (-2,\widehat{3})$; aproximado al milésimo	f) $\left(\sqrt{3} + \pi\right) : \sqrt{3}$; aproximado al milésimo

9. Halla el resultado de:

a) $0,426 : \frac{3}{5} =$	c) $16 : 0,28 =$	e) $\frac{3}{4} : 0,25 =$
b) $3,872 : \left(-\frac{1}{6}\right) =$	d) $-\sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{2}} =$	f) $6,48 : 0,\widehat{3} =$

10. Halla el resultado de:

a) $\dfrac{7}{8}+\dfrac{9}{15}\times\dfrac{3}{27}=$	d) $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{12}{4}-6:\dfrac{5}{8}+1=$
b) $\dfrac{10}{12}:\dfrac{1}{36}-\dfrac{5}{6}=$	e) $5\sqrt{5}:\dfrac{10}{3}-\dfrac{8}{7}\times 14=$
c) $-\sqrt{7}:\sqrt{7}-3=$	f) $2+6:\dfrac{5}{3}-4\times\dfrac{2}{3}=$

11. En cada uno de los ejercicios siguientes halla, con la aproximación que se indica, el resultado de:

a) $\sqrt{2}:\dfrac{3}{\sqrt{2}}(7+3{,}2\times 5)$; con la aproximación de un centésimo

b) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}:\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\dfrac{-4}{11}\right)-\left[1{,}\widehat{3}-0{,}\widehat{4}\times\dfrac{9}{2}\right]$; con la aproximación de un milésimo

c) $\left(2\pi+\sqrt{2}:2\right)-\left[\sqrt{3}+(2-0{,}76)\right]$; con la aproximación de un centesimo

d) $3{,}\hat{2}+\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{3}{4}\right):\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\left(3{,}72-0{,}\widehat{6}\times\dfrac{18}{7}\right)$; con la aproximación de los diez milésimos

12. Teniendo en cuenta que el producto ab^{-1} es equivalente al cociente $\dfrac{a}{b}$ completa las igualdades siguientes:

a) $3(6^{-1})=$	e) $\dfrac{2}{9}x^{-1}=$	i) $\dfrac{9}{x}=$	m) $\dfrac{-9}{z}=$
b) $4x^{-1}=$	f) $-\dfrac{4}{7}y^{-1}=$	j) $\dfrac{3}{z}=$	n) $\dfrac{16}{y}=$
c) $-5z^{-1}=$	g) $-\dfrac{1}{6}z^{-1}=$	k) $\dfrac{-6}{y}=$	ñ) $\dfrac{y}{3}=$
d) $4(-2)^{-1}=$	h) $\dfrac{5}{8}x^{-1}=$	l) $\dfrac{-x}{4}=$	o) $\dfrac{-10}{x}=$

13. Para cada igualdad siguiente se dan valores para **x** ó para **y**, completa la tabla hallando los números que faltan:

a) $y = 3x - 2$

x	0	2/3	2	6		-4		1/3	
y	-2	0	4		2		-6		1/4

b) $y = 2x + 3$

x	0	-3/2	-2	4		6		5/2	
y	3	0	-1		2		4		4/7

c) $y = -3x - 1$

x	0		3		-5		-8		-4
y	-1	0		2		-3		6	

RESPUESTAS TALLER

1.

a)	2,9	e)	4,93
b)	0,34	f)	0,057
c)	0,500	g)	-0,642 8
d)	0,6	h)	12,98

2.

a)	0,4	d)	-2	g)	-3,2
b)	-1,2	e)	9,9	h)	0,34
c)	1,4	f)	3,141 6	i)	0,13

4.

a)	x = 6/5	e)	x = -21	i)	z = 25/17
b)	x = -0,3	f)	x = -25/8	j)	z = 45/14
c)	y = -3	g)	y = 35/6	k)	x = -36
d)	x = 4	h)	x = 4	l)	x = -12

8.

a)	15,6	d)	0,43
b)	0,10	e)	7,032 4
c)	-1,519	f)	2,814

9.

a)	0,71	d)	-12
b)	-23,232	e)	3
c)	57,143	f)	19,44

10.

a)	113/120	d)	-33/5
b)	175/6	e)	-12,65
c)	-4	f)	44/15

11. a) 15,33 b) 0,303 c) 4,02 d) 2,748 6

2.3.7. Potenciación en $\mathbb{R}$.

Potencia n-ésima de x. Se llama potencia n-ésima de x al número que se obtiene al multiplicar "n" veces el factor x.

La potencia n-ésima de x se denota por x^n.

Siendo:

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdots\cdots x}_{\text{"n" veces}} = P$$

Donde: "x" es la base ; "n" es el exponente
x^n y P son las potencias.

I. Si la base es positiva cualquier potencia es positiva.

Ejemplo: $(2,4)^3 = (2,4)(2,4)\ (2,4) = 13,824$

II. Si la base es negativa y el exponente es un entero par, la potencia es positiva.

Ejemplo: $(-1,5)^4 = (-1,5)(-1,5)(-1,5)(-1,5) = 5,062\ 5$

III. Si la base es negativa y el exponente entero impar, la potencia es negativa.

Ejemplo: $(-1,2)^3 = (-1,2)(-1,2)(-1,2) = -1,728$

IV. Si **n** es un número Real mayor que cero, entonces: $0^n = 0$

Ejemplos: **a)** $0^6 = 0$ **b)** $0^{3,5} = 0$ **c)** $0^{3/5} = 0$

V. Si el exponente es 1, la potencia es igual a la base: $x^1 = x$

Ejemplos: **a)** $(3,6)^1 = 3,6$ **b)** $(-2,4)^1 = -2,4$ **c)** $\left(-\frac{5}{8}\right)^1 = -\frac{5}{8}$

VI. El producto de potencias de igual base es otra potencia de la misma base; cuyo exponente es la suma de los exponentes de los factores.

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

Ejemplos:

a) $3^2.3^4 = 3^{2+4} = 3^6$	c) $(x+1)^3.(x+1)^2 = (x+1)^{3+2} = (x+1)^5$
b) $x^4.x.x^2 = x^{4+1+2} = x^7$	d) $(x-3).(x-3) = (x-3)^{1+1} = (x-3)^2$

VII. El cociente de dos potencias de igual base es otra potencia de la misma base cuyo exponente es la diferencia de los dos exponentes de las potencias dadas.

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

Ejemplos:

a) $\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2$	c) $\frac{x^4}{x^7} = x^{4-7} = x^{-3}$
b) $\frac{x^9}{x^4} = x^{9-4} = x^5$	d) $\frac{(x-5)^7}{(x-5)} = x^{7-1} = x^6$

VIII. Si la base es diferente de cero, toda potencia de exponente cero es igual a 1.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ ;\ x \neq 0\ ;\ x^0 = 1$$

Ejemplos:

a) $(3,4)^0 = 1$ **b)** $\left(\frac{6}{10}\right)^0 = 1$ **c)** $(-0,8)^0 = 1$

> ***Observación:***
>
> *Cero elevado al exponente Cero (0^0); no representa número alguno.*

IX. Una potencia de exponente negativo es igual a una fracción cuyo numerador es 1 y cuyo denominador es la potencia dada pero con exponente positivo.

$$X^{-n} = \frac{1}{X^n}$$

Ejemplos:

a) $6^{-2} = \frac{1}{6^2}$ **b)** $(0{,}5)^{-3} = \frac{1}{(0{,}5)^3}$ **c)** $\left(\frac{3}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{3}$

X. La potencia de exponente "n" de un cociente es igual al cociente de las potencias de exponente "n" del dividendo entre el divisor.

$$\left(\frac{X}{Y}\right)^n = \frac{X^n}{Y^n}$$

Ejemplos:

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2}$	**b)** $\left(\frac{-2}{5}\right)^3 = \frac{(-2)^3}{(5)^3}$	**c)** $\left(\frac{x-y}{4}\right)^5 = \frac{(x-y)^5}{4^5}$
d) $\frac{x^2}{16} = \frac{x^2}{4^2} = \left(\frac{x}{4}\right)^2$	**e)** $\frac{27}{x^6} = \frac{3^3}{(x^2)^3} = \left(\frac{3}{x^2}\right)^3$	

XI. La potencia de otra potencia es igual a una potencia de la misma base dada y cuyo exponente es el producto de los exponentes dados.

$$(X^n)^m = X^{mn}$$

Ejemplos:

a) $(4^3)^2 = 4^{3.2} = 4^6$	**e)** $\left[(x^4)^3\right]^2 = x^{4.3.2} = x^{24}$
b) $(x^5)^3 = x^{5.3} = x^{15}$	**f)** $(x^{y/6})^3 = x^{\frac{3y}{6}} = x^{y/2}$
c) $(6^2)^{x+1} = 6^{2(x+1)}$	**g)** $(x^{-8})^{\frac{1}{4}} = x^{-8\cdot\frac{1}{4}} = x^{-2}$
d) $(3^{5/4})^2 = 6^{\frac{5}{4}\cdot 2} = 3^{\frac{10}{4}}$	**h)** $(x^{-3})^{-2} = x^{(-3)\cdot(-2)} = x^6$

XII. La potencia de exponente "n" de un producto es igual al producto de las potencias de exponente "n" de los factores.

$$(X.Y)^n = X^n.Y^n$$

Ejemplos:

a) $(5x)^3 = 5^3.x^3 = 125x^3$

b) $\left(\frac{5}{3}x\right)^2 = \frac{5^2}{3^2}.x^2 = \frac{25}{9}x^2$

e) $\left(\frac{-2}{5}x^2y^3\right)^3 = \frac{-2^3}{5^3}x^6y^9 = \frac{-8}{125}x^6y^9$

f) $\left(x^5y^3z^{-2}\right)^4 = x^{20}.y^{12}.z^{-8}$

XIII. Si dos potencias son iguales y tienen la misma base, entonces sus exponentes son iguales.

Si: $X^{n} = X^{m}$; entonces: $n = m$

Ejemplo 1:

Si: $3^{x-2} = 3^3$; entonces:

$x - 2 = 3 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 5}$

Ejemplo 2:

Si: $16^x = 2$; entonces:

$\left(2^4\right)^x = 2^1$

$2^{4x} = 2^1 \Rightarrow 4x = 1$

$\therefore \boxed{x = 1/4}$

Ejemplo 3:

Si: $25^x = 125$; entonces:

$\left(5^2\right)^x = 5^3$

$5^{2x} = 5^3 \Rightarrow 2x = 3$

$\therefore \boxed{x = 3/2}$

Ejemplo 4:

Si: $\frac{1}{16} = \left(\frac{1}{64}\right)^{2x}$; entonces:

$\frac{1}{4^2} = \left(\frac{1}{4^3}\right)^{2x}$

$4^{-2} = \left(4^{-3}\right)^{2x}$

$4^{-2} = 4^{-6x} \Rightarrow -2 = -6x$

$\frac{-2}{-6} = x$

$\therefore \boxed{1/3 = x}$

Ejemplo 5:

Si: $(x-3)^4 = (x-3)^{8y}$; entonces:

$4 = 8y$

$\frac{4}{8} = y \Rightarrow \therefore \boxed{\frac{1}{2} = y}$

XIV. Si dos potencias son iguales y tienen el mismo exponente, entonces las bases son iguales.

Si: $X^{n} = Y^{n}$; entonces: $X = Y$

Ejemplo 1:

Si: $(x+3)^6 = 5^6$; entonces:

$x+3=5 \Rightarrow \therefore \boxed{x=2}$

Ejemplo 2:

Si: $(z-6)^3 = 64$; entonces:

$(z-6)^3 = 4^3 \Rightarrow z-6=4$

$\therefore \boxed{z=10}$

Ejemplo 3:

Si: $(y+4)^4 = 16$; entonces:

$(y+4)^4 = 2^4 \Rightarrow (y+4)=2$

$\therefore \boxed{y=-2}$

Ejemplo 4:

Si: $(x-3)^4 = 1$; entonces:

$(x-3)^4 = 1^4 \Rightarrow x-3=1$

$\therefore \boxed{x=4}$

Ejemplo 5:

Si: $(x+6)^3 = -1$; entonces:

$(x+6)^3 = (-1)^3 \Rightarrow x+6=-1$

$\therefore \boxed{x=-7}$

Ejemplo 6:

Si: $(x+4)^7 = 1$; entonces:

$(x+4)^7 = 1^7 \Rightarrow x+4=1$

$\therefore \boxed{x=-3}$

Observación:

*Es necesario advertir que si el exponente es **par**, las ecuaciones relacionadas con la propiedad **(XIV)** tiene dos raices reales.*

Ejemplo 1:

Si: $(x+3)^2 = 81$

Entonces: $(x+3)^2 = 9^2 = (\pm 9)^2$

Donde:

i) $x+3=+9 \Rightarrow \boxed{x=6}$

ii) $x+3=-9 \Rightarrow \boxed{x=-12}$

Ejemplo 1:

Si: $(x+1)^4 = 16$

Entonces: $(x+1)^4 = 2^4 = (\pm 2)^4$

Donde:

i) $x+1=+2 \Rightarrow \boxed{x=1}$

ii) $x+1=-2 \Rightarrow \boxed{x=-3}$

Simplificaciones:

Para simplificar las siguientes expresiones debemos hacer uso de las propiedades de las potencias, veamos:

Ejemplo 1:

Simplificar: $\left(\dfrac{42x^8y^3z^4}{7x^5y^2z^3}\right)$

Resolución:

La expresión dada, se puede escribir así:

$$\frac{42}{7}\cdot\frac{x^8}{x^5}\cdot\frac{y^3}{y^2}\cdot\frac{z^4}{z^3} \Rightarrow 6.x^{8-5}.y^{3-2}.z^{4-3} \Rightarrow 6x^3y^1z^1 = \boxed{6x^3yz}$$

Ejemplo 2:

Simplificar: $\left(\dfrac{124x^{10}y^3z}{68x^8y^5z^3}\right)$

Resolución:

La expresión dada, se puede escribir así.

$$\frac{124}{68}\cdot\frac{x^{10}}{x^8}\cdot\frac{y^3}{y^5}\cdot\frac{z^1}{z^3} \Rightarrow \frac{62}{34}.x^{10-8}.y^{3-5}.z^{1-3}$$

$$\frac{31}{17}x^2y^{-2}z^{-2} = \frac{31}{17}x^2\cdot\frac{1}{y^2}\cdot\frac{1}{z^2} = \boxed{\frac{31x^2}{17y^2z^2}}$$

Ejemplo 3:

Simplificar: $\left[\dfrac{(3^4x^9)^3y^8z^{-6}}{(3^2x^5)^6y^5z^3}\right]^2$

Resolución:

$$\left[\frac{(3^4x^9)^3y^8z^{-6}}{(3^2x^5)^6y^5z^3}\right]^2 = \left[\frac{3^{12}x^{27}y^8z^{-6}}{3^{12}x^{30}y^5z^3}\right]^2 = \left[x^{27-30}y^{8-5}z^{-6-3}\right]^2$$

$$= \left[x^{-3}y^3z^{-9}\right]^2$$

$$= x^{-6}y^6z^{-18} = \frac{1}{x^6}\cdot y^6\cdot\frac{1}{z^{18}} = \boxed{\frac{y^6}{x^6z^{18}}}$$

Ejemplo 4:

Simplificar: $\left[\dfrac{(3^2x^3)^4y^3}{81x^{-3}y^8}\right]^2$

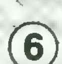
Resolución:

$$\left[\frac{(3^2x^3)^4y^3}{81x^{-3}y^8}\right]^2 = \left[\frac{3^8x^{12}y^3}{3^4x^{-3}y^8}\right]^2 = \left[3^{8-4}x^{12-(-3)}y^{3-8}\right]^2$$

$$= \left[3^4x^{15}y^{-5}\right]^2 = \left[81x^{15}\cdot\frac{1}{y^5}\right]^2$$

$$= 81^2x^{30}\cdot\frac{1}{y^{10}} = \boxed{\frac{6\,561x^{30}}{y^{10}}}$$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 

1. Reducir cada una de las expresiones siguientes:

a) $3x^5y\,(6x^2y^3) =$	f) $(-8x^3y^4)^2 =$
b) $-2x^3z^2\,(-7x^{-3}z^{-1}) =$	g) $(-2x^{-2}y^3z^{-4})^3 =$
c) $12x^4y^{-6}z^2\,(-3x^2y^3z^{-3}) =$	h) $(7xy^{-4}z^6)^2 =$
d) $4x^{-3}y^8z^6\,(9x^{-2}y^{-6}z^3) =$	i) $(-2x^{-4}y^{-3}z^{-1})^{-3} =$
e) $123x^2y^3z^5\,(2x^4y^{-7}z^{-2}) =$	j) $(-3x^6y^3z^{-4})^4 =$

2. Por simple observación de la base y el exponente, determina si cada potencia es mayor o menor que cero. Escribe en cada espacio libre uno de los símbolos > ; <

a) $(-2)^3 \square\, 0$	d) $(-5)^{-2} \square\, 0$	g) $0 \square \left(\frac{-3}{2}\right)^3$
b) $2^4 \square\, 0$	e) $\left(\frac{-3}{4}\right)^3 \square\, 0$	h) $0 \square \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$
c) $6^{-1} \square\, 0$	f) $\left(\frac{-5}{2}\right)^4 \square\, 0$	i) $0 \square\, (3,6)^0$

3. Efectuar:

a) $(7x^{1/2}y)(3x^2y^{1/3}) =$	f) $-16xy^{-2}z^{4/9}(-7x^{-2/7}yz) =$
b) $(4x^3y^{2/5})(-6x^{1/6}y^{-1}) =$	g) $-8x^2y^{-3}z(2x^{-3}y^{2/5}z^{-2/3}) =$
c) $2x^4y^{-3}z(x^{-3}y^{5/2}z^{-2/3}) =$	h) $x^{-1}y^{-1/2}z^{-3/2}(-6x^4y^2z^{-1}) =$

4. Completa cada igualdad, de tal manera que el exponente sea positivo.

a) $5^{-2} =$	e) $\frac{7}{x^{-4}} =$	i) $\left(\frac{1}{-6}\right)^{-1} =$	m) $\left(\frac{3x}{y}\right)^{-1} =$
b) $x^{-7} =$	f) $\frac{-5}{x^{-2}} =$	j) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-1} =$	n) $\left(\frac{16}{9}\right)^{-1} =$
c) $(x+3)^{-1} =$	g) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1} =$	k) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-1} =$	ñ) $\frac{1}{(x-4)^{-2}} =$
d) $(3x+1)^{-1} =$	h) $\left(-\frac{4}{3}\right)^{-2} =$	l) $\frac{1}{3^{-4}} =$	o) $\left(-\frac{3}{x}\right)^{-2} =$

5. Utiliza las propiedades de la igualdad de potencias y halla en cada caso el valor de x. (Resolver las ecuaciones).

a) $8^x = 16$	e) $\frac{1}{125} = \left(\frac{1}{5}\right)^x$	i) $3^{2x+1} = 81$	m) $0,2^{x+3} = 0,04$
b) $15^x = 225$	f) $\frac{1}{81} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	j) $32 = 2^{3-x}$	n) $\frac{1}{125} = 5^{-2x}$
c) $27^x = 81$	g) $\left(\frac{1}{49}\right)^{x+3} = 7$	k) $4^{3x-2} = 2$	ñ) $(x-7)^3 = -8$
d) $64^x = \frac{1}{4}$	h) $9^{x-4} = 81$	l) $0,5^x = 0,062\ 5$	o) $(x+6)^3 = -1$

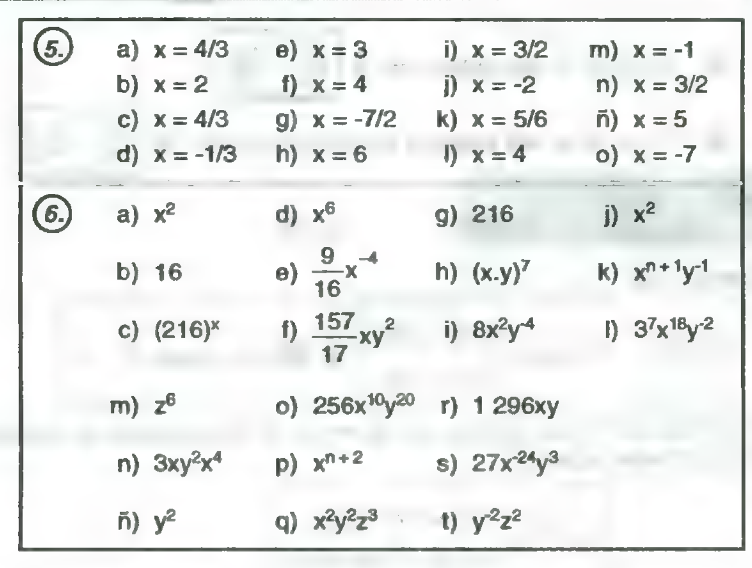
6. Aplica las propiedades de la potencia y simplifica cada expresión siguiente:

a) $x^{2-y}.x^y =$	h) $\frac{49x^{13}y^{-1}}{(7x^3y^{-4})^2} =$	ñ) $\frac{(3x^{-2}y^4)^3}{27x^{-6}y^{10}} =$
b) $\frac{4^{x+5}}{4^{x+3}} =$	i) $\frac{(4x)^3y^{12}}{8x\ y^{16}} =$	o) $\frac{(2x^2y^3)^2}{(8x^3y^7)^{-2}} =$
c) $(6^{x/3})^9 =$	j) $x^{n-3}.x^{5-n} =$	p) $x^{-n+3}.x^{2n-4}.x^3 =$
d) $(x^{3/2})^4 =$	k) $\frac{x^{3n+2}y^5}{x^{2n+1}y^6} =$	q) $\frac{(-4x^{-2}y^5)^2(-2z^3)^3}{128x^{-6}y^8z^6} =$
e) $\frac{72x^8}{128x^{12}} =$	l) $\frac{(-81x^3y\ )^4}{(27x^{-2}y^2)^3} =$	r) $\frac{(6^2x^3)^4y^4}{(36x)^2(y\ x^3)^3} =$
f) $\frac{628x^4y^3}{68x^3y} =$	m) $z^{a+8}.z^{a-5}.z^{3-2a} =$	s) $\left(\frac{36x^{-6}y^4}{12x^2y^3}\right)^3 =$
g) $\frac{6^{x-2}}{6^{x-5}} =$	n) $\frac{(3x^3y^2z^4)^3}{9x^8y^4z^8} =$	t) $\frac{(3x^{-1}y^{-2}z\ )^4}{81x^{-4}y^{-6}z^2} =$

RESPUESTAS TALLER



3. a) $21x^{5/2}y^{4/3}$	c) $2xy^{-1/2}z^{-1/3}$	e) $-16x^{-1}y^{-13/5}z^{1/3}$
b) $-24x^{17/6}.y^{-3/5}$	d) $112x^{5/7}.y^{-1}z^{13/9}$	f) $-6x^3y^{3/2}z^{-5/2}$



5.

a) $x = 4/3$	e) $x = 3$	i) $x = 3/2$	m) $x = -1$
b) $x = 2$	f) $x = 4$	j) $x = -2$	n) $x = 3/2$
c) $x = 4/3$	g) $x = -7/2$	k) $x = 5/6$	ñ) $x = 5$
d) $x = -1/3$	h) $x = 6$	l) $x = 4$	o) $x = -7$

6.

a) x^2	d) x^6	g) 216	j) x^2
b) 16	e) $\frac{9}{16}x^{-4}$	h) $(x.y)^7$	k) $x^{n+1}y^{-1}$
c) $(216)^x$	f) $\frac{157}{17}xy^2$	i) $8x^2y^{-4}$	l) $3^7x^{18}y^{-2}$
m) z^6	o) $256x^{10}y^{20}$	r) $1\,296xy$	
n) $3xy^2x^4$	p) x^{n+2}	s) $27x^{-24}y^3$	
ñ) y^2	q) $x^2y^2z^3$	t) $y^{-2}z^2$	

2.3.8. Radicación en $\mathbb{R}$:

Sabemos que la raíz n-ésima de x, denotada por $\sqrt[n]{x}$ es el número "r" si se cumple que: $r^n = x$.

$$\sqrt[n]{x} = r \Rightarrow \boxed{r^n = x}$$

Se dice que:

- $\sqrt[n]{x}$: **es el radical**
- x : **cantidad subradical o radicando**
- n : **es el indice ; r : es la raíz**

Radical: Es la raiz indicada de un número.

Signo radical: Es el símbolo mediante el cual se indica la operación: $\sqrt{\ }$

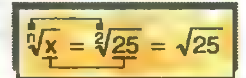
Radicando o cantidad subradical: Es el número cuya raíz se quiere hallar.

Indice de la raíz: Es igual al exponente a que hay que elevar la raíz para obtener el radicando.

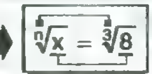
Radical es la raiz indicada de un número y en general de una expresión algebraica como por ejemplo: $\sqrt[3]{x}$; $\sqrt{z^5}$

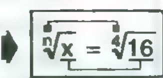
*** En la expresión:** $\sqrt[n]{x}$

Si: n = 2 ; **es la raiz cuadrada,** y se acostumbra a omitir el indice así:



$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[2]{25} = \sqrt{25}$$

Si: n = 3, es la raiz cúbica así: 

Si: n = 4; es la raiz cuarta y así sucesivamente. 

Ejemplo: Hallar:

a) $\sqrt{64}$ b) $\sqrt[3]{8}$

Resolución:

a) $\sqrt{64}=\pm 8$ pues: $\begin{cases}(+8)^2=64\\(-8)^2=64\end{cases}$	b) $\sqrt[3]{8}=2$; pues: $2^3=8$

A partir de las Reglas sobre el uso de signos de las potencias de exponente natural y base negativa:

$$(-x)^n=\begin{cases}x^n\text{ ; si: "n" es par}\\-x^n\text{ ; si: "n" es impar}\end{cases}$$

Tenemos:

(A.) $\begin{cases}\sqrt[3]{-27}=-3\text{; ya que: }(-3)^3=-3^3=-27\\\sqrt[3]{27}=3\text{; ya que: }(3)^3=27\end{cases}$

- *Toda raiz de indice impar de un número tiene el mismo signo que el radicando.*

(B.) $\begin{cases}\sqrt[4]{81}=\pm 3\text{; ya que: }\begin{cases}(+3)^4=81\\(-3)^4=81\end{cases}\\\sqrt{16}=\pm 4\text{; ya que: }\begin{cases}(+4)^2=16\\(-4)^2=16\end{cases}\end{cases}$

- *Toda raiz de índice par de un número positivo tiene el doble signo ±*

Ejemplo 1:

Resolver la ecuación:

$$x^2=25$$

Resolución:

$x^2=25$

$x=\pm\sqrt{25}\Rightarrow\therefore\boxed{x=\pm 5}$

Ejemplo 2:

Resolver las ecuaciones:

$$x^2-\frac{25}{9}=0$$

Resolución:

La Ecuación dada se puede escribir así:

$$x^2=\frac{25}{9}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{25}{9}}\Rightarrow\therefore\boxed{x=\pm\frac{5}{3}}$$

Ejemplo 3:

Resolver la ecuación: $(x-3)^2 = 36$

Resolución:

$$(x-3)^2 = 36 \Rightarrow x-3 = \pm\sqrt{36} \Rightarrow x-3 = \pm 6$$

Donde:

i) $x - 3 = +6 \Rightarrow \boxed{x = 9}$

ii) $x - 3 = -6 \Rightarrow \boxed{x = -3}$

C.

$\sqrt{-9}$ **no es Real**, pues cualquier número real positivo o negativo elevado al cuadrado, da un resultado positivo.

- **Toda raiz de índice par y radicando negativo no es Real.** (El resultado de este caso se hace en los números complejos).
- **Valor Aritmético** de un radical es el valor positivo del mismo, si existe.
- **Valor Algebraico** de un radical es todo número que elevado a la potencia marcada por el índice da el radicando.

Así sea: $\sqrt{4}$
- Su valor aritmético es: 2
- Sus valores algebraicos son: +2 y -2

* Carecen de valor aritmético: $\sqrt{-8}$; $\sqrt[4]{-16}$

2.3.8.1. Transformación de Radicales

Teorema Fundamental: Si se multiplica o divide el índice de la raiz y el exponente del radicando por un mismo número entero, el valor aritmético del radical no varía.

Demostración:

Sea el radical: $\sqrt[m]{A^n} = B$ .... (I) ➧ Por definición de la raíz: $A^n = B^m$

Elevamos los dos miembros de la igualdad a una potencia q:

$$\left(A^n\right)^q = \left(B^m\right)^q \Rightarrow A^{n.q} = B^{m.q}$$

Extraemos la raiz de índice; m.q

$$\sqrt[m.q]{A^{n.q}} = \sqrt[m.q]{B^{m.q}} = B \text{ .... (II)}$$

Reemplazamos (II) en (I): ∴ $\sqrt[m]{A^n} = \sqrt[m.q]{B^{m.q}}$

Ejemplo 1: *Transformar el radical $\sqrt{3}$ en otro de índice 4.*

Resolución:

$$\sqrt{3}=\sqrt[2]{3^1}=\sqrt[2\times2]{3^{1\times2}}=\boxed{\sqrt[4]{3^2}}$$

Ejemplo 2: *Transformar el radical $\sqrt[3]{9}$ en otro de índice 6.*

Resolución:

$$\sqrt[3]{9}=\sqrt[3\times2]{9^2}=\boxed{\sqrt[6]{9^2}}$$

Ejemplo 3: *Transformar el radical $\sqrt[5]{x^2}$ en otro de índice 10.*

Resolución:

$$\sqrt[5]{x^2}=\sqrt[5.2]{x^{2.2}}=\boxed{\sqrt[10]{x^4}}$$

Ejemplo 4: *Transformar el radical $\sqrt[20]{6}$ en otro de índice 5.*

Resolución:

$$\sqrt[20]{6}=\sqrt[20/4]{6^{1/4}}=\boxed{\sqrt[5]{6^{1/4}}}$$

Ejemplo 5: *Transformar el radical $\sqrt[12]{x^{20}}$ en otro de índice 3.*

Resolución:

$$\sqrt[12]{x^{20}}=\sqrt[12/4]{x^{20/4}}=\boxed{\sqrt[3]{x^5}}$$

Ejemplo 6: *Transformar el radical $\sqrt[16]{x^{12}}$ en otro de índice 4.*

Resolución:

$$\sqrt[16]{x^{12}}=\sqrt[16/4]{x^{12/4}}=\boxed{\sqrt[4]{x^3}}$$

2.3.8.2. Simplificación de Radicales.

Para simplificar un radical se divide el índice del radical y el exponente del radicando por sus factores comunes.

Ejemplo 1:

Simplificar: $\sqrt[6]{324}$

Resolución:

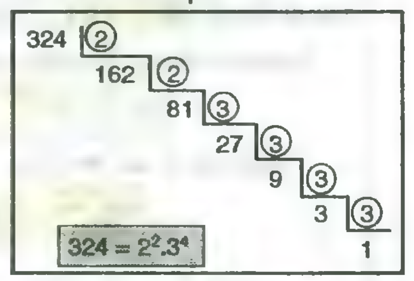
Descomponemos el radicando en producto de factores primos.

$$\sqrt[6]{324}=\sqrt[6]{2^2.3^4}=\sqrt[6]{2^{1.\boxed{2}}.3^{2.\boxed{2}}}$$

$$=\sqrt[6]{(2^1.3^2)^{\boxed{2}}}$$

$$=\sqrt[6:2]{(2^1.3^2)^{\boxed{2}:2}}$$

$$=\sqrt[3]{2^1.3^2}=\boxed{\sqrt[3]{18}}$$



Ejemplo 2:

Simplificar: $\sqrt[4]{400}$

Resolución:

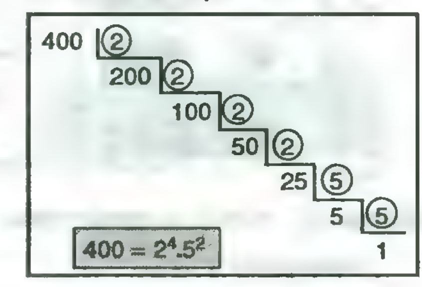
Descomponemos el radicando en producto de factores primos:

$$\sqrt[4]{400} = \sqrt[4]{2^4.5^2} = \sqrt[4]{2^{2.\boxed{2}}.5^{1.\boxed{2}}}$$

$$= \sqrt[4]{(2^2.5^1)^{\boxed{2}}}$$

$$= \sqrt[4:2]{(2^2.5^1)^{\boxed{2}:2}}$$

$$= \sqrt[2]{2^2.5} = \boxed{\sqrt{20}}$$



Ejemplo 3:

Simplificar: $\sqrt{324}$

Resolución:

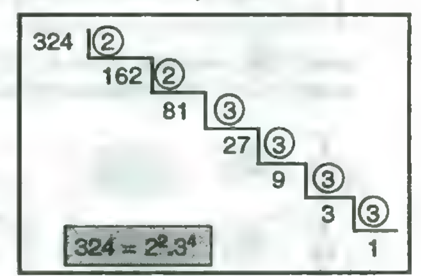
Descomponemos el radicando en producto de factores primos.

$$\sqrt{324} = \sqrt{2^2.3^4} = \sqrt{2^{\boxed{2}.1}.3^{\boxed{2}.2}}$$

$$= \sqrt[2]{(2^1.3^2)^{\boxed{2}}}$$

$$= \sqrt[2:2]{(2^1.3^2)^{\boxed{2}:2}}$$

$$= 2^1.3^2 = \boxed{18}$$



2.3.8.3. Reducción de Radicales a Indice Común:

Para reducir radicales a indice común se elige como tal el **M.C.M.** de los Índices y se eleva cada radicando al cociente de dicho **M.C.M.** por el índice respectivo.

Ejemplo 1: Reducir a común índice: $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{5}$ y $\sqrt[4]{7}$

Resolución:

El M.C.M. de los índices 2; 3 y 4 es 12; veamos:

2 - 3 - 4	2
1 - 3 - 2	2
1 - 3 - 1	3
1 - 1 - 1	

$2\times2\times3 = 12$

El **M.C.M.** (2, 3 y 4) = 12

Luego; 12 se divide entre el índice propio de cada radical y el cociente se multiplica por el exponente del subradical osea:

$$\sqrt{3} = \sqrt[12]{3^6} = \boxed{\sqrt[12]{729}}$$
$$\sqrt[3]{5} = \sqrt[12]{5^4} = \boxed{\sqrt[12]{625}}$$
$$\sqrt[4]{7} = \sqrt[12]{7^3} = \boxed{\sqrt[12]{343}}$$

Luego: $\sqrt[12]{729}$; $\sqrt[12]{625}$ y $\sqrt[12]{343}$ son respectivamente equivalente a: $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{5}$ y $\sqrt[4]{7}$

Ejemplo 2: Reducir a común índice: $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[6]{9}$ y $\sqrt[9]{2}$

Resolución:

El **M.C.M.** de los índices: 3, 6 y 9 es 18; veamos:

3 - 6 - 9	2	
3 - 3 - 9	3	2×3×3 = 18
1 - 1 - 3	3	
1 - 1 - 1		



Luego; 18 se divide entre el índice propio de cada radical y el cociente se multiplica por el exponente del subradical osea:

$$\sqrt[3]{3} = \sqrt[18]{3^6} = \boxed{\sqrt[18]{729}}$$
$$\sqrt[6]{9} = \sqrt[18]{9^3} = \boxed{\sqrt[18]{729}}$$
$$\sqrt[9]{2} = \sqrt[18]{2^2} = \boxed{\sqrt[18]{4}}$$

Luego: $\sqrt[18]{729}$; $\sqrt[18]{729}$ y $\sqrt[18]{4}$ son respectivamente equivalente a: $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[6]{9}$ y $\sqrt[9]{2}$

Ejemplo 3: Reducir a común índice: $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{11}$ y $\sqrt[5]{13}$

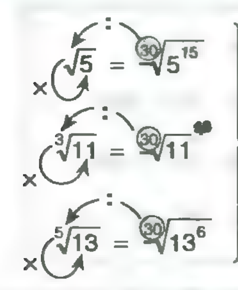
Resolución:

El **M.C.M.** de los índices: 2, 3 y 5 es 30; veamos:

2 - 3 - 5	2	
1 - 3 - 5	3	2×3×5 = 30
1 - 1 - 5	5	
1 - 1 - 1		

El **M.C.M.** (3, 6 y 9) = 30

Luego; 30 se divide entre el índice propio de cada radical y el cociente se multiplica por el exponente del subradical osea:



Luego: $\sqrt[30]{5^{15}}$; $\sqrt[30]{11^{10}}$ y $\sqrt[30]{11^{10}}$
son respectivamente equivalente a:
$\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{11}$ y $\sqrt[5]{13}$

2.3.9. Potenciación de Exponente Fraccionario:

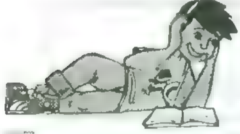
Una potencia de exponente fraccionario es equivalente a un radical cuyo indice es el denominador del exponente y cuyo radicando es la base elevada al numerador del exponente.

Es decir: $A^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{A^m}$

Esto nos permite poner raices en forma de potencias (la radicación es operación inversa de la potenciación). Así:

$\sqrt[4]{15} = 15^{1/4}$; $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2^{4/3}$; $\sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{2^2} = 2^{2/5}$

Nota: Las reglas dadas para la potenciación con exponentes naturales y enteros se cumplen igualmente para exponentes fraccionarios.



TALLER DE EJERCICIOS Nº 7

1. Aplica la definición de raiz n-ésima de una potencia, completa las igualdades siguientes:

a) $\sqrt[4]{x^3}$	e) $3^{1/2} =$	i) $(\sqrt[3]{x})^4 =$	m) $\sqrt{11} =$
b) $\sqrt[3]{y^2} =$	f) $5^{3/4} =$	j) $(\sqrt[5]{y})^2 =$	n) $\sqrt[3]{2^6} =$
c) $\sqrt{z^7} =$	g) $x^{3/8} =$	k) $(\sqrt[7]{x})^3 =$	ñ) $\sqrt[4]{2^{12}} =$
d) $\sqrt[5]{x^8} =$	h) $y^{7/2} =$	l) $(\sqrt{6})^6 =$	o) $\sqrt[6]{3^9} =$

2. Halla los valores de "x" en cada ecuación siguiente (resolver las ecuaciones).

a) $x^2 = 64$	e) $x^2 - 81 = 0$	i) $(x - 2)^2 = 9$
b) $x^2 = 100$	f) $x^2 - \frac{16}{36} = 0$	j) $(x + 7)^2 = 625$
c) $x^2 = \frac{9}{25}$	g) $x^2 - 144 = 0$	k) $(x + 11)^2 = 169$
d) $x^2 = \frac{1}{16}$	h) $x^2 - \frac{49}{625} = 0$	l) $(x - 9)^2 - 121 = 0$

3. Transformar cada uno de los radicales siguientes, en otros de índice 8; 16; 24 y 32.

a) $\sqrt{13}$	b) $\sqrt[4]{7}$	c) $\sqrt{11}$

4. Transformar el radical $\sqrt[42]{3^{12}}$; en otro de índice 7.

5. Transformar el radical $\sqrt[56]{6^{28}}$; en otro de índice 4.

6. Transformar el radical $\sqrt[24]{5^{18}}$; en otro de índice 6.

7. Transformar el radical $\sqrt[60]{2^{36}}$; en otro de índice 10.

8. Simplificar los radicales siguientes:

a) $\sqrt[6]{400} =$	c) $\sqrt[6]{8\,000} =$	e) $\sqrt[9]{1\,728} =$
b) $\sqrt{11\,664} =$	d) $\sqrt[3]{1\,728} =$	f) $\sqrt[8]{20\,736} =$

9. En cada uno de los ejercicios siguientes, reduce al mínimo común índice los radicales dados:

a) $\sqrt[3]{2}$ y $\sqrt[4]{3}$	e) $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[6]{8}$ y $\sqrt[9]{6}$	i) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{\frac{2}{3}}$ y $\sqrt[4]{\frac{1}{4}}$
b) $\sqrt[4]{6}$ y $\sqrt[6]{4}$	f) $\sqrt[4]{5}$; $\sqrt[5]{6}$ y $\sqrt{7}$	j) $\sqrt[4]{2}$; $\sqrt[3]{6}$ y $\sqrt[12]{4}$
c) $\sqrt{5}$ y $\sqrt[3]{2}$	g) $\sqrt[4]{10}$; $\sqrt[4]{2}$ y $\sqrt[3]{5}$	k) $\sqrt[3]{9}$; $\sqrt[3]{11}$ y $\sqrt[9]{4}$
d) $\sqrt{7}$ y $\sqrt[6]{5}$	h) $\sqrt[5]{2}$; $\sqrt[4]{3}$ y $\sqrt[10]{5}$	l) $\sqrt[10]{2}$; $\sqrt[15]{6}$ y $\sqrt[20]{3}$

RESPUESTAS TALLER

(2.)

f) $x = \pm\, 2/3$ i) $x = -1$ y $x = 5$

g) $x = \pm\, 12$ j) $x = -32$ y $x = 18$

h) $x = \pm\, 7/25$ k) $x = -24$ y $x = 2$

l) $x = -2$ y $x = 20$

(6.)

a) $\sqrt[3]{20}$ d) 12

b) 108 e) $\sqrt[3]{12}$

c) $2\sqrt{5}$ f) $2\sqrt{3}$

(9.)

a) $\sqrt[12]{16}$ y $\sqrt[12]{27}$

b) $\sqrt[12]{216}$ y $\sqrt[12]{16}$

c) $\sqrt[-6]{\dfrac{1}{125}}$ y $\sqrt[-6]{4}$

d) $\sqrt[6]{343}$ y $\sqrt[6]{5}$

e) $\sqrt[18]{4\,096}$; $\sqrt[18]{512}$ y $\sqrt[18]{36}$

f) $\sqrt[20]{5^5}$; $\sqrt[20]{6^4}$ y $\sqrt[20]{7^{10}}$

g) $\sqrt[-12]{10^{-2}}$; $\sqrt[-12]{2^{-3}}$ y $\sqrt[-12]{5^4}$

h) $\sqrt[-20]{\dfrac{1}{16}}$; $\sqrt[-20]{7\,776}$ y $\sqrt[-20]{\dfrac{1}{144}}$

i) $\sqrt[12]{\dfrac{1}{16}}$; $\sqrt[12]{\left(\dfrac{2}{3}\right)^6}$ y $\sqrt[12]{\dfrac{1}{64}}$

j) $\sqrt[12]{8}$; $\sqrt[12]{1\,296}$ y $\sqrt[12]{4}$

k) $\sqrt[9]{729}$; $\sqrt[9]{1\,331}$ y $\sqrt[9]{4}$

l) $\sqrt[60]{64}$; $\sqrt[60]{1\,296}$ y $\sqrt[60]{27}$

2.4. Radicales:

Se denomina radicales a los números irracionales expresados en la forma $\sqrt[n]{x}$.

Son radicales como por ejemplo: $\sqrt{7}$; $\sqrt[3]{-4}$; $\sqrt[5]{9}$; $\sqrt[6]{11}$; etc.

2.4.1. Grado de un radical:

El grado de un radical se obtiene del índice de la raiz, así:

a) $\sqrt{12}$; es un radical de segundo grado.

b) $\sqrt[3]{-10}$; es un radical de tercer grado.

c) $\sqrt[4]{8}$; es un radical de cuarto grado.

d) $\sqrt[15]{2}$; es un radical de grado quince

2.4.2. Coeficiente de un Radical:

Es el número que precede a un radical. El coeficiente es un factor que multiplica al radical.

En $3\sqrt{2}$ el coeficiente es 3 é indica que: $3\sqrt{2} = 3.\sqrt{2}$

En $-6\sqrt[3]{2}$ el coeficiente es -6 é indica que: $-6\sqrt[3]{2} = -6.\sqrt[3]{2}$

2.4.3. Radicales Semejantes:

Dos o más radicales son semejantes si son del mismo grado y tienen la misma cantidad subradical.

Ejemplos:

$\sqrt{8}\,;\,2\sqrt{8}\,;\,-4\sqrt{8}$ ➧ ***Son radicales semejantes***

$3\sqrt[4]{2}\,;\,-6\sqrt[4]{2}\,;\,\frac{3}{4}\sqrt[4]{2}\,;\,-\sqrt[4]{2}$ ➧ ***Son radicales semejantes***

2.4.4. Operaciones con Radicales:

(A.) Adición y Sustracción de Radicales.

- De Radicales Semejantes:

Ejemplo 1: Hallar: $E = \sqrt{32} + \sqrt{50} - \sqrt{8}$

Resolución:

Descomponemos cada una de las cantidades subradicales en dos factores, de modo que uno de ellos tenga raíz exacta, veamos:

$$E = \sqrt{32} + \sqrt{50} - \sqrt{8} = \sqrt{16\times2} + \sqrt{25\times2} - \sqrt{4\times2}$$

$$= \sqrt{16}\times\sqrt{2} + \sqrt{25}\times\sqrt{2} - \sqrt{4}\times\sqrt{2}$$

$$= 4\times\sqrt{2} + 5\times\sqrt{2} - 2\times\sqrt{2}$$

$$= (4+5-2)\times\sqrt{2} \Rightarrow \therefore \boxed{E = 7\sqrt{2}}$$

Recuerda que: $\sqrt[n]{A\times B} = \sqrt[n]{A}\times\sqrt[n]{B}$

Ejemplo 2: Hallar el resultado de: $B = \sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{75}$

Resolución:

Para sumar radicales semejantes basta separar el radical como factor común de todos los términos y sumar dichos términos.

$$B = \sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{75} = \sqrt{4\times3} - \sqrt{9\times3} + \sqrt{25\times3}$$

$$= \sqrt{4}\times\sqrt{3} - \sqrt{9}\times\sqrt{3} + \sqrt{25}.\sqrt{3}$$

$$= 2\times\sqrt{3} - 3\times\sqrt{3} + 5\times\sqrt{3}$$

$$= (2-3+5)\times\sqrt{3} \Rightarrow \therefore \boxed{B = 4\sqrt{3}}$$

Para efectuar radicales semejantes basta separar el radical como factor común de todos los términos y sumar dichos términos.

$$a\sqrt[n]{x} + b\sqrt[n]{x} - c\sqrt[n]{x} = (a+b-c)\sqrt[n]{x}$$

Ejemplo: Efectuar: $7\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$

Resolución: $7\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = (7+3-5)\sqrt{2} = \boxed{5\sqrt{2}}$

Ejemplo 3: Hallar el resultado de: $M = \frac{3}{4}\sqrt[3]{54} - \frac{5}{6}\sqrt[3]{16} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{250}$

Resolución:

$$M = \frac{3}{4}\sqrt[3]{54} - \frac{5}{6}\sqrt[3]{16} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{250} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{27\times 2} - \frac{5}{6}\sqrt[3]{8\times 2} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{125\times 2}$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{2} - \frac{5}{6}\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{2} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{125}\times\sqrt[3]{2}$$

$$= \frac{3}{4}\times 3\times\sqrt[3]{2} - \frac{5}{6}\times 2\times\sqrt[3]{2} + \frac{1}{2}\times 5\times\sqrt[3]{2}$$

$$= \frac{9}{4}\times\sqrt[3]{2} - \frac{5}{3}\times\sqrt[3]{2} + \frac{5}{2}\times\sqrt[3]{2}$$

Damos común denominador a las fracciones:

$$\frac{9}{4} - \frac{5}{3} + \frac{5}{2} = \frac{3\times 9 - 4\times 5 + 6\times 5}{12} = \frac{27-20+30}{12} = \boxed{\frac{37}{12}}$$

$$= \left(\frac{9}{4} - \frac{5}{3} + \frac{5}{2}\right)\times\sqrt[3]{2} \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad \boxed{M = \frac{37}{12}\sqrt[3]{2}}$$

Ejemplo 4: Hallar el resultado de: $Q = 1{,}5\sqrt{14}.\sqrt{2} - \frac{1}{25}\sqrt{700} + 0{,}1\sqrt{7}$

Resolución:

$$Q = \frac{15}{10}\cdot\sqrt{14.2} - \frac{1}{25}\cdot\sqrt{700} + \frac{1}{10}\cdot\sqrt{7}$$

$$Q = \frac{15}{10}\cdot\sqrt{4\times 7} - \frac{1}{25}\cdot\sqrt{100\times 7} + \frac{1}{10}\cdot\sqrt{7}$$

$$Q = \frac{15}{10}\cdot\sqrt{4}\times\sqrt{7} - \frac{1}{25}\cdot\sqrt{100}\times\sqrt{7} + \frac{1}{10}\cdot\sqrt{7}$$

$$Q = \frac{15}{10}\cdot 2\sqrt{7} - \frac{1}{25}\cdot 10\sqrt{7} + \frac{1}{10}\cdot\sqrt{7} = 3\sqrt{7} - \frac{2}{5}\sqrt{7} + \frac{1}{10}\sqrt{7}$$

Recuerda que:

$$\sqrt[n]{A}.\sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{A\cdot B}$$

$$Q=\left(3-\frac{2}{5}+\frac{1}{10}\right)\times\sqrt{7}=\left(\frac{3.10-2.2+1}{10}\right)\times\sqrt{7}$$

$$=\frac{27}{10}\times\sqrt{7}\ \Rightarrow\ \therefore\ \boxed{Q=2{,}7\sqrt{7}}\ \textbf{Rpta.}$$

B.) Multiplicación de Radicales.

- ***De Radicales Homogéneos (De igual índice).***

Sean los radicales de igual índice: $\sqrt[n]{A}$ y $\sqrt[n]{B}$; se tiene:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt[n]{A}=r\ &\Rightarrow\ A=r^n\\ \sqrt[n]{B}=s\ &\Rightarrow\ B=s^n\end{aligned}\right\}\ \textbf{(Multiplicamos miembro a miembro)}$$

$A.B=r^n.s^n$

$A.B=(r.s)^n$; extraemos la raiz n-ésima a ambos miembros:

$\sqrt[n]{A.B}=\sqrt[n]{(r.s)^n}$

$\sqrt[n]{A.B}=r.s$; sustituyendo r y s por su valor respectivo, obtenemos:

$\boxed{\sqrt[n]{A.B}=\sqrt[n]{A}.\sqrt[n]{B}}$ ó $\boxed{\sqrt[n]{A}.\sqrt[n]{B}=\sqrt[n]{A.B}}$

Esta igualdad nos dice:

El producto de radicales de igual índice es otro radical que tiene el mismo índice y por radicando el producto de los radicando de los factores.

Ejemplo 1: *Calcular:* $\sqrt{8}.\sqrt{2}$

Resolución:

$$\sqrt{8}.\sqrt{2}=\sqrt{8.2}=\sqrt{16}=\boxed{4}$$

Ejemplo 2: *Calcular:* $\sqrt[3]{4}.\sqrt[3]{16}$

Resolución:

$$\sqrt[3]{4}.\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{4.16}=\sqrt[3]{64}=\boxed{4}$$

Ejemplo 3: *Calcular:* $\sqrt[5]{2}.\sqrt[5]{4}.\sqrt[5]{4}$

Resolución:

$$\sqrt[5]{2}.\sqrt[5]{4}.\sqrt[5]{4}=\sqrt[5]{2.4.4}=\sqrt[5]{32}$$
$$=\sqrt[5]{2^5}=\boxed{2}$$

Ejemplo 4: *Halla el producto:*

$$\sqrt{5}\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$$

Resolución:

$$\sqrt{5}\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)=\sqrt{5}.\sqrt{2}+\sqrt{5}.\sqrt{5}$$
$$=\sqrt{5.2}+\sqrt{5.5}$$
$$=\sqrt{10}+\sqrt{25}=\boxed{\sqrt{10}+5}$$

Ejemplo 5: *Halla el producto:*

$$\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{3}\right)$$

Resolución:

$$\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{3}\right)=\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{3}$$
$$=\sqrt[3]{2.4}+\sqrt[3]{2.3}$$
$$=\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{6}=\boxed{2+\sqrt[3]{6}}$$

- **Multiplicación de Radicales No Homogéneos (Heterogéneos)**

Si los radicales no tienen igual índice se reducen previamente al mismo índice aplicando el Teorema fundamental.

$$\sqrt[m]{A}.\sqrt[p]{B}=\sqrt[mp]{A^p}.\sqrt[mp]{B^m}=\sqrt[mp]{A^p.B^m}$$

Ejemplo 1: Calcular: $\sqrt{5}.\sqrt[3]{2}$

Resolución:

$$\sqrt{5}.\sqrt[3]{2}=\sqrt[2]{5}.\sqrt[3]{2}=\sqrt[2.3]{5^3}.\sqrt[3.2]{2^2}=\sqrt[3.2]{5^3.2^2}=\sqrt[6]{5^3.2^2}$$

Ejemplo 2: Calcular: $\sqrt[3]{4}.\sqrt{6}.\sqrt[4]{2}$

Resolución:

Reducimos primero a común índice los radicandos, teniendo en cuenta que **M.C.M. (3, 2, 4) = 12**

3 - 2 - 4	2	
3 - 1 - 2	2	2×2×3 = (12)
3 - 1 - 1	3	
1 - 1 - 1		

∴ El **M.C.M.** (3, 2 y 4) = (12)

Luego:

$$\sqrt[3]{4}.\sqrt{6}.\sqrt[4]{2}=\sqrt[12]{4^4}.\sqrt[12]{6^6}\sqrt[12]{2^3}$$

$$=\sqrt[12]{4^4.6^6.2^3}$$

Ejemplo 3: Calcular: $2\sqrt[3]{2}.6\sqrt{5}.\sqrt[6]{3}$

Resolución:

$$2\sqrt[3]{2}.6\sqrt{5}.\sqrt[6]{3}=2.6\ \sqrt[3]{2}.\sqrt{5}.\sqrt[6]{3}$$

- Damos común índice a los radicando:

3 - 2 - 6	2	
3 - 1 - 3	3	2×3 = (6)
1 - 1 - 1		

∴ El **M.C.M.** (3, 2 y 6) = (6)

Luego:

$$2\sqrt[3]{2}.6\sqrt{5}.\sqrt[6]{3}=2.6\sqrt[6]{2^2}.\sqrt[6]{5^3}\sqrt[6]{3}$$

$$=12\sqrt[6]{2^2.5^3.3}$$

Como consecuencia de la Regla para multiplicar radicales, y leido el resultado de la derecha a izquierda, tenemos: $\sqrt[n]{A.B}=\sqrt[n]{A}.\sqrt[n]{B}$

La raiz enésima de un producto es igual al producto de las raices enésimas de sus factores.

• La descomposición del radical de un producto en producto de radicales tiene estas interesantes aplicaciones:

I. Extraer factores fuera del Signo Radical.

La igualdad anterior nos permite simplificar radicales cuando uno de los factores tiene raiz enésima exacta; pues se puede sacar fuera del signo radical.

Así:

a) $\sqrt{8}=\sqrt{4.2}=\sqrt{4}.\sqrt{2}$ $=\boxed{2.\sqrt{2}}$	d) $\sqrt[4]{80}=\sqrt[4]{16.5}=\sqrt[4]{16}.\sqrt[4]{5}$ $=\boxed{2.\sqrt[4]{5}}$
b) $\sqrt{54}=\sqrt{9.6}=\sqrt{9}.\sqrt{6}$ $=\boxed{3.\sqrt{6}}$	e) $\sqrt[5]{160}=\sqrt[5]{32.5}=\sqrt[5]{32}.\sqrt[5]{5}$ $=\boxed{2.\sqrt[5]{5}}$
c) $\sqrt[3]{-375}=\sqrt[3]{(-125)(3)}$ $=\sqrt[3]{(-125)}.\sqrt[3]{(3)}$ $=\boxed{-5.\sqrt[3]{3}}$	f) $\sqrt{432}=\sqrt{16.9.3}=\sqrt{16}.\sqrt{9}.\sqrt{3}$ $=4.3.\sqrt{3}$ $=\boxed{12.\sqrt{3}}$

Regla:

El factor que tiene raiz enésima exacta se extrae su raiz y el resultado se saca como factor común fuera del signo radical.

Ejemplo 1:

Sacar todos los factores posibles, fuera del radical siguiente: $\sqrt{2^5.7^3}$

Resolución:

$$\sqrt{2^5.7^3}=\sqrt{2^2.2^2.2^1.7^2.7^1}=\sqrt{2^2}.\sqrt{2^2}.\sqrt{2^1}.\sqrt{7^2}.\sqrt{7^1}$$

$$=2.2.\sqrt{2}.7.\sqrt{7}$$

$$=28\sqrt{2}.\sqrt{7}=28\sqrt{2.7}=\boxed{28\sqrt{14}}$$

Ejemplo 2:

Sacar todos los factores posibles, fuera del radical siguiente: $\sqrt[3]{4^5.2^7}$

Resolución:

$$\sqrt[3]{4^5.2^7}=\sqrt[3]{4^3.4^2.2^3.2^3.2^1}=\sqrt[3]{4^3}.\sqrt[3]{4^2}.\sqrt[3]{2^3}.\sqrt[3]{2^3}.\sqrt[3]{2^1}$$

$$\sqrt[3]{4^5.2^7}=\sqrt[3]{4^3.4^2.2^3.2^3.2^1}=4.\sqrt[3]{4^2}.2.2.\sqrt[3]{2}$$

$$=4.2.2.\sqrt[3]{4^2}.\sqrt[3]{2}$$

$$=16\sqrt[3]{4^2.2}=16\sqrt[3]{2^4.2}$$

$$=16\sqrt[3]{2^3.2^1.2}=16\sqrt[3]{2^3}.\sqrt[3]{2^1.2}$$

$$=16\sqrt[3]{2^3}.\sqrt[3]{2.2}=16.2.\sqrt[3]{4}$$

$$=\boxed{32\sqrt[3]{4}}$$

$$4^2=\left(2^2\right)^2=2^{2.2}=2^4$$

$$\therefore\ \boxed{4^2=2^4}$$

Ejemplo 3:

Sacar todos los factores posibles, fuera del radical siguiente: $\sqrt[5]{3^{12}.6^8.2^{16}}$

Resolución: $\sqrt[5]{3^{12}.6^8.2^{16}}=\sqrt[5]{3^{2.5+2}.6^{1.5+3}.2^{3.5+1}}$

i) $12 \,\lfloor 5$	ii) $8 \,\lfloor 5$	iii) $16 \,\lfloor 5$
$2 \quad 2$	$3 \quad 1$	$1 \quad 3$
$\boxed{12=2.5+2}$	$\boxed{8=1.5+3}$	$\boxed{16=3.5+1}$

- **Aplicando la propiedad:**

$\boxed{A^{m+n}=A^m.A^n}$; obtenemos:

$$\sqrt[5]{3^{12}.6^8.2^{16}}=\sqrt[5]{\boxed{3^{2.5}}.3^2.\boxed{6^{1.5}}.6^3.\boxed{2^{3.5}}.2^1}$$

$$=\sqrt[5]{\boxed{3^{2.5}}.\boxed{6^{1.5}}.\boxed{2^{3.5}}.3^2.6^3.2^1}$$

$$=\sqrt[5]{(3^2.6^1.2^3)^5.3^2.(2.3)^3.2^1}$$

$$=\sqrt[5]{(3^2.6^1.2^3)^5.3^2.2^3.3^3.2^1}$$

$$=\sqrt[5]{(3^2.6^1.2^3)^5.3^{2+3}.2^{3+1}}$$

$$=\sqrt[5]{(3^2.6^1.2^3)^5.3^{2+3}.2^{3+1}}=\sqrt[5]{(3^2.6^1.2^3)^5.3^5.2^4}$$

$$=\sqrt[5]{(3^2.6^1.2^3.3)^5.2^4}=\sqrt[5]{(3^2.6^1.2^3.3)^5}.\sqrt[5]{2^4}$$

$$=(3^2.6^1.2^3.3).\sqrt[5]{16}=\boxed{1\,296\sqrt[5]{16}}$$

Recuerda que:

- $(A^n.B^m)^p=A^{n.p}.B^{m.p}$
- $A^n.B^n=(A.B)^n$
- $\sqrt[n]{A^n}=A$

Ejemplo 4:

Sacar todos los factores posibles, fuera del radical siguiente: $\sqrt[4]{2^{25}.3^{18}}$

Resolución:

i) $25 \,\lfloor 4$ $\;\;1 \;\; 6$ $25 = 6.4 + 1$	ii) $18 \,\lfloor 4$ $\;\;2 \;\; 4$ $18 = 4.4 + 2$

$$\sqrt[4]{2^{25}.3^{18}} = \sqrt[4]{2^{6.4+1}.3^{4.4+2}}$$

$$= \sqrt[4]{2^{6.4}.2^{1}.3^{4.4}.3^{2}}$$

$$= \sqrt[4]{2^{6.4}.3^{4.4}.2^{1}.3^{2}}$$

$$= \sqrt[4]{(2^{6}.3^{4})^{4}.2.9}$$

$$= \sqrt[4]{(2^{6}.3^{4})^{4}}.\sqrt[4]{2.9} = 2^{6}.3^{4}.\sqrt[4]{18} = 5\,184\sqrt[4]{18}$$

Recuerda que:

* $A^{n.p}.B^{m.p} = (A^{n}.B^{m})^{p}$

Ejemplo 5:

Sacar todos los factores posibles, fuera del radical siguiente: $\sqrt[5]{6^{6}.8^{3}}$

Resolución:

$$\sqrt[5]{6^{6}.8^{3}} = \sqrt[5]{(2.3)^{6}.(2^{3})^{3}} = \sqrt[5]{2^{6}.3^{6}.2^{9}}$$

$$= \sqrt[5]{2^{6+9}.3^{6}} = \sqrt[5]{2^{15}.3^{6}}$$

$$= \sqrt[5]{2^{15}.3^{5}.3^{1}} = \sqrt[5]{2^{15}}.\sqrt[5]{3^{5}}.\sqrt[5]{3^{1}}$$

$$= 2^{3}.3.\sqrt[5]{3} = 24\sqrt[5]{3}$$

Recuerda que:

* $(A.B)^{n} = A^{n}.B^{n}$
* $A^{n}.A^{m} = A^{n+m}$
* $\sqrt[n]{A^{m}} = A^{\frac{m}{n}}$

(II.) Introducción de Factores dentro del Signo Radical.

Y también nos permite introducir factores dentro del radical, así:

a) $3\sqrt{2} = \sqrt{2.3^{2}} = \sqrt{18}$	d) $2\sqrt{\frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{1}{8}\cdot 2^{2}} = \sqrt{\frac{1.4}{8}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$
b) $5\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2.5^{3}} = \sqrt[3]{250}$	
c) $2\sqrt[5]{2} = \sqrt[3]{3.2^{5}} = \sqrt[5]{96}$	e) $4\sqrt[3]{\frac{1}{16}} = \sqrt[3]{\frac{1}{16}\cdot 4^{3}} = \sqrt[3]{\frac{1.64}{16}} = \sqrt[3]{4}$

f) $5\sqrt[4]{\frac{1}{25}} = \sqrt[4]{\frac{1}{25}\cdot 5^4} = \sqrt[4]{\frac{1.625}{25}} = \sqrt[4]{25} = \sqrt[2\cdot 2]{5^{2}} = \boxed{\sqrt{5}}$

Regla:

Para introducir un factor bajo un signo radical, se escribe dicho factor elevado a la potencia de exponente igual al índice de la raiz y el resultado se multiplica por el radicando. Así:

$$\boxed{A.\sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{B.A^n}}$$

(C.) División de Radicales.

1. División de Radicales Homogéneos (De igual Indice).

Sean los radicales de igual índice: $\sqrt[n]{A}$ y $\sqrt[n]{B}$, se tiene:

$\sqrt[n]{A} = r \Rightarrow A = r^n$

$\sqrt[n]{B} = s \Rightarrow B = s^n$ **(Dividimos miembro a miembro)**

$$\frac{A}{B} = \frac{r^n}{s^n}$$

$$\frac{A}{B} = \left(\frac{r}{s}\right)^n$$; extraemos la raiz n-ésima a ambos miembros

$$\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \sqrt[n]{\left(\frac{r}{s}\right)^n} = \frac{r}{s}$$; sustituyendo r y s por su valor respectivo, obtenemos:

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}} \quad ó \quad \boxed{\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}} = \sqrt[n]{\frac{A}{B}}}$$

Esta igualdad nos dice:

El cociente de dos radicales de igual índice es otro radical del mismo índice que tiene por radicando el cociente de los radicandos del dividendo y divisor.

Ejemplos:

a) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = \boxed{2}$

d) $\frac{\sqrt[5]{128}}{\sqrt[5]{4}} = \sqrt[5]{\frac{128}{4}} = \sqrt[5]{32} = \boxed{2}$

b) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{27}{3}}=\sqrt{9}=\boxed{3}$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[3]{\dfrac{625}{5}}=\sqrt[3]{125}=\boxed{5}$

e) $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}=\sqrt[4]{\dfrac{32}{2}}=\sqrt[4]{16}=\boxed{2}$

f) $\dfrac{\sqrt{\frac{1}{8}}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{\frac{1}{8}}{2}}=\sqrt{\dfrac{1}{16}}=\boxed{\dfrac{1}{4}}$

2. División de Radicales No Homogéneos (Heterogéneos).

Si los radicales en cuestión no tienen el mismo índice se reducen previamente a común índice aplicando el teorema fundamental.

$$\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[p]{B}}=\frac{\sqrt[n.p]{A^p}}{\sqrt[n.p]{B^n}}=\sqrt[n.p]{\frac{A^p}{B^n}}$$

Ejemplo 1: *Dividir:* $\sqrt{3}$ por $\sqrt[3]{2}$

Resolución:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[2]{3}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[2.3]{3^3}}{\sqrt[2.3]{2^2}}=\frac{\sqrt[6]{3^3}}{\sqrt[6]{2^2}}=\boxed{\sqrt[6]{\frac{27}{4}}}$$

Ejemplo 2: *Dividir:* $\sqrt[5]{2}$ por $\sqrt[4]{3}$

Resolución:

$$\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[4]{3}}=\frac{\sqrt[5.4]{2^4}}{\sqrt[5.4]{3^5}}=\frac{\sqrt[5.4]{16}}{\sqrt[5.4]{243}}=\boxed{\sqrt[20]{\frac{16}{243}}}$$

Ejemplo 3: *Dividir:* $\sqrt[3]{6}$ por $\sqrt[4]{2}$

Resolución:

$$\frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[4]{2}}=\frac{\sqrt[3.4]{6^4}}{\sqrt[3.4]{2^3}}=\frac{\sqrt[12]{1\,296}}{\sqrt[12]{8}}=\sqrt[12]{\frac{1\,296}{8}}$$

$$=\boxed{\sqrt[12]{162}}$$

Ejemplo 4: *Dividir:* $\sqrt[4]{5}$ por $\sqrt{\dfrac{1}{5}}$

Resolución:

$$\frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt{\frac{1}{5}}}=\frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[2\times 2]{\left(\frac{1}{5}\right)^2}}=\frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{\frac{1}{5^2}}}$$

$$=\sqrt[4]{5^1\cdot 5^2}=\sqrt[4]{5^3}=\boxed{\sqrt[4]{125}}$$

La igualdad: $\dfrac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}=\sqrt[n]{\dfrac{A}{B}}$; leida de derecha a izquierda, nos dice:

$\sqrt[n]{\dfrac{A}{B}}=\dfrac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}$ ➧ *La raiz enésima de un cociente es el cociente entre la raiz enésima del dividendo y la raiz enésima del divisor.*

Y por ser la división un caso particular del producto se puede seguir reglas similares para introducir términos de un cociente en un radical o para

extraerlos fuera del radical, así:

a) $\dfrac{2\sqrt{18}}{4\sqrt{2}} = \dfrac{2}{4}\sqrt{\dfrac{18}{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{9} = \dfrac{1}{2}\cdot 3 = \boxed{\dfrac{3}{2}}$

b) $\dfrac{3\sqrt{20}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{20}{2}} = \boxed{\dfrac{3}{2}\sqrt{10}}$

c) $\dfrac{24\sqrt[3]{56}}{8\sqrt[3]{7}} = \dfrac{24}{8}\sqrt[3]{\dfrac{56}{7}} = 3\sqrt[3]{8} = 3.2 = \boxed{6}$

d) $\dfrac{6\sqrt[3]{54}}{8\sqrt[3]{2}} = \dfrac{6}{8}\sqrt[3]{\dfrac{54}{2}} = \dfrac{3}{4}\sqrt[3]{27} = \dfrac{3}{4}\cdot 3 = \boxed{\dfrac{9}{4}}$

e) $\dfrac{10\sqrt[4]{3}}{4\sqrt[4]{243}} = \dfrac{10}{4}\sqrt[4]{\dfrac{3}{243}} = \dfrac{5}{2}\sqrt[4]{\dfrac{1}{81}} = \dfrac{5}{2}\sqrt[4]{\dfrac{1}{3^4}} = \dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{1}{3} = \boxed{\dfrac{5}{6}}$

(D.) Potencia de un Radical.

Sea el radical: $\boxed{\sqrt[n]{A} = r}$; se tiene: $\boxed{A = r^n}$

Elevamos los dos miembros a la potencia p.

$A^p = r^{n.p}$; extraemos la raiz n-ésima a ambos miembros:

$\sqrt[n]{A^p} = \sqrt[n]{r^{n.p}} = r^p$

Sustituimos "r" por su valor, obteniendo: $\boxed{\sqrt[n]{A^p} = \left(\sqrt[n]{A}\right)^p}$ ó $\boxed{\left(\sqrt[n]{A}\right)^p = \sqrt[n]{A^p}}$

Esta igualdad nos dice:

Para elevar un radical a una potencia basta elevar el radicando a dicha potencia.

Ejemplo 1:

Elevar a la cuarta potencia: $\sqrt[3]{4}$

Resolución:

$\left(\sqrt[3]{4}\right)^4 = \sqrt[3]{4^4} = \sqrt[3]{(2^2)^4} = \sqrt[3]{2^8}$

$= \sqrt[3]{2^{2.3+2}}$

$= \sqrt[3]{2^{2.3}.2^2}$

$= \sqrt[3]{2^{2.3}}.\sqrt[3]{2^2}$

$= \boxed{4.\sqrt[3]{4}}$

$8 \,\underline{|\,3}$
$2 \quad 2$

$\boxed{8 = 2.3 + 2}$

Ejemplo 2:

Elevar a la sexta potencia: $\sqrt[4]{2}$

Resolución:

$\left(\sqrt[4]{2}\right)^6 = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt[4]{2^{1.4+2}}$

$= \sqrt[4]{2^{1.4}.2^2}$

$= \sqrt[4]{2^{1.4}}.\sqrt[4]{2^2}$

$= \boxed{2.\sqrt[4]{4}}$

$6 \,\underline{|\,4}$
$2 \quad 1$

$\boxed{6 = 1.4 + 2}$

Ejemplo 3:

Elevar al cubo: $\sqrt{8}$

Resolución:

$$\left(\sqrt{8}\right)^3=\left(\sqrt{2^3}\right)^3=\sqrt{2^{3.3}}=\sqrt[2]{2^9}$$

$$=\sqrt[2]{2^{4.2+1}}$$

9	2
1	4

$9=4.2+1$

$$=\sqrt[2]{2^{4.2}.2^1}$$

$$=\sqrt[2]{2^{4.2}}.\sqrt[2]{2^1}$$

$$=\boxed{16.\sqrt{2}}$$

Ejemplo 4:

Elevar a la octava potencia: $\sqrt[5]{27}$

Resolución:

$$\left(\sqrt[5]{27}\right)^8=\left(\sqrt[5]{3^3}\right)^8=\sqrt[5]{3^{3.8}}$$

$$=\sqrt[5]{3^{24}}=\sqrt[5]{3^{4.5+4}}$$

24	5
4	4

$24=4.5+4$

$$=\sqrt[5]{3^{4.5}.3^4}$$

$$=\sqrt[5]{3^{4.5}}.\sqrt[5]{3^4}$$

$$=\boxed{81.\sqrt[5]{81}}$$

Ejemplo 5:

Efectuar:

$$\left(3\sqrt{2}\right)^2$$

Resolución:

$$\left(3\sqrt{2}\right)^2=3^2.\sqrt{2}^2=9\sqrt{2^2}$$

$$=9.2=\boxed{18}$$

Ejemplo 6:

Efectuar:

$$\left(2\sqrt[3]{4}\right)^6$$

Resolución:

$$\left(2\sqrt[3]{4}\right)^6=2^6.\sqrt[3]{4}^6=2^6.\sqrt[3]{2^2}^6$$

$$=64.\sqrt[3]{2^{2.6}}$$

$$=64.2^{\frac{2.6}{3}}$$

$$=64.2^4=64.16$$

$$=\boxed{1\,024}$$

(E.) Raiz de un Radical.

Sea el radical: $\boxed{\sqrt[p]{\sqrt[n]{A}}=r}$; se tiene: $\boxed{\sqrt[n]{A}=r^p}$

elevamos ambos miembros a la potencia "n".

$$\sqrt[n]{A}^n=r^{p.n}\Rightarrow A=r^{p.n}$$

Extraemos la raiz de indice "p.n", a ambos miembros:

$$\sqrt[p.n]{A}^n=\sqrt[p.n]{r^{p.n}}=r$$

Sustituimos el valor de "r", obteniendo:

$$\boxed{\sqrt[p.n]{A}=\sqrt[p]{\sqrt[n]{A}}}\quad \text{ó}\quad \boxed{\sqrt[p]{\sqrt[n]{A}}=\sqrt[p.n]{A}}$$

Esta igualdad nos dice:

Para hallar la raiz de un radical basta hallar la raiz del mismo radicando con un índice igual al producto de los índices.

Ejemplo 1: *Hallar:* $\sqrt[4]{\sqrt[3]{20}}$ ***Resolución:*** $\sqrt[4]{\sqrt[3]{20}} = \sqrt[4.3]{20} = \boxed{\sqrt[12]{20}}$	***Ejemplo 2:*** *Hallar:* $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{18}}}$ ***Resolución:*** $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{18}}} = \sqrt[2.3.4]{18} = \boxed{\sqrt[24]{18}}$
Ejemplo 1: *Hallar:* $\sqrt{\sqrt[5]{28}}$ ***Resolución:*** $\sqrt{\sqrt[5]{28}} = \sqrt[2.5]{28} = \boxed{\sqrt[10]{28}}$	***Ejemplo 2:*** *Hallar:* $\sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt{120}}}$ ***Resolución:*** $\sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt{120}}} = \sqrt[3.5.2]{120} = \boxed{\sqrt[30]{120}}$

De la igualdad, nos dice que si el índice de un radical se descompone en sus factores, dicho radical es igual a las raices escalonadas cuyos índices son estos factores.

a) $\sqrt[6]{64} = \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = \boxed{2}$	d) $\sqrt[6]{729} = \sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[3]{27} = \boxed{3}$
b) $\sqrt[4]{1\,296} = \sqrt{\sqrt{1\,296}} = \sqrt{36} = \boxed{6}$	e) $\sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{81}}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \boxed{\frac{1}{3}}$
c) $\sqrt[8]{256} = \sqrt[4]{\sqrt{256}} = \sqrt[4]{16} = \sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = \boxed{2}$	f) $\sqrt[10]{1\,024} = \sqrt[5]{\sqrt{1\,024}} = \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = \boxed{2}$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 8

1. Halla el resultado de:

a) $8\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$	**g)** $3\sqrt[3]{192} - 4\sqrt[3]{24}$
b) $2\sqrt{7} + 3\sqrt{7} - 4\sqrt{7}$	**h)** $\frac{2}{3}\sqrt[5]{486} + \frac{3}{2}\sqrt[5]{64}$

c) $6\sqrt{2}-2\sqrt{2}-3\sqrt{2}$	i) $6\sqrt{72}+3\sqrt{50}-3\sqrt{2}-5\sqrt{2}$
d) $5\sqrt[3]{2}+8\sqrt[3]{2}-11\sqrt[3]{2}$	j) $\frac{1}{3}\sqrt{72}+2\sqrt{12}-\frac{1}{2}\sqrt{12}+\sqrt{75}$
e) $3\sqrt{6}-\sqrt[3]{9}-2\sqrt{6}+5\sqrt[3]{9}$	k) $7\sqrt{48}-\frac{1}{9}\sqrt{243}+2\sqrt{108}$
f) $8\sqrt{11}-6\sqrt{13}-4\sqrt{11}+3\sqrt{13}$	l) $3\sqrt[4]{32}+5\sqrt[4]{162}-2\sqrt[4]{1\,250}$

m) $0{,}25\sqrt{24}.\sqrt{2}+\frac{1}{25}\sqrt{300}-0{,}2\sqrt{3}$

n) $\frac{5}{6}\sqrt[3]{9}.\sqrt[3]{6}-\frac{3}{8}\sqrt[3]{128}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$

ñ) $\dfrac{0{,}0\widehat{5}\sqrt{11}.\sqrt{81}+0{,}6\sqrt{44}}{-\frac{3}{7}\sqrt{11.49}}$

2. En cada ejercicio siguiente, halla el producto y da la respuesta en su forma más simple:

a) $\sqrt{3}.\sqrt{27}$	e) $6\sqrt[3]{25}.\frac{1}{3}\sqrt[3]{5}$	i) $3\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+5\sqrt{8}\right)$
b) $2\sqrt[3]{9}.5\sqrt[3]{3}$	f) $-3\sqrt{9}.2\sqrt{3}.\frac{1}{9}\sqrt{27}$	j) $\sqrt{3}\left(\sqrt{27}-\sqrt{3}\right)$
c) $\sqrt{7}.\sqrt{\frac{1}{7}}$	g) $-7\sqrt{2}.2\sqrt{2}$	k) $3\sqrt[3]{2}\left(2\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{32}\right)$
d) $\frac{2}{3}\sqrt{8}.\frac{1}{4}\sqrt{2}$	h) $3\sqrt[4]{64}.\frac{1}{4}\sqrt[4]{4}$	l) $\left(2\sqrt{6}+5\right)\left(\sqrt{6}-3\right)$

3. En cada ejercicio siguiente, halla el producto y da la respuesta en su forma más simple:

a) $\sqrt[3]{5}.\sqrt{2}$	e) $6\sqrt[4]{3}.\sqrt[3]{5}$	i) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{3}.\frac{1}{3}\sqrt{2}.\frac{5}{6}\sqrt[6]{6}$
b) $3\sqrt[4]{8}.\sqrt{2}$	f) $\sqrt[3]{4}.\sqrt[4]{8}.\sqrt{2}$	j) $0{,}5\sqrt[5]{2}.6\sqrt[3]{3}$
c) $2\sqrt[8]{2}.\sqrt{2}$	g) $\sqrt[6]{2}.\sqrt[3]{4}.\sqrt{\frac{1}{2}}$	k) $\sqrt[10]{8}.\sqrt{2}.\sqrt[3]{2}$

4. Sacar todos los factores posibles fuera de los radicales siguientes:

a) $\sqrt{2^3 . 6^5}$	d) $\sqrt[3]{2^7 . 3^4}$	g) $\sqrt[5]{3^6 . 2^{11} . 5^7}$
b) $\sqrt{3^3 . 4^6}$	e) $\sqrt[3]{4^4 . 3^8}$	h) $\sqrt[7]{2^{16} . 3^{22}}$
c) $\sqrt{5^5 . 2^7}$	f) $\sqrt[4]{2^5 . 3^7 . 4^9}$	i) $\sqrt[9]{4^{12} . 6^{14}}$

5. Expresa en su forma más simple cada uno de los siguientes radicales.

a) $\sqrt{54} =$	e) $5\sqrt[3]{192} =$	i) $\sqrt{\dfrac{972}{75}} =$
b) $\sqrt{500} =$	f) $3\sqrt[4]{1\,250} =$	j) $\sqrt{\dfrac{2\,744}{243}} =$
c) $\sqrt[3]{108} =$	g) $\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{18}{32}} =$	k) $\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{243}{48}} =$
d) $\sqrt{162} =$	h) $-6\sqrt{325} =$	l) $-\dfrac{2}{5}\sqrt{\dfrac{25}{64}} =$

6. En cada uno de los ejercicios siguientes escribe el radical dado introduciendo el factor bajo el signo radical:

a) $7\sqrt{3} =$	f) $2\sqrt[4]{3} =$	k) $3\sqrt[3]{\dfrac{1}{6}} =$
b) $5\sqrt{11} =$	g) $\dfrac{1}{3}\sqrt{45} =$	l) $2\sqrt[5]{\dfrac{1}{64}} =$
c) $3\sqrt[3]{2} =$	h) $\dfrac{1}{2}\sqrt{40} =$	m) $\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{8}{3}} =$
d) $5\sqrt[3]{4} =$	i) $\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{625} =$	n) $\dfrac{2}{5}\sqrt[3]{\dfrac{25}{16}} =$
e) $6\sqrt{5} =$	j) $2\sqrt[5]{\dfrac{1}{16}} =$	ñ) $\dfrac{2}{3}\sqrt[7]{\dfrac{81}{64}} =$

7. En cada uno de los ejercicios siguientes simplifica el radical y extrae los factores posibles del radicando:

Ejemplo 1: $\sqrt[6]{2^9} = 2^{9/6} = 2^{3/2} = \sqrt[2]{2^3} = \sqrt{2^2 . 2^1} = \boxed{2\sqrt{2}}$

Ejemplo 2: $\sqrt[4]{2^{10}} = 2^{10/4} = 2^{5/2} = \sqrt[2]{2^5} = \sqrt{2^4 . 2^1} = 2^2 . \sqrt{2} = \boxed{4\sqrt{2}}$

Ejemplo 3: $\sqrt[15]{32} = \sqrt[15]{2^5} = 2^{5/15} = 2^{1/3} = \sqrt[3]{2^1} = \boxed{\sqrt[3]{2}}$

Ejemplo 4: $\sqrt[4]{\dfrac{25}{36}}=\sqrt[4]{\dfrac{5^2}{6^2}}=\sqrt[4]{\left(\dfrac{5}{6}\right)^2}=\left(\dfrac{5}{6}\right)^{2/4}=\left(\dfrac{5}{6}\right)^{1/2}=\boxed{\sqrt{\dfrac{5}{6}}}$

a) $\sqrt[3]{4^6}=$	e) $\sqrt[10]{3^4}=$	i) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{625}}=$	m) $\sqrt[9]{512}=$
b) $\sqrt[4]{3^{12}}=$	f) $\sqrt[15]{2^3}=$	j) $\sqrt{\dfrac{1}{128}}=$	n) $\sqrt[12]{\dfrac{64}{125}}=$
c) $\sqrt[5]{2^{15}}=$	g) $\sqrt[10]{1\,024}=$	k) $\sqrt[8]{\dfrac{625}{81}}=$	ñ) $\sqrt[20]{64^3}=$
d) $\sqrt[8]{5^{16}}=$	h) $\sqrt[6]{27}=$	l) $\sqrt[15]{8^3}=$	o) $\sqrt[18]{\dfrac{1}{256}}=$

.8 En cada uno de los ejercicios siguientes, reduce al mínimo común índice, los radicales, dados:

a) $\sqrt[3]{2}$ y $\sqrt[4]{3}$	e) $\sqrt{2}$ y $\sqrt[4]{3}$	i) $\sqrt[6]{10}$; $\sqrt[4]{2}$ y $\sqrt[3]{5}$
b) $\sqrt[6]{3}$ y $\sqrt[4]{5}$	f) $\sqrt[3]{3}$ y $\sqrt[6]{6}$	j) $\sqrt[4]{3}$; $\sqrt[5]{7}$ y $\sqrt{2}$
c) $\sqrt[5]{2}$ y $\sqrt[10]{3}$	g) $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[6]{3}$ y $\sqrt[9]{5}$	k) $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt{5}$ y $\sqrt[4]{3}$
d) $\sqrt{3}$ y $\sqrt[6]{2}$	h) $\sqrt[5]{2}$; $\sqrt[4]{5}$ y $\sqrt[10]{3}$	l) $\sqrt{6}$; $\sqrt[5]{4}$ y $\sqrt[10]{9}$

9. Halla el resultado de:

a) $\sqrt{32}:\sqrt{8}=$	f) $6\sqrt[3]{16}:3\sqrt[3]{2}=$	k) $\dfrac{1}{4}\sqrt[3]{5}:\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{625}=$
b) $\sqrt{27}:\sqrt{3}=$	g) $2\sqrt{12}:3\sqrt{3}=$	l) $\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{1}{8}}:\dfrac{3}{4}\sqrt{\dfrac{1}{2}}=$
c) $\sqrt{40}:\sqrt{10}=$	h) $10\sqrt[4]{32}:5\sqrt[4]{2}=$	m) $\sqrt[5]{128}:\sqrt[5]{4}=$
d) $6\sqrt{15}:2\sqrt{5}=$	i) $7\sqrt[3]{3}:14\sqrt[3]{81}=$	n) $\sqrt[3]{2\,401}:\dfrac{1}{7}\sqrt[3]{7}=$
e) $\sqrt{27}:\sqrt{12}=$	j) $\dfrac{1}{2}\sqrt{16}:\dfrac{1}{3}\sqrt{8}=$	ñ) $\sqrt[8]{6}:\sqrt[8]{\dfrac{1}{32}}=$

10. Halla el resultado de:

a) $6\sqrt{5}:2\sqrt[3]{5}=$	e) $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}:\dfrac{1}{2}\sqrt[6]{4}=$	i) $\left(3\sqrt{6}-2\sqrt{12}\right):\sqrt{3}=$

b) $\sqrt[4]{4} : \sqrt{2} =$	f) $\sqrt[10]{3} : \sqrt[5]{5} =$	j) $\left(5\sqrt{10} + 3\sqrt{15}\right) : \sqrt{5} =$
c) $\sqrt[3]{5} : \sqrt[6]{5} =$	g) $\sqrt[4]{\frac{5}{7}} : \sqrt[3]{\frac{5}{14}} =$	k) $\left(\sqrt{12} + \sqrt{48} - \sqrt{75}\right) : \sqrt{3} =$
d) $\sqrt[4]{2} : \sqrt{2} =$	h) $\sqrt{\frac{3}{2}} : \sqrt[6]{\frac{4}{6}} =$	l) $\left(3\sqrt{15} + \sqrt{90} - \sqrt{45}\right) : \sqrt{15} =$

11. Halla el resultado de:

a) $\left(\sqrt{3}\right)^6 =$	f) $\left(2\sqrt{3}\right)^4 =$	k) $\sqrt{\sqrt{625}} =$	o) $\sqrt{\sqrt[3]{4\,096}} =$
b) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^8 =$	g) $\left(2\sqrt{3}\right)^3 =$	l) $\left(\sqrt[7]{6}\right)^4 =$	p) $\sqrt[5]{\sqrt{1\,024}} =$
c) $\left(\sqrt[4]{5}\right)^6 =$	h) $\left(-3\sqrt[3]{2}\right)^3 =$	m) $\frac{1}{2}\sqrt[8]{256} =$	q) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{625}}} =$
d) $\left(\sqrt{7}\right)^5 =$	i) $\left(-2\sqrt[5]{6}\right)^4 =$	n) $\sqrt[6]{729} =$	r) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{6\,561}}}} =$
e) $\left(\sqrt[3]{16}\right)^2 =$	j) $\left(\frac{2}{5}\sqrt{10}\right)^6 =$	ñ) $\sqrt{\sqrt[3]{729}} =$	s) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{512}}} =$

RESPUESTAS TALLER

1.

- g) $4\sqrt[3]{3}$
- h) $5\sqrt[5]{2}$
- i) $43\sqrt{2}$
- j) $9\sqrt{3}$
- k) $39\sqrt{3}$
- l) $11\sqrt[4]{2}$
- m) $\frac{6}{5}\sqrt{3}$
- n) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$
- ñ) $\frac{-17}{30}$

2.

- a) 9
- b) 30
- c) 1
- d) 2/3
- e) 10
- f) -18
- g) -28
- h) 3
- i) 66
- j) 6
- k) 0
- l) $-3-\sqrt{6}$

3.

- a) $\sqrt[6]{200}$
- b) $6\sqrt[4]{2}$
- c) $2\sqrt[8]{32}$
- d) $6\sqrt[12]{16\,875}$
- e) $2\sqrt[12]{2\,048}$
- f) $\sqrt[3]{2}$
- g) $\frac{5}{36}\sqrt[6]{432}$
- h) $3\sqrt[15]{1\,944}$
- i) $2\sqrt[15]{4}$

4.

- a) $144\sqrt{3}$
- b) $192\sqrt{3}$
- c) $200\sqrt{10}$
- d) $12\sqrt[3]{6}$
- e) $36\sqrt[3]{36}$
- f) $96\sqrt[4]{216}$
- g) $60\sqrt[5]{150}$
- h) $108\sqrt[7]{12}$
- i) $48\sqrt[9]{972}$

(5.)

a) $3\sqrt{6}$
b) $10\sqrt{5}$
c) $3\sqrt[3]{4}$
d) $9\sqrt{2}$
e) $20\sqrt[3]{3}$
f) $15\sqrt[4]{2}$
g) 3/16
h) $-30\sqrt{13}$
i) 18/5
j) $\frac{14}{9}\sqrt{\frac{14}{3}}$
k) 3/4
l) -1/4

(6.)

a) $\sqrt{147}$
b) $\sqrt{275}$
c) $\sqrt[3]{54}$
d) $\sqrt[3]{500}$
e) $\sqrt{180}$
f) $\sqrt[4]{48}$
g) $\sqrt{5}$
h) $\sqrt{10}$
i) $\sqrt[3]{5}$
j) $\sqrt[5]{2}$
k) $\sqrt[3]{\frac{9}{2}}$
l) $\sqrt[5]{\frac{1}{2}}$
m) $\sqrt{6}$
n) $\frac{1}{\sqrt[3]{10}}$
ñ) $\sqrt[7]{\frac{2}{27}}$

(7.)

a) 16
b) 27
c) 8
d) 25
e) $\sqrt[5]{9}$
f) $\sqrt[5]{2}$
g) 2
h) $\sqrt{3}$
i) 1/5
j) $\frac{1}{8\sqrt{2}}$
k) $\sqrt{\frac{5}{3}}$
l) $\sqrt[5]{8}$
m) 2
n) $\sqrt[4]{\frac{4}{5}}$
ñ) $\sqrt[10]{512}$
o) $\frac{1}{\sqrt[9]{16}}$

(9.)

a) 2
b) 3
c) 2
d) $3\sqrt{3}$
e) 3/2
f) 4
g) 4/3
h) 4
i) 1/6
j) 9/4
k) 1/4
l) 4/9
m) 2
n) 49
ñ) 2

(8.)

a) $\sqrt[12]{16}$ y $\sqrt[12]{27}$
b) $\sqrt[12]{9}$ y $\sqrt[12]{125}$
c) $\sqrt[10]{4}$ y $\sqrt[10]{3}$
d) $\sqrt[6]{27}$ y $\sqrt[6]{2}$
e) $\sqrt[4]{4}$ y $\sqrt[4]{3}$
f) $\sqrt[6]{9}$ y $\sqrt[6]{6}$
g) $\sqrt[18]{64}$ y $\sqrt[18]{27}$ y $\sqrt[18]{25}$
h) $\sqrt[20]{16}$ y $\sqrt[20]{3\,125}$ y $\sqrt[20]{9}$
i) $\sqrt[12]{100}$ y $\sqrt[12]{6}$ y $\sqrt[12]{625}$
j) $\sqrt[20]{243}$ y $\sqrt[20]{2\,401}$ y $\sqrt[20]{1\,024}$
k) $\sqrt[12]{16}$; $\sqrt[12]{15\,625}$ y $\sqrt[12]{27}$
l) $\sqrt[10]{7\,776}$ y $\sqrt[10]{16}$ y $\sqrt[10]{9}$

(10.)

a) $3\sqrt[6]{5}$
b) 1
c) $\sqrt[6]{5}$
d) $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$
e) 3
f) $\sqrt[10]{\frac{3}{25}}$

g) $\sqrt[12]{\dfrac{112}{5}}$ i) $3\sqrt{2}-4$ k) 1

h) $\sqrt[6]{\dfrac{81}{16}}$ j) $5\sqrt{2}+3\sqrt{3}$ l) $3+\sqrt{6}-\sqrt{3}$

(11.)

a) 27 f) 144 k) 5 o) 4

b) $4\sqrt[3]{4}$ g) $24\sqrt{3}$ l) $2\sqrt[7]{32}$ p) 2

c) $5\sqrt{5}$ h) -54 m) 1 q) $\sqrt{5}$

d) $49\sqrt{7}$ i) $64\sqrt[5]{4}$ n) 3 r) $\sqrt{3}$

e) $4\sqrt[3]{4}$ j) $\dfrac{512}{125}$ ñ) 3 s) $\sqrt{2}$

2.4.5. Racionalización de Denominadores con Radicales.

Si una fracción tiene como denominador a un número irracional, puede ser transformada en otra equivalente con denominador racional. A este proceso de transformación se denomina **racionalización** del denominador.

Vamos a ver dos casos sencillos.



Que el denominador tenga un sólo término.

I) Si el denominador es una raiz cuadrada, basta multiplicar los dos términos de la fracción por dicho denominador.

Así:

a) $$\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

b) $$\frac{5}{\sqrt{7}}=\frac{5}{\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=\frac{5\sqrt{7}}{(\sqrt{7})^2}=\frac{5\sqrt{7}}{7}$$

c) $$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{3}.\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2}=\frac{\sqrt{3.5}}{5}=\frac{\sqrt{15}}{5}$$

d) $$\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{11}}\cdot\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{2}.\sqrt{11}}{3(\sqrt{11})^2}=\frac{\sqrt{2.11}}{3(11)}=\frac{\sqrt{22}}{33}$$

En general:

$$\frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a}{\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{b}$$

ii) En el caso de que el denominador sea una raiz enésima $\dfrac{a}{\sqrt[n]{b}}$; se multiplican los términos por $\dfrac{a}{\sqrt[n]{b^{n-1}}}$

Tenemos:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b}}=\frac{a.\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{b^{n-1}}}=\frac{a.\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b.b^{n-1}}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^{n}}}$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{a}{\sqrt[n]{b}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{b}}$$

Ejemplo 1: Racionalizar: $\dfrac{3}{\sqrt[4]{2}}$

Resolución:

$$\frac{3}{\sqrt[4]{2}}=\frac{3.\sqrt[4]{2^{4-1}}}{\sqrt[4]{2}.\sqrt[4]{2^{4-1}}}=\frac{3\sqrt[4]{2^{3}}}{\sqrt[4]{2.2^{4-1}}}=\frac{3\sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{2^{4}}}=\boxed{\frac{3\sqrt[4]{8}}{2}}$$

Ejemplo 2: Racionalizar: $\dfrac{6}{\sqrt[5]{3}}$

Resolución:

$$\frac{6}{\sqrt[5]{3}}=\frac{6.\sqrt[5]{3^{5-1}}}{\sqrt[5]{3}.\sqrt[5]{3^{5-1}}}=\frac{6\sqrt[5]{3^{4}}}{\sqrt[4]{3.3^{5-1}}}=\frac{6\sqrt[5]{81}}{\sqrt[5]{3^{5}}}=\frac{6\sqrt[5]{81}}{3}=\boxed{2\sqrt[5]{81}}$$

Ejemplo 3: Racionalizar: $\dfrac{5}{\sqrt[3]{7}}$

Resolución:

$$\frac{5}{\sqrt[3]{7}}=\frac{5.\sqrt[3]{7^{3-1}}}{\sqrt[3]{7}.\sqrt[3]{7^{3-1}}}=\frac{5\sqrt[3]{7^{2}}}{\sqrt[3]{7.7^{3-1}}}=\frac{5\sqrt[3]{49}}{\sqrt[3]{7^{3}}}=\boxed{\frac{5\sqrt[3]{49}}{7}}$$

 **Si el denominador tiene dos o más términos:**

Definimos primero:

- **Binomio Irracional Cuadrático** es una suma algebraica de dos radicales irracionales y, por lo menos, uno de ellos de índice 2.

  Por ejemplo: $\boxed{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$; $\boxed{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; $\boxed{\sqrt{5}-2}$

- **Dos Binomios Irracionales Cuadráticos** que sólo difieren en el signo de uno de los términos, se llama **conjugados**, así:

$\boxed{3+\sqrt{5}\ \textbf{su conjugada}\ 3-\sqrt{5}}$; $\boxed{2+\sqrt{3}\ \textbf{su conjugada}\ 2-\sqrt{3}}$

$1-\sqrt{2}$ **su conjugada** $1+\sqrt{2}$; $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ **su conjugada** $\sqrt{5}-\sqrt{3}$

Se cumple que el producto de dos binomios irracionales cuadráticos conjugados es racional; veamos:

a) $(a+\sqrt{b}).(a-\sqrt{b})=a^2-(\sqrt{b})^2=\boxed{a^2-b}$

b) $(\sqrt{x}+\sqrt{y}).(\sqrt{x}-\sqrt{y})=(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2=\boxed{x-y}$

iii) En el caso de que el denominador sea un binomio irracional, para racionalizar denominadores se multiplica numerador y denominador por el conjugado (el producto de los binomios irracionales cuadráticos es racional).

Ejemplo 1: Racionalizar: $\dfrac{4}{3-\sqrt{2}}$

Resolución:

$$\frac{4}{3-\sqrt{2}}=\frac{4.(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2}).(3+\sqrt{2})}=\frac{4(3+\sqrt{2})}{3^2-\sqrt{2}^2}=\frac{4(3+\sqrt{2})}{9-2}=\boxed{\frac{4(3+\sqrt{2})}{7}}$$

Factor Racionalizador

Ejemplo 2: Racionalizar: $\dfrac{3}{\sqrt{5}+2}$

Resolución:

$$\frac{3}{\sqrt{5}+2}=\frac{3.(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2).(\sqrt{5}-2)}=\frac{3(\sqrt{5}-2)}{\sqrt{5}^2-2^2}=\frac{3(\sqrt{5}-2)}{5-4}=\boxed{3(\sqrt{5}-2)}$$

Factor Racionalizador

Ejemplo 3: Racionalizar: $\dfrac{2}{4+\sqrt{11}}$

Resolución:

$$\frac{2}{4+\sqrt{11}}=\frac{2.(4-\sqrt{11})}{(4+\sqrt{11}).(4-\sqrt{11})}=\frac{2(4-\sqrt{11})}{4^2-\sqrt{11}^2}=\frac{2(4-\sqrt{11})}{16-11}=\boxed{\frac{2(4-\sqrt{11})}{5}}$$

Factor Racionalizador

Ejemplo 4: Racionalizar: $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

Resolución:

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}).(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2}).(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{\sqrt{3}^2-\sqrt{2}^2}=\frac{\sqrt{3}^2+2\sqrt{3}.\sqrt{2}+\sqrt{2}^2}{3-2}$$

Factor Racionalizador

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}).(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2}).(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{\sqrt{3}^2-\sqrt{2}^2}=\frac{3+2\sqrt{3}.\sqrt{2}+2}{1}$$

$$=\boxed{5+2\sqrt{6}}$$

Recuerda que:

- $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
- $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

Ejemplo 5: Racionalizar: $\frac{3+2\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$

Resolución:

$$\frac{3+2\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}=\frac{(3+2\sqrt{2}).(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2}).(3+\sqrt{2})}=\frac{3^2+3.\sqrt{2}+6.\sqrt{2}+2(\sqrt{2})^2}{3^2-\sqrt{2}^2}$$

$$=\frac{9+3\sqrt{2}+6\sqrt{2}+2(2)}{9-2}$$

$$=\boxed{\frac{13+9\sqrt{2}}{7}}$$

Ejemplo 6: Racionalizar: $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

Resolución:

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1).(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1).(\sqrt{3}-1)}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{\sqrt{3}^2-1^2}=\frac{\sqrt{3}^2-2\sqrt{3}.1+1^2}{3-1}$$

$$=\frac{3-2\sqrt{3}+1}{2}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}$$

$$=\boxed{2-\sqrt{3}}$$

Recuerda que:

- $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

Ejemplo 7: Racionalizar: $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

Resolución:

$$\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{(2+\sqrt{3}).[(2-\sqrt{2})-\sqrt{3}]}{[(2-\sqrt{2})+\sqrt{3}].[(2-\sqrt{2})-\sqrt{3}]}=\frac{4-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}-\sqrt{3}^2}{(2-\sqrt{2})^2-\sqrt{3}^2}$$

Factor Racionalizador

$$=\frac{1-2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2^2-2.2\sqrt{2}+\sqrt{2}^2-3}$$

$$=\frac{1-2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3-4\sqrt{2}}$$

$$\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\left(1-2\sqrt{2}-\sqrt{6}\right).\left(3+4\sqrt{2}\right)}{\left(3-4\sqrt{2}\right).\left(3+4\sqrt{2}\right)}=\frac{\left(1-2\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)\left(3+4\sqrt{2}\right)}{3^2-\left(4\sqrt{2}\right)^2}$$

Factor Racionalizador

$$=\frac{3+4\sqrt{2}-6\sqrt{2}-8\sqrt{2.2}-3\sqrt{6}-4\sqrt{12}}{9-32}$$

$$=\frac{3-2\sqrt{2}-16-3\sqrt{6}-4\sqrt{4.3}}{-23}$$

$$=\frac{-13-2\sqrt{2}-3\sqrt{6}-8\sqrt{3}}{-23}$$

$$=\frac{-\left(13+2\sqrt{2}+8\sqrt{3}+3\sqrt{6}\right)}{-23}$$

$$=\boxed{\frac{13+2\sqrt{2}+8\sqrt{3}+3\sqrt{6}}{23}}$$

Ejemplo 8: ¿Cuál de los siguientes radicales es igual a: $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

a) $\sqrt{3+\sqrt{2}}$ b) $\sqrt{3-\sqrt{2}}$ c) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ d) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ e) $\sqrt{13-2\sqrt{5}}$

Resolución:

Por propiedad: $\boxed{A=\sqrt[n]{A^n}}$ *; se tiene:*

$$\sqrt{3}-\sqrt{2}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}.\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{3-2\sqrt{6}+2}=\sqrt{5-2\sqrt{6}}$$

$\therefore$ $\boxed{\sqrt{3}-\sqrt{2}=\sqrt{5-2\sqrt{6}}}$ ***Rpta. d***

Ejemplo 9: ¿Cuál de los siguientes radicales es igual a: $\sqrt{5}+\sqrt{3}$

a) $\sqrt{2+8\sqrt{15}}$ b) $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$ c) $\sqrt{8+\sqrt{15}}$ d) $\sqrt{12+2\sqrt{2}}$ e) $\sqrt{6-2\sqrt{2}}$

Resolución:

Aplicando la misma propiedad que el ejercicio anterior, obtenemos:

$$\sqrt{5}+\sqrt{3}=\sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2+2\sqrt{5}.\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{5+2\sqrt{5.3}+3}=\sqrt{8+2\sqrt{15}}$$

$\therefore$ $\boxed{\sqrt{5}+\sqrt{3}=\sqrt{8+2\sqrt{15}}}$ ***Rpta. b***

Ejemplo 10: Hallar el equivalente de: $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$

a) $3+2\sqrt{5}$ b) $3-2\sqrt{5}$ c) $2-\sqrt{5}$ d) $2+\sqrt{5}$ e) $3+\sqrt{5}$

Resolución:

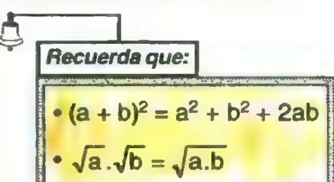
$\sqrt{9+4\sqrt{5}}=\sqrt{A}+\sqrt{B}$; elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$\left(\sqrt{9+4\sqrt{5}}\right)^2=\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)^2$$

$$9+4\sqrt{5}=\sqrt{A}^2+\sqrt{B}^2+2\sqrt{A}.\sqrt{B}$$

$$9+4\sqrt{5}=(A+B)+2\sqrt{AB}$$

Recuerda que:



Por comparación de términos se tiene, que:

i) $\boxed{A+B=9}$

ii) $2\sqrt{AB}=4\sqrt{5}$

$\sqrt{AB}=2\sqrt{5}=\sqrt{5.2^2}$

$\sqrt{AB}=\sqrt{20}\Rightarrow\boxed{AB=20}$

Ahora, buscamos dos números que sumados den 9 y que multiplicados den 20; estos números son: 4 y 5; donde: **A = 4 y B = 5.**

Luego: $\sqrt{9+4\sqrt{5}}=\sqrt{A}+\sqrt{B}\Rightarrow\sqrt{9+4\sqrt{5}}=\sqrt{4}+\sqrt{5}$

$\therefore$ $\boxed{\sqrt{9+4\sqrt{5}}=2+\sqrt{5}}$ ***Rpta. d***

Ejemplo 11: Hallar el equivalente de: $\sqrt{9-2\sqrt{14}}$

a) $3-\sqrt{7}$ b) $3-2\sqrt{7}$ c) $\sqrt{7}-\sqrt{2}$ d) $\sqrt{7}+\sqrt{2}$ e) $3+2\sqrt{7}$

Resolución:

$\sqrt{9-2\sqrt{14}}=\sqrt{A}-\sqrt{B}$; elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$\left(\sqrt{9-2\sqrt{14}}\right)^2=\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)^2$$

Recuerda que:

• $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$

• $\sqrt{a}.\sqrt{b}=\sqrt{a.b}$

$$9-2\sqrt{14}=\sqrt{A}^2+\sqrt{B}^2-2\sqrt{A}.\sqrt{B}$$

$$9-2\sqrt{14} = (A+B) - 2\sqrt{AB}$$

Por comparación de términos se tiene que:

i) $\boxed{A+B=9}$

ii) $2\sqrt{AB} = 2\sqrt{14}$

$\boxed{AB = 14}$

Ahora, buscamos dos números que sumados den 9 y que multiplicados den 14; estos números son: 7 y 2; donde: A = 7 y B = 2.

Luego: $\sqrt{9-2\sqrt{14}} = \sqrt{A}-\sqrt{B} = \sqrt{7}-\sqrt{2} \Rightarrow \therefore \boxed{\sqrt{9-2\sqrt{14}} = \sqrt{7}-\sqrt{2}}$ **Rpta. c**



TALLER DE EJERCICIOS Nº 9

1. Racionaliza:

a) $\frac{1}{\sqrt{7}}$	f) $\frac{3}{\sqrt{2}}$	k) $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{18}}$	ñ) $\frac{3}{\sqrt[4]{5}}$	s) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{9}}$
b) $\frac{5}{\sqrt{13}}$	g) $\frac{4}{\sqrt{5}}$	l) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$	o) $\frac{2}{\sqrt[3]{6}}$	t) $\frac{2}{3\sqrt[6]{2}}$
c) $\frac{5}{\sqrt{6}}$	h) $\frac{12}{\sqrt{3}}$	ll) $\frac{2\sqrt{7}}{5\sqrt{3}}$	p) $\frac{4}{3\sqrt[5]{2}}$	u) $\frac{3}{\sqrt[4]{27}}$
d) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$	i) $\frac{16}{\sqrt{11}}$	m) $\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{50}}$	q) $\frac{4}{3\sqrt[3]{4}}$	v) $\frac{1}{2\sqrt[4]{5}}$
e) $\frac{3}{4\sqrt{6}}$	j) $\frac{-2}{\sqrt{7}}$	n) $\frac{3}{5\sqrt{11}}$	r) $\frac{5}{\sqrt[5]{25}}$	w) $\frac{2}{3\sqrt[4]{32}}$

2. Racionaliza:

a) $\frac{2}{1-\sqrt{3}}$	e) $\frac{1}{2\sqrt{3}-2}$	i) $\frac{24}{7-\sqrt{5}}$
b) $\frac{4}{2+\sqrt{3}}$	f) $\frac{2}{\sqrt{11}-2\sqrt{2}}$	j) $\frac{4}{3\sqrt{5}-2\sqrt{2}}$
c) $\frac{5}{\sqrt{5}+2}$	g) $\frac{1}{\sqrt{3}-1}$	k) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$
d) $\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$	h) $\frac{1}{3\sqrt{3}-\sqrt{5}}$	l) $\frac{2+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$

ll) $\dfrac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}-2}$	n) $\dfrac{\sqrt{7}+1}{2\sqrt{7}+1}$	o) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}$	q) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$
m) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$	ñ) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}$	p) $\dfrac{3\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2}$	r) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

3. ¿Cuál de los siguientes radicales es igual a: $\sqrt{7}+\sqrt{2}$

a) $\sqrt{5+\sqrt{14}}$ b) $\sqrt{9+2\sqrt{14}}$ c) $\sqrt{9+\sqrt{14}}$ d) $\sqrt{5+2\sqrt{14}}$ e) $\sqrt{11+\sqrt{14}}$

4. ¿Cuál de los siguientes radicales es igual a: $5-\sqrt{3}$

a) $\sqrt{28-10\sqrt{3}}$ b) $\sqrt{23-10\sqrt{3}}$ c) $\sqrt{23-5\sqrt{3}}$ d) $\sqrt{28-5\sqrt{3}}$ e) $\sqrt{2-3\sqrt{3}}$

5. ¿Cuál de los siguientes radicales es igual a: $\sqrt{11}+\sqrt{7}$

a) $\sqrt{18+\sqrt{77}}$ b) $\sqrt{4+\sqrt{77}}$ c) $\sqrt{18+2\sqrt{77}}$ d) $\sqrt{4-2\sqrt{77}}$ e) $\sqrt{18-\sqrt{77}}$

6. Halla el equivalente: $\sqrt{12+2\sqrt{35}}$

a) $\sqrt{7}-\sqrt{5}$ b) $\sqrt{7}+\sqrt{5}$ c) $6-\sqrt{35}$ d) $6-2\sqrt{35}$ e) $4+\sqrt{35}$

7. Halla el equivalente de: $\sqrt{39-2\sqrt{108}}$

a) $6+\sqrt{3}$ b) $13-4\sqrt{3}$ c) $6-\sqrt{3}$ d) $7-2\sqrt{3}$ e) $6+4\sqrt{3}$

8. Halla el equivalente de: $\sqrt{20-2\sqrt{91}}$

a) $\sqrt{13}-\sqrt{7}$ b) $10-\sqrt{91}$ c) $10-2\sqrt{13}$ d) $4-\sqrt{13}$ e) $5+2\sqrt{13}$

RESPUESTAS TALLER

1.

d) $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$	i) $\dfrac{16\sqrt{11}}{11}$	m) $\dfrac{\sqrt{10}}{20}$	q) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{3}$	v) $\dfrac{\sqrt[4]{125}}{10}$
e) $\dfrac{3\sqrt{8}}{32}$	j) $\dfrac{-2\sqrt{7}}{7}$	n) $\dfrac{3\sqrt{11}}{55}$	r) $\sqrt[5]{125}$	w) $\dfrac{\sqrt[4]{8}}{6}$
f) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$	k) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$	ñ) $\dfrac{3}{5}\sqrt[4]{125}$	s) $\dfrac{\sqrt[3]{6}}{3}$	
g) $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$	l) $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$	o) $\dfrac{\sqrt[3]{36}}{3}$	t) $\dfrac{\sqrt[6]{32}}{3}$	
h) $4\sqrt{3}$	ll) $\dfrac{2\sqrt{21}}{15}$	p) $\dfrac{2\sqrt[5]{16}}{3}$	u) $\sqrt[4]{3}$	

2.

a) $-\left(1+\sqrt{3}\right)$

b) $4\left(2-\sqrt{3}\right)$

c) $5\left(\sqrt{5}-2\right)$

d) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$

e) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$

f) $\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{11}+2\sqrt{2}\right)$

g) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

h) $\dfrac{3\sqrt{3}+\sqrt{5}}{22}$

i) $\dfrac{6\left(7+\sqrt{5}\right)}{11}$

j) $\dfrac{4\left(3\sqrt{5}+2\sqrt{2}\right)}{37}$

k) $3+2\sqrt{2}$

l) $\dfrac{9+5\sqrt{3}}{6}$

ll) $11+5\sqrt{5}$

m) $5+2\sqrt{6}$

n) $\dfrac{15-3\sqrt{7}}{27}$

ñ) $\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$

o) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+2}{2}$

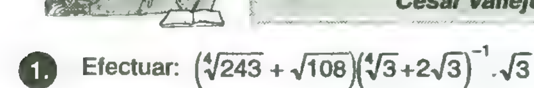
p) $11+4\sqrt{5}$

q) $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+4+\sqrt{6}}{4}$

r) $\dfrac{2\sqrt{30}+3\sqrt{10}+3\sqrt{6}-4\sqrt{3}-6\sqrt{2}-6}{12}$

3.	4.	5.	6.	7.	8.
b	a	c	b	c	a





1. Efectuar: $\left(\sqrt[4]{243}+\sqrt{108}\right)\left(\sqrt[4]{3}+2\sqrt{3}\right)^{-1}.\sqrt{3}$

a) $\sqrt{3}$ b) 3 c) $3\sqrt{9}$ d) $3\sqrt{3}$ e) $1/\sqrt{3}$

Resolución:

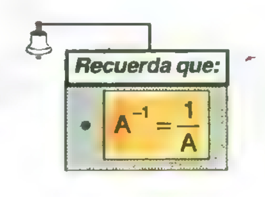
$$\left(\sqrt[4]{243}+\sqrt{108}\right)\left(\sqrt[4]{3}+2\sqrt{3}\right)^{-1}.\sqrt{3}$$

$$\left(\sqrt[4]{3^4.3}+\sqrt{6^2.3}\right)\cdot\frac{1}{\left(\sqrt[4]{3}+2\sqrt{3}\right)}\cdot\sqrt{3}$$

$$\left(3\sqrt[4]{3}+6\sqrt{3}\right)\cdot\frac{1}{\left(\sqrt[4]{3}+2\sqrt{3}\right)}\cdot\sqrt{3}$$

$$3\left(\sqrt[4]{3}+2\sqrt{3}\right)\cdot\frac{1}{\left(\sqrt[4]{3}+2\sqrt{3}\right)}\cdot\sqrt{3}=\boxed{3\sqrt{3}}$$

Rpta. d



2. Efectuar: $\left(\sqrt[3]{\frac{9}{8}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})$

a) 2 b) $\sqrt[3]{2}$ c) $1/\sqrt[3]{2}$ d) 1/2 e) 1

Resolución:

Efectuamos el producto de la manera siguente:

$$\left(\sqrt[3]{\frac{9}{8}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)\times$$
$$(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})$$

$$\sqrt[3]{\frac{9}{8}\cdot 3}+\sqrt[3]{\frac{3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{3}{4}\cdot 3}$$
$$-\sqrt[3]{\frac{9}{8}\cdot 2}+\sqrt[3]{\frac{2}{2}}-\sqrt[3]{\frac{3}{4}\cdot 2}$$

$$\sqrt[3]{\frac{27}{8}}-\sqrt[3]{1}=\frac{3}{2}-1=\boxed{\frac{1}{2}}$$ ***Rpta. d***

Recuerda que:

- $\sqrt[n]{A}\cdot\sqrt[n]{B}=\sqrt[n]{A.B}$

3. Simplificar la expresión: $0,\widehat{45}+\frac{0,3\widehat{6}}{0,8}$

a) $\frac{121}{264}$ b) $\frac{241}{264}$ c) $\frac{181}{132}$ d) $\frac{121}{132}$ e) N.A

Resolución:

* $0,\widehat{45}=\frac{45}{99}=\boxed{\frac{5}{11}}$	** $0,3\widehat{6}=\frac{36-3}{90}=\frac{33}{90}=\boxed{\frac{11}{30}}$	*** $0,8=\frac{8}{10}=\boxed{\frac{4}{5}}$

Luego:

$$0,\widehat{45}+\frac{0,3\widehat{6}}{0,8}=\frac{5}{11}+\frac{\frac{11}{30}}{\frac{4}{5}}=\frac{5}{11}+\frac{11.5}{4.30}=\frac{5}{11}+\frac{11}{4.6}=\frac{5}{11}+\frac{11}{24}$$

$$=\frac{5.24+11.11}{11.24}=\boxed{\frac{241}{264}}$$ ***Rpta. b***

Recuerda que:

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{A.D+B.C}{B.D}$$

4. La expresión decimal equivalente a: $\left[\sqrt{0,91666.......}+\sqrt{3,666.......}\right]^2$

a) 7,52 b) 8,65 c) 8,77 d) 8,97 e) N.A

Resolución:

La expresión dada, se puede escribir así: $\left[\sqrt{0,91\widehat{6}}+\sqrt{3,\widehat{6}}\right]^2$ .... **(I)**

* $0,91\widehat{6}=\dfrac{916-91}{900}=\dfrac{825}{900}=\dfrac{33}{36}=\boxed{\dfrac{11}{12}}$	** $3,\widehat{6}=3\dfrac{6}{9}=3\dfrac{2}{3}=\boxed{\dfrac{11}{3}}$

Los valores hallados los reemplazamos en **(I)**:

$$\left[\sqrt{0,91\widehat{6}}+\sqrt{3,\widehat{6}}\right]^2=\left[\sqrt{\frac{11}{12}}+\sqrt{\frac{11}{3}}\right]^2$$

$$=\left[\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}}\right]^2=\left[\frac{\sqrt{11}+2\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}\right]^2=\left[\frac{3\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}\right]^2$$

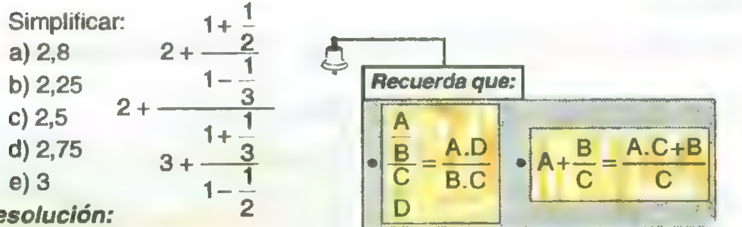
Recuerda que:

$$\left(\frac{A.B}{C.D}\right)^n=\frac{A^n.B^n}{C^n.D^n}$$

$$=\frac{3^2\left(\sqrt{11}\right)^2}{2^2\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{9(11)}{4(3)}=\frac{33}{4}=\boxed{8,25}$$ ***Rpta. e***

5. Simplificar: $2+\cfrac{2+\cfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}}}{3+\cfrac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}}}$

a) 2,8
b) 2,25
c) 2,5
d) 2,75
e) 3



Resolución:

$$2+\cfrac{2+\cfrac{\frac{3}{2}}{\frac{2}{3}}}{3+\cfrac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{2}}}=2+\cfrac{2+\frac{9}{4}}{3+\frac{8}{3}}=2+\cfrac{\frac{2.4+9}{4}}{\frac{3.3+8}{3}}=2+\cfrac{\frac{17}{4}}{\frac{17}{3}}=2+\frac{3}{4}=\frac{11}{4}=\boxed{2,75}$$ ***Rpta. d***

6. Después racionalizar y efectuar

$$M=\frac{2}{\sqrt{3}+1}+\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{6}{\sqrt{11}+\sqrt{5}}+\frac{5}{4+\sqrt{11}}$$

a) 2 b) 5 c) 6 d) 4 e) 3

Resolución:

Racionalizando cada uno de los denominadores de las fracciones dadas, obtenemos:

$$M=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}+\frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}+\frac{6(\sqrt{11}-\sqrt{5})}{(\sqrt{11}+\sqrt{5})(\sqrt{11}-\sqrt{5})}+\frac{5(4-\sqrt{11})}{(4+\sqrt{11})(4-\sqrt{11})}$$

$$M=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}^2-1^2}+\frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{\sqrt{5}^2-\sqrt{3}^2}+\frac{6(\sqrt{11}-\sqrt{5})}{\sqrt{11}^2-\sqrt{5}^2}+\frac{5(4-\sqrt{11})}{4^2-\sqrt{11}^2}$$

$$M=\frac{\not{2}(\sqrt{3}-1)}{\not{2}}+\frac{\not{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{\not{2}}+\frac{\not{6}(\sqrt{11}-\sqrt{5})}{\not{6}}+\frac{\not{5}(4-\sqrt{11})}{\not{5}}$$

$$M=\not{\sqrt{3}}-1+\not{\sqrt{5}}-\not{\sqrt{3}}+\not{\sqrt{11}}-\not{\sqrt{5}}+4-\not{\sqrt{11}} \Rightarrow \therefore \boxed{M=4-1=3}$$ ***Rpta. e***

7. Reducir: $E=\dfrac{\sqrt[6]{4}.\sqrt[4]{4}.\sqrt[3]{4}}{\sqrt[20]{4}.\sqrt[5]{4}}$

a) 4 b) $\sqrt{4}$ c) $\sqrt[4]{4}$ d) 1/4 e) N.A

Resolución:

• Hallamos el común índice, tanto en el numerador, como denominador, así:

$$E=\frac{\sqrt[12]{4^2}.\sqrt[12]{4^3}.\sqrt[12]{4^4}}{\sqrt[20]{4}.\sqrt[20]{4^4}}=\frac{\sqrt[12]{4^2.4^3.4^4}}{\sqrt[20]{4^1.4^4}}$$

$$E=\frac{\sqrt[12]{4^9}}{\sqrt[20]{4^5}}=\frac{\sqrt[4]{4^3}}{\sqrt[4]{4^1}}=\sqrt[4]{\frac{4^3}{4^1}}=\sqrt[4]{4^2}$$

$\therefore \boxed{E=\sqrt[2]{4}=\sqrt{4}}$ ***Rpta. b***

Recuerda que:

- $\sqrt[n]{A}.\sqrt[n]{B}.\sqrt[n]{C}=\sqrt[n]{A.B.C}$
- $A^p.A^q.A^r=A^{p+q+r}$
- $\dfrac{A^p}{A^q}=A^{p-q}$
- $\sqrt[nk]{A^{mk}}=\sqrt[n]{A^m}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}=\sqrt[n]{\dfrac{A}{B}}$

8. ¿Cuántas de estas relaciones son correctas?

I) $2,\widehat{3}>2,333$

III) $6:\dfrac{1}{2}>6:\dfrac{1}{3}$

II) $-0,5<-0,7$

IV) $5.(-3)=3+(-18)$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Resolución:

I) $2,333333........>2,333$ **(V)**

III) $6\times\dfrac{2}{1}>6\times\dfrac{3}{1}$ **(F)**

II) $-\dfrac{5}{\not{10}}<-\dfrac{7}{\not{10}}\Rightarrow 5>7$ **(F)**

IV) $-15=-15$ **(V)**

∴ De estas relaciones 2 son correctas **Rpta. c**

9. ¿Cuáles son siempre verdaderos; si: $a, b \in \mathbb{N}$; $c, d \in \mathbb{Z}$; $e, f \in \mathbb{Q}$

I) $(a + d) \in \mathbb{N}$ **III)** $(c : d) \in \mathbb{Z}$

II) $(d - b) \in \mathbb{Z}$ **IV)** $(e : f) \in \mathbb{Q}$

a) Sólo I b) Sólo IV c) II y III d) II y IV e) I, II y III

Resolución:

I) $a \in \mathbb{N}$ y $d \in \mathbb{Z}$; **si:** $a = 2$ y $d = -5$ $\Rightarrow$ $(a + d) \notin \mathbb{N}$ **(F)**

II) $d \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{N}$; **si:** $d = -7$ y $b = 3$ $\Rightarrow$ $(d - b) \in \mathbb{Z}$ **(V)**

III) $c \in \mathbb{Z}$ y $d \in \mathbb{Z}$; **si:** $c = 9$ y $d = 4$ $\Rightarrow$ $(c : d) \notin \mathbb{Z}$ **(F)**

IV) $e \in \mathbb{Q}$ y $f \in \mathbb{Q}$; **si:** $e = \frac{2}{3}$ y $f = \frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ $(e.f) \in \mathbb{Q}$ **(V)**

∴ De las relaciones dadas son verdaderas (II) y (IV) **Rpta. d**

10. Si: $a = 0{,}2^3 \times 0{,}3^3$; $b = 0{,}08 \times 0{,}0027$; $c = 0{,}008 \times 0{,}027$
Entonces es verdadero que:

a) $a > b = c$ b) $a < b = c$ c) $a = b > c$ d) $a = b < c$ e) $a = b = c$

Resolución:

1) $a = 0{,}2^3 \times 0{,}3^3 = (0{,}2 \times 0{,}3)^3 = (2 \times 10^{-1} \times 3 \times 10^{-1})^3 = (6 \times 10^{-2})^3$

$a = 6^3 \times 10^{-2.3} = 216 \times 10^{-6}$

2) $b = 0{,}08 \times 0{,}0027 = 8 \times 10^{-2} \times 27 \times 10^{-4} = 216 \times 10^{-6}$

3) $c = 0{,}008 \times 0{,}027 = 8 \times 10^{-3} \times 27 \times 10^{-3} = 216 \times 10^{-6}$

∴ $a = b = c$ **Rpta. e**

11. La raiz cuadrada de la diferencia de los números decimales 0,109 375 y 0,093 75 expresado también en forma decimal es:

a) 0,05 b) 0,15 c) 0,25 d) 0,125 e) 0,375

$$\sqrt{0{,}109\ 375 - 0{,}093\ 75} = \sqrt{0{,}015\ 625} = \sqrt{15\ 625 \times 10^{-6}}$$

$$= \sqrt{15\ 625} \times \sqrt{10^{-6}} = 125 \times 10^{-3} = 0{,}125$$ **Rpta. d**



EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE NÚMEROS REALES



NIVEL I

Ejercicio 1 : Indica si son Verdaderas (V) o Falsas (F), las siguientes afirmaciones:

a) 0,714714714 es una expresión decimal periódica pura ...( )
b) El período de 1,4567567567... es 4567 ...( )
c) La parte no periódica de 45,31818... es 453 ...( )
d) $11,\overset{\frown}{53}$ es una expresión decimal periódica mixta. ...( )
e) 7,84111... es la expresión decimal de un número racional ...( )

A) FVFVV **B)** FFVVF **C)** FFFVV
D) FVFVV **E)** FFFFF

Ejercicio 2 : Completa con V o F, según corresponda:

a) $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ ... ( )
b) $0,\overset{\frown}{34} \in \mathbb{Q}$ ... ( )
c) $0 \in \mathbb{R}$ ... ( )
d) $7,1 \in \mathbb{I}$ ... ( )
e) $0,3\overset{\frown}{79} \notin \mathbb{R}$ ... ( )
f) $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{R}$ ... ( )

A) VVFVFV **B)** VFVFVF **C)** FFVVFF
D) VVVFFF **E)** VVFFFF

Ejercicio 3 : Indicar cuántas de las siguientes proposiciones son verdaderas:

I. $\sqrt{4} \in \mathbb{Z}$ **II.** $\sqrt{6} \in \mathbb{Z}$

III. $\dfrac{91}{7} \in \mathbb{Z}$ **IV.** $\sqrt{-9} \in \mathbb{Z}$

V. $(2^4 - 3^2) \in \mathbb{Z}$

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** Todas

Ejercicio 4 : Qué alternativa es falsa:

A) $-2 < |-4|$ **B)** $-2 < -3$ **C)** $-4 < -1$
D) $4 < 9$ **E)** $|-2| < |-9|$

Ejercicio 5 : Calcula el valor numérico de: $[(a - b) : c] \cdot d^{-1}$; para: $a = 0,2$; $b = 1,\overset{\frown}{3}$; $c = -0,\overset{\frown}{09}$; $d = 0,\overset{\frown}{6}$

A) 16 **B)** 17 **C)** 15 **D)** 18 **E)** N.A.

Ejercicio 6 : Indica si son V o F las siguientes afirmaciones:

a) $\sqrt{0,64} > 0,08$ ... ( )
b) $(0,1)^3 < (0,1)^2$ ... ( )
c) $0,\overset{\frown}{09} = 0,1$ ... ( )
d) $1,4\overset{\frown}{9} < 1,\overset{\frown}{49}$ ... ( )

A) FFVV **B)** VFVF **C)** VVVV
D) VVFV **E)** VVVF

Ejercicio 7 : Resuelve suprimiendo paréntesis, corchetes y llaves.

$$1,5 + \{-2-[-0,003 - (1 - 0,25)] - 2,75\} + 3$$

A) 0,35 **B)** 0,53 **C)** 0,48
D) 0,55 **E)** 0,58

Ejercicio 8 : Qué alternativa es falsa:

A) $\sqrt[3]{0,064} = 0,4$

B) $2,4 > 2,0\widehat{4}$
C) $0,34 : 0,1 < 0,34 \,.\, 10$
D) $0,184 : 0,01 > 1,84$
E) $1,8 \,.\, 0,2 = 18 \,.\, 0,02$

Ejercicio 9: Resolver:

$(0,4-3,2) : 0,07 + 2\,(-1,25+3,5) + (-2) : (-0,5)$

A) -32,5 B) -29,5 C) -31,5
D) 31,5 E) -35,1

Ejercicio 10: Si: $x = 1,8 \,.\, 10^{-3}$; $y = 4,5 \,.\, 10^{-4}$. Calcular: x/y

A) 3 B) 4 C) 6 D) 8 E) 1/4

Ejercicio 11: Si: $a = 2,5 \,.\, 10^{-2}$ y $b = 1,5 \,.\, 10^{-3}$. Calcular: "a + b"

A) 2,650 B) $2,65 \,.\, 10^{-1}$
C) $2,56 \,.\, 10^{-3}$ D) $2,65 \,.\, 10^{-2}$
E) $2,65 \,.\, 10^{-3}$

Ejercicio 12: Resuelve utilizando notación científica:

$$\frac{1,6 \cdot 10^{-2} \cdot 2,5 \cdot 10^{-4}}{4\,800 \cdot 6,25 \cdot 10^{3}}$$

A) $1,\widehat{3} \,.\, 10^{-12}$ B) $13 \,.\, 10^{-13}$
C) $1,\widehat{3} \,.\, 10^{-13}$ D) $3,\widehat{1} \,.\, 10^{-13}$
E) $1,\widehat{6} \,.\, 10^{-12}$

Ejercicio 13: Resuelve utilizando notación científica:

$$\frac{135\,000 \cdot (-0,072) \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{9 \cdot 10^{2} \cdot 18 \cdot 10^{-1}}$$

A) -2 B) -3 C) -6 D) -9 E) -4

Ejercicio 14: Resolver:

$$\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{250}$$

A) $8\sqrt[3]{2}$ B) $4\sqrt[3]{2}$ C) $6\sqrt[3]{2}$
D) $9\sqrt[3]{2}$ E) $12\sqrt[3]{2}$

Ejercicio 15: Resolver:

$$\frac{5}{2}\sqrt{8} - \frac{1}{4}\sqrt{18} - 2\sqrt{50}$$

A) $\frac{23}{4}\sqrt{2}$ B) $\frac{-23}{4}\sqrt{2}$ C) $\frac{-23}{2}\sqrt{2}$
D) $\frac{-25}{2}\sqrt{2}$ E) $\frac{-27}{4}\sqrt{2}$

Ejercicio 16: Resolver:

$(2,\widehat{6} - 1,\widehat{4}) + \{-[-(1 - 4,5) + (-0,5 + 0,0\widehat{5})]\} + 3$

A) 9/6 B) 5/6 C) 6/7
D) 7/6 E) 9/7

Ejercicio 17: Qué alternativa es falsa:

A) $3,105 = 3 + \frac{105}{1\,000}$

B) $4,\widehat{9} = 4 + \frac{9}{9}$ C) $0,7\widehat{2} = 65/90$

D) $5,45 = 5 + \frac{9}{20}$ E) $1,\widehat{05} = 1 + \frac{5}{99}$

Ejercicio 18: Calcula el valor numérico de:

$\sqrt{(b-d)\,(-a) \cdot \frac{1}{3}\,c^{-1}}$; para:

$a = 0,2$; $b = 1,\widehat{3}$; $c = -0,\widehat{09}$; $d = 0,\widehat{6}$

A) 3/2 B) 2/3 C) 5/3 D) 4/3 E) 5/6

Ejercicio 19: Observa los siguientes números escritos en notación standar:

I. $7,5 \cdot 10^{6}$ II. $7,5 \cdot 10^{-2}$
III. $7,5 \cdot 10^{4}$ IV. $7,5 \cdot 10^{-1}$
V. $7,5 \cdot 10$

A) I B) II C) III D) IV E) V

Ejercicio 20: $\dfrac{\sqrt{20}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$; es igual a:

A) $\dfrac{2}{5}$ B) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ C) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ E) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

Clave de Respuestas

1. C	2. D	3. C	4. B
5. B	6. C	7. B	8. C
9. C	10. B	11. D	12. C
13. B	14. C	15. B	16. D
17. E	18. B	19. E	20. D

NIVEL II

Ejercicio 1: Efectuar:

$$\frac{\sqrt{3\sqrt{9\sqrt{27\sqrt{81}}}}}{\sqrt{\sqrt{\sqrt{3^{5}}}}}$$

A) 3 B) 1/3 C) 9 D) 1/9 E) 27

Ejercicio 2: Efectuar:

$$\left(\sqrt[8]{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[5]{a}}\right)^{15}$$

A) a B) a^{2} C) a^{3} D) a^{4} E) $a^{1/8}$

Ejercicio 3: Efectuar:

$$\frac{\left(n^{2}\right)^{3}\cdot\left(n^{3}\right)^{2}\cdot\left(n^{-6}\right)^{1}}{\left(n^{2}\right)^{5}}$$

A) n^{2} B) n^{-2} C) n^{4} D) n^{-4} E) n^{6}

Ejercicio 4: Reducir:

$$\frac{2\sqrt{50}+3\sqrt{8}-\sqrt{32}}{\sqrt{98}-\sqrt{18}+3\sqrt{2}}$$

A) 12/7 B) 6/7 C) 12 D) 6 E) 7

Ejercicio 5: Efectuar:

$$E=\sqrt{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\right]}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Ejercicio 6: Al efectuar: $\left(3,\widehat{3}-3-\dfrac{1}{3}\right)^{-3}$; se obtiene:

A) -1 B) 0 C) 8/27
D) 27/8 E) 9/6

Ejercicio 7: Racionalizar ambos términos de la siguiente fracción: $\sqrt{3}/\sqrt{5}$

A) $\sqrt{15}/5$ B) $3/\sqrt{15}$ C) 1
D) 3/5 E) Imposible

Ejercicio 8: Efectuar:

$$\left(\sqrt{18}+\sqrt{8}+\sqrt{2}\right)^2$$

A) $6\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) 72
D) 36 E) 12

Ejercicio 9: Efectuar:

$$E=\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}-\left(-\frac{1}{6}\right)^{-2}\right]^{0,5}$$

A) 1 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Ejercicio 10: Determinar el resultado de simplificar:

$$\frac{\sqrt[5]{a^3b^2}\cdot\sqrt{ab}}{\sqrt[10]{ab^9}}$$

A) ab B) a/b C) a D) b E) $\sqrt{ab}$

Ejercicio 11: Sumar: $2,\widehat{3}+0,\widehat{54}+1,\widehat{03}$

A) $3\frac{10}{11}$ B) $3\frac{9}{11}$ C) $3\frac{4}{11}$
D) $3\frac{7}{11}$ E) $3\frac{5}{11}$

Ejercicio 12: Al simplificar la expresión:

$\sqrt{200}-\sqrt{18}+\sqrt{8}$; se obtiene:

A) $2\sqrt{2}$ B) $6\sqrt{2}$ C) $15\sqrt{2}$
D) $-15\sqrt{2}$ E) $9\sqrt{2}$

Ejercicio 13: Efectuar:

$$\frac{\sqrt{20}+\sqrt{27}-\sqrt{3}}{\sqrt{80}+\sqrt{48}}$$

A) 2 B) 1 C) 1/4 D) 4 E) 1/2

Ejercicio  **:** La expresión:

$\sqrt{\frac{4}{3}}-\sqrt{\frac{3}{4}}$; es igual a:

A) $\sqrt{3}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ C) 6
D) $\frac{5\sqrt{3}}{6}$ E) 1

Ejercicio 15: Luego de racionalizar: $\frac{2}{2-\sqrt{3}}$; se obtiene una expresión de la forma: $a+b\sqrt{c}$; hallar el valor de: $\frac{a+b-c}{3}$

A) 1 B) -1 C) 3 D) -3 E) 4

Ejercicio 16: $\sqrt{108}-\frac{2}{3-\sqrt{27}}$; equivale a:

A) $\frac{19\sqrt{3}+1}{3}$ B) $3+3\sqrt{3}$
C) $6+2\sqrt{27}$ D) $4\sqrt{108}$ E) -2

Ejercicio 17: Luego de racionalizar: $\frac{4}{\sqrt{15}+\sqrt{7}}$. Indicar el denominador racionalizado.

A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 3

Ejercicio 18: Simplificar:

$$E = \left[\frac{16^{-0,25} - (-8)^{-1/3}}{4^{-0,5} - 9^{-0,5}}\right]^2$$

A) 4 B) 1/4 C) 36 D) 25 E) 1/8

Ejercicio 19 : Efectuar:

$$\frac{3}{\sqrt{7}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{7}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{2}{7}$$

A) 9/7 B) 7 C) 1 D) 2/7 E) 8

Ejercicio 20 : Simplificar:

$$\sqrt{2\ (\sqrt{5}+2)\cdot\sqrt{9-4\sqrt{5}}}$$

A) 2 B) $\sqrt{5}$ C) 5 D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}$

Ejercicio 21 : Reducir:

$$\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} + \frac{2}{\sqrt{6+2\sqrt{8}}}$$

A) Cero B) 1 C) -1

D) $\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

Ejercicio 22 : Reducir:

$$\sqrt{10+2\sqrt{8-2\sqrt{7}}} - 1$$

A) $\sqrt{7}$ B) $\sqrt{7}+1$ C) $\sqrt{2}-1$

D) $\sqrt{5}+2$ E) $\sqrt{5}-2$

Ejercicio 23 : Efectuar:

$$\sqrt{11+2\sqrt{18}} + \left(1+\sqrt[4]{2}\right)\left(1-\sqrt[4]{2}\right)$$

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) 4 D) 3 E) $\sqrt{3}$

Ejercicio 24 : Simplificar:

$$\sqrt{19+2\sqrt{48}} + \sqrt{7-2\sqrt{12}}$$

A) $\sqrt{3}+1$ B) 4 C) $\sqrt{2}$

D) 6 E) $2\left(\sqrt{3}+1\right)$

Ejercicio 25 : Efectuar:

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^6$$

A) 16 B) 64 C) 8

D) 128 E) 256

Clave de Respuestas

1. A	2. A	3. D	4. A	5. C
6. B	7. E	8. C	9. D	10. C
11. A	12. E	13. E	14. B	15. A
16. A	17. D	18. C	19. C	20. E
21. B	22. A	23. C	24. D	25. C

2.5. Orden y Desigualdad en $\mathbb{R}$. Intervalos y la Recta Real.

• ***Desigualdades:***

La representación entre números reales y puntos de una recta puede usarse para dar una interpretación geométrica de la **relación de orden** entre los números reales.

La relación $a < b$ significa que sobre una recta numérica el punto **A** corresponde el número "a"; que se encuentra a la izquierda del punto **B** correspondiente al número "b".



El símbolo < se lee: **"es menor que"**

• También usaremos los símbolos siguientes:

> ; que se lee: **"es mayor que"**
≤ ; que se lee: **"es menor o igual que"**
≥ ; que se lee: **"es mayor o igual que"**

Un número "**a**" es positivo si: $a > 0$

Un número "**a**" es negativo si: $a < 0$

Definición:

La desigualdad es una expresión que indica que un número es mayor o menor que otro.

Por ejemplo: $4 < 9$

• Decimos que un número real "a" es menor que otro número real "b" ($a < b$) Si: $b - a$, es un número positivo.

$$a < b \; ; \text{ si: } (b - a) \in \mathbb{R}^+$$

Debemos saber que $a < b$ tiene el mismo significado que $b > a$; osea:

$a < b$ = "a" es menor que "b"

$b > a$ = "b" es mayor que "a"

$7 < 11$ es lo mismo que: $11 > 7$

• Para la comparación de números reales hay que tener en cuenta lo siguiente:

1) Todo número positivo es mayor que cero.

$\forall a \in \mathbb{R}^+;\ a > 0$ — ***Ejemplo:*** $5 > 0$

2) Cero es mayor que todo número negativo.

$\forall a \in \mathbb{R}^-;\ 0 > a$ — ***Ejemplo:*** $0 > -3$

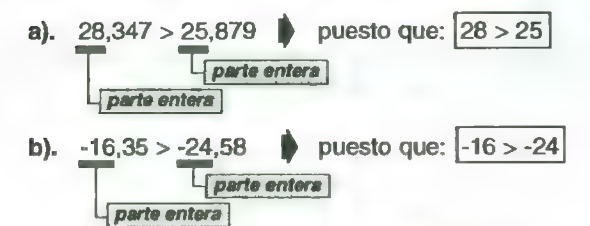
Recuerda que:

∀ : Significa para todo.

3) Todo número positivo es mayor que cualquier número negativo.

$\forall\ a \in \mathbb{R}^+ ;\ b \in \mathbb{R}^- ;\ a > b$ — *Ejemplo:* $9 > -11$

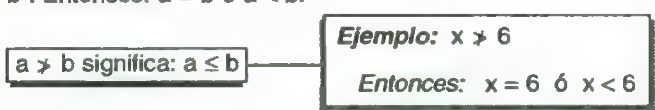
4) Si dos expresiones decimales tienen partes enteras diferentes, es mayor la que tiene mayor parte entera. **Ejemplos:**



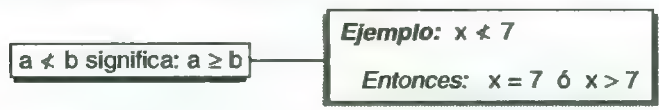
5) Si dos expresiones decimales positivas, tienen la misma parte entera y diferentes partes decimales, es mayor la que tiene mayor la primera cifra decimal en la que se diferencian las dos expresiones. **Ejemplos:**

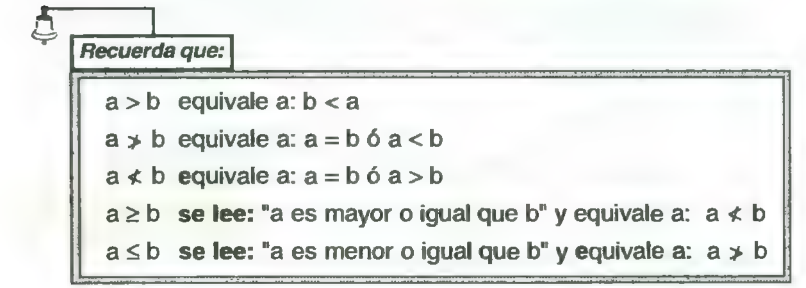


• La expresión: $a \ngtr b$ significa que **"a no es mayor que b"**, si "a" no es mayor que "b". Entonces: $a = b$ ó $a < b$.



• La expresión: $a \nless b$ significa que **"a no es menor que b"**, si "a" no es menor que "b". Entonces: $a = b$ ó $a > b$.





2.5.1. Propiedades de la Relación Menor:

Las propiedades para la relación menor que, también se cumple para la relación mayor que:

1º) Propiedad de la tricotomía:

Dados dos números reales a y b, sólo una de las siguientes expresiones es verdadera.

$$\boxed{a < b \ ; \ a = b \ ; \ a > b}$$

Ejemplo: Si: $x \neq 5$ ("x" no es igual a 5), entonces: $x < 5$ ó $x > 5$

2º) Propiedad Transitiva:

Dados dos números reales a y b, donde: $a < b$ y $b < c$, entonces: $a < c$.

Luego: $\boxed{\forall\ a; b; c \in \mathbb{R};\ a < b \text{ y } b < c \Rightarrow a < c}$

3º) Propiedad Aditiva de la desigualdad.

Se puede sumar un mismo número real, a ambos miembros de una desigualdad, sin que esta altere.

Si: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ ➧ $\boxed{\forall\ a; b; c \in \mathbb{R};\ a < b \Rightarrow a + c < b + c}$

Ejemplos:

i) $x - 4 < 9 \Rightarrow x - 4 + 4 < 9 + 4$; es decir: $\boxed{x < 13}$

ii) $x + 3 > 8 \Rightarrow x + 3 - 3 > 8 - 3$; es decir: $\boxed{x > 5}$

2.5.2. Propiedades Multiplicativas de la Desigualdad.

1º) Si se multiplica por un mismo número real positivo, a ambos miembros de una desigualdad, la desigualdad no altera.

$$\boxed{a < b \text{ y } c > 0 \Rightarrow a.c < b.c}$$

Ejemplos:

i) $\frac{1}{3}x < 7 \Rightarrow \frac{1}{3}x(3) < 7(3)$; es decir: $\boxed{x < 21}$

ii) $5x < 30 \Rightarrow 5x\left(\frac{1}{5}\right) < 30\left(\frac{1}{5}\right)$; es decir: $\boxed{x > 6}$

2º) Si a ambos miembros de una desigualdad se les multiplica por un mismo número negativo, entonces el sentido de la desigualdad cambia.

$$\boxed{a < b \text{ y } c < 0 \Rightarrow a.c > b.c}$$

Ejemplos:

i) $-7 < 3 \Rightarrow -7(-2) > 3(-2)$; es decir: $\boxed{14 > -6}$

ii) $-2x < 14 \Rightarrow -2x\left(-\frac{1}{2}\right) > 14\left(-\frac{1}{2}\right)$; es decir: $\boxed{x > -7}$

iii) $-x > -6 \Rightarrow -x(-1) < -6(-1)$; es decir: $\boxed{x < 6}$

2.5.3. Propiedades del Producto de dos Números Reales.

1º) Si el producto de dos números reales es mayor que cero, entonces ambos números son positivos, o ambos números son negativos.

$$a.b > 0 \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \text{ y } b > 0 \text{ ó} \\ a < 0 \text{ y } b < 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

i) $3x > 0 \Rightarrow \boxed{x > 0}$

ii) $-6x > 0 \Rightarrow \boxed{x < 0}$

iii) $5(x - 2) > 0 \Rightarrow x - 2 > 0 ; \Rightarrow \boxed{x > 2}$

iv) $-9(x + 3) > 0 \Rightarrow x + 3 < 0 ; \Rightarrow \boxed{x < -3}$

2º) Si el producto de dos números es menor que cero, entonces uno de ellos es positivo y el otro negativo.

$$a.b < 0 \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \text{ y } b < 0 \text{ ó} \\ a < 0 \text{ y } b > 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

i) $4x < 0 \Rightarrow \boxed{x < 0}$

ii) $-7x < 0 \Rightarrow \boxed{x > 0}$

iii) $5(x - 6) < 0 \Rightarrow x - 6 < 0 ; \Rightarrow \boxed{x < 6}$

iv) $-4(x + 5) < 0 \Rightarrow x + 5 > 0 ; \Rightarrow \boxed{x > -5}$

2.5.4. Propiedad del Exponente Par de un Número Real.

El cuadrado de todo número real es cero o es positivo.

$\boxed{\forall a \in \mathbb{R} \; ; \; a^2 \geq 0}$ Siendo: "a" positivo ó negativo.

Ejemplo: Si: $(x - 3)^2 \geq 0$

Entonces:
$$\begin{cases} (x - 3) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 3} \\ (x - 3) > 0 \Rightarrow \boxed{x > 3} \\ (x - 3) < 0 \Rightarrow \boxed{x < 3} \end{cases}$$

> ***Observación:***
>
> *Toda expresión de la forma: $(x-3)^2 \geq 0$, el valor que toma "x" es cualquier número real.*

2.6. Inecuaciones:

Definición: Una inecuación es una desigualdad en las que hay una o más cantidades desconocidas (incógnitas) y que sólo se verifica para determinados valores de las incógnitas.

Ejemplo 1: La desigualdad: $2x + 1 > x + 5$; es una inecuación porque tiene una incógnita "x" que se verifica para valores de "x" mayores que 4; veamos:

$$2x + 1 > x + 5 \quad ; \text{ transponemos términos.}$$

$$2x - x > 5 - 1 \Rightarrow \boxed{x > 4}$$

Ejemplo 2: La desigualdad: $3y - 4 < y + 6$; es una inecuación porque tiene una incógnita "y" que se verifica para valores de "y" menores que 5, veamos:

$$3y - 4 < y + 6 \quad ; \text{ transponemos términos.}$$

$$3y - y < 6 + 4 \Rightarrow 2y < 10 \text{ ; despejamos "y"}$$

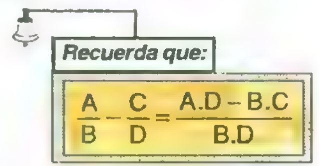
$$y < \frac{10}{2} \Rightarrow \therefore \boxed{y < 5}$$

Ejemplo 3: La desigualdad: $\frac{x}{2} - 1 < \frac{x}{3} + 2$ es una inecuación porque tiene una incógnita "x" que se verifica para valores "x" mayores que 18; veamos:

$$\frac{x}{2} - 1 < \frac{x}{3} + 2 \quad ; \text{ transponemos términos.}$$

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{3} < 2 + 1$$

$$\frac{3x - 2x}{6} > 3 \Rightarrow \therefore \boxed{x > 18}$$





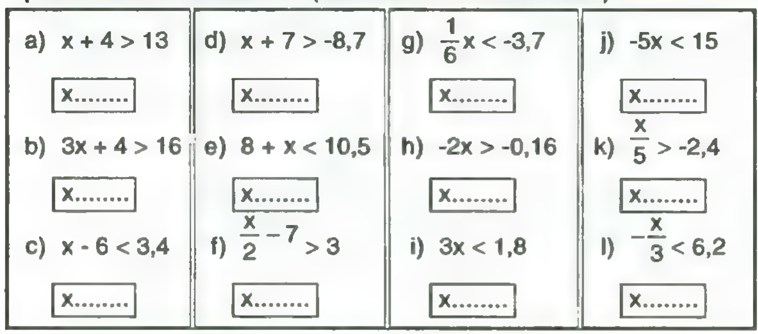
TALLER DE EJERCICIOS Nº 

1. Compara los siguientes números reales y escribe en el espacio libre uno de los símbolos: > ; < ó =

a) 13,643 8	☐	13,645 9	**g)** 834,563 21	☐	834,562 73
b) -17,682	☐	-17,694	**h)** 6,352 3421	☐	6,352 346 1

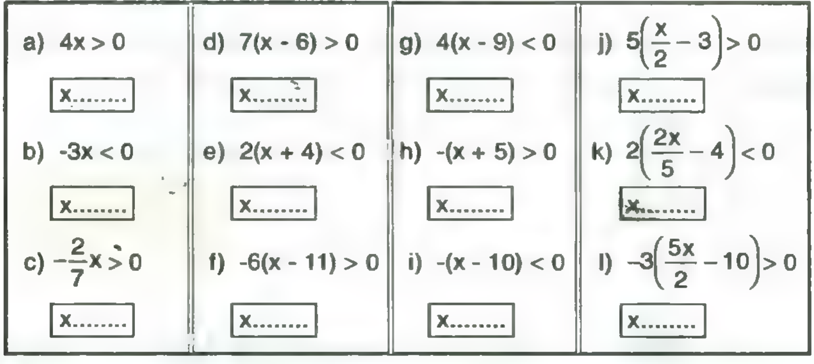
c) 7,456 8 ☐ 7,438 7	i) 3/4 ☐ 0,75
d) -5,746 ☐ -5,758	j) -4/5 ☐ -0,8
e) $-\sqrt{5}$ ☐ -2,235	k) $-\sqrt{10}$ ☐ -3,24
f) 78,124 53 ☐ 78,3214	l) 3,2 ☐ π

2. Aplica las propiedades: **"Aditiva de la Desigualdad"**; **"Multiplicativas de la Desigualdad"**, y determina en cada caso todos los valores reales que puede tener la variable x. (Resolver las inecuaciones).



a) $x + 4 > 13$	d) $x + 7 > -8,7$	g) $\frac{1}{6}x < -3,7$	j) $-5x < 15$
x........	x........	x........	x........
b) $3x + 4 > 16$	e) $8 + x < 10,5$	h) $-2x > -0,16$	k) $\frac{x}{5} > -2,4$
x........	x........	x........	x........
c) $x - 6 < 3,4$	f) $\frac{x}{2} - 7 > 3$	i) $3x < 1,8$	l) $-\frac{x}{3} < 6,2$
x........	x........	x........	x........

3. Aplica las propiedades del producto de dos números reales y determina todos los valores que puede tener la variable "x". (Resolver las inecuaciones).



a) $4x > 0$	d) $7(x - 6) > 0$	g) $4(x - 9) < 0$	j) $5\left(\frac{x}{2} - 3\right) > 0$
x........	x........	x........	x........
b) $-3x < 0$	e) $2(x + 4) < 0$	h) $-(x + 5) > 0$	k) $2\left(\frac{2x}{5} - 4\right) < 0$
x........	x........	x........	x........
c) $-\frac{2}{7}x > 0$	f) $-6(x - 11) > 0$	i) $-(x - 10) < 0$	l) $-3\left(\frac{5x}{2} - 10\right) > 0$
x........	x........	x........	x........

4. Aplica la propiedad del **"exponente par de un número real"** y halla el conjunto solución de:

a) $(3x - 6)^2 \geq 0$	d) $(x + 7)^2 \geq 0$	g) $\left(\frac{x-7}{2}\right)^2 \geq 0$	j) $\left(\frac{x}{3} - 1\right)^2 \geq 0$
b) $(2x - 8)^2 \geq 0$	e) $(x - 5)^2 \geq 0$	h) $(3x - 2)^2 \geq 0$	k) $(2x - 6)^2 \geq 0$

c) $(x+3)^2 \geq 0$	f) $\left(\frac{x+3}{2}\right)^2 \geq 0$	i) $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 \geq 0$	l) $\left(\frac{x+1}{2}-5\right)^2 \geq 0$

2.6.1. Intervalos:

Los intervalos son subconjuntos de los números reales que sirven para expresar la solución de las inecuaciones, estos intervalos se presentan gráficamente en la recta numérica real.

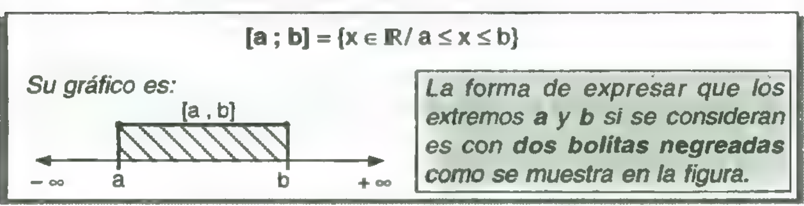
Consideremos los siguientes tipos de intervalos:

A) Intervalo Cerrado de Extremos a y b. Es un subconjunto de los números reales "x" comprendidos entre a y b, incluyendo dichos números.

Se denota así: **[a ; b]** , esto es:

$$[a\ ;\ b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$$

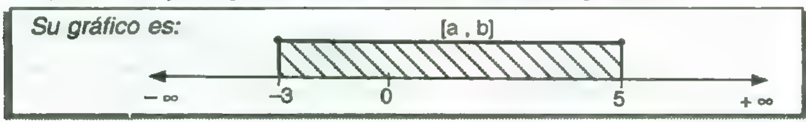
Su gráfico es:



*La forma de expresar que los extremos **a** y **b** si se consideran es con **dos bolitas negreadas** como se muestra en la figura.*

Ejemplo: [-3, 5] se lee: intervalo cerrado en -3 y 5. Cada elemento de este subconjunto es mayor o igual que -3; pero a la vez menor o igual que 5.

Su gráfico es:

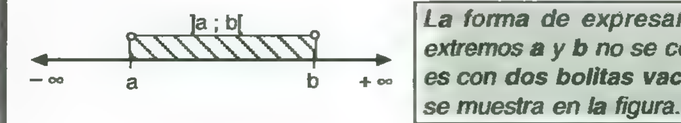


B) Intervalo Abierto de Extremos a y b. Es un subconjunto de los números reales "x" comprendidos entre a y b, sin incluir dichos números.

Se denota Así: **]a ; b[**, es decir:

$$]a\ ;\ b[= \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$$

Observa que el intervalo abierto no incluye ninguno de sus extremos lo cual se indica marcando en la gráfica con el símbolo (**o**) los puntos correspondientes.

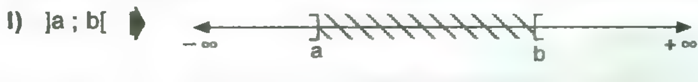


*La forma de expresar que los extremos **a** y **b** no se consideran es con **dos bolitas vacias** como se muestra en la figura.*

Nota:

El intervalo abierto se puede denotar por cualquiera de estas dos formas:

I)]a ; b[

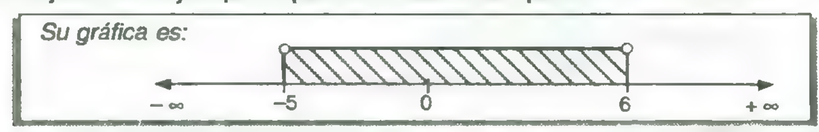


II) ⟨a ; b⟩



Ejemplo:]5 ; 6[; se lee: intervalo abierto en -5 y 6. Esta simbología nos indica que se trata de un subconjunto de números reales, donde cada elemento de este subconjunto es mayor que -5 pero a la vez menor que 6.

Su gráfica es:

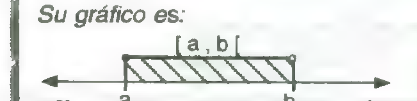


C) Intervalo Cerrado a la izquierda y Abierto a la Derecha de Extremos a y b. Es un subconjunto de los números reales "x", comprendidos entre a y b, sin incluir el extremo **b**.

Se denota Asi: **[a ; b[**, esto es:

$$[a ; b[= \{x / a \leq x < b\}$$

Su gráfico es:

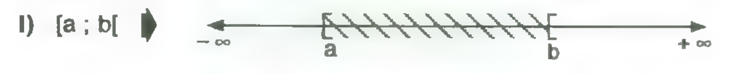


Observa: *El extremo a pertenece al intervalo; en cambio el extremo **b** no pertenece al intervalo.*

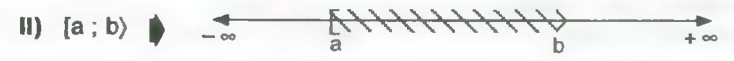
Nota:

Este tipo de intervalo se puede denotar por cualquiera de estas dos formas:

I) [a ; b[

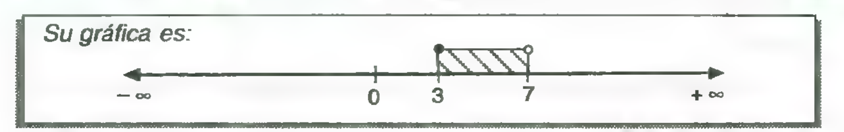


II) [a ; b⟩



Ejemplo: [3 ; 7[; se lee: Intervalo cerrado por la izquierda en 3 y abierto por la derecha en 7, esta simbología nos indica que se trata de un subconjunto de números reales, donde cada elemento de este subconjunto es mayor o igual a 3 pero a la vez menor que 7.

Su gráfica es:



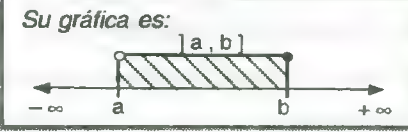
D) ***Intervalo Cerrado a la Derecha y Abierto a la Izquierda de Extremos a y b.*** Es un subconjunto de los números reales "x" comprendidos entre a y b, sin incluir el extremo **a**.

Se denota por:]a ; b].

Osea:

$$]a ; b] = \{x / a < x \leq b\}$$

Su gráfica es:



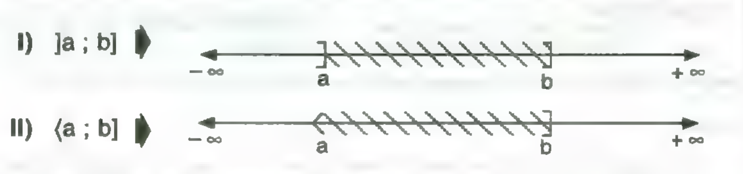
Observa: *El extremo **a** no pertenece al intervalo; en cambio el extremo **b** si pertenece al intervalo.*

Nota:

Este tipo de intervalo se puede denotar por cualquiera de estas dos formas:

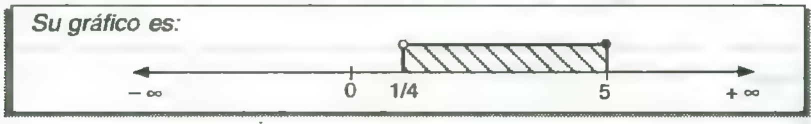
I)]a ; b]

II) ⟨a ; b]



Ejemplo:]1/4 ; 5] ; se lee: intervalo abierto por la izquierda en 1/4 y cerrado por la derecha en 5,está simbología nos indica que se trata de un subconjunto de números reales; donde cada elemento de este subconjunto es mayor que 1/4 pero a la vez menor o igual que 5. Su gráfico es:

Su gráfico es:



* También consideramos los intervalos llamados **intervalos infinitos** que se definen de la manera siguiente:

E) Intervalo Cerrado en "a" por la izquierda. Es el subconjunto de los números reales "x" mayores o iguales que **a**; esto es:

$$[a ; \infty[= \{x / x \geq a\}$$

Su gráfica es: [a , ∞ [

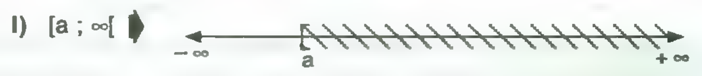
– ∞ a + ∞

Observa: *El extremo **a** pertenece al intervalo.*

Nota:

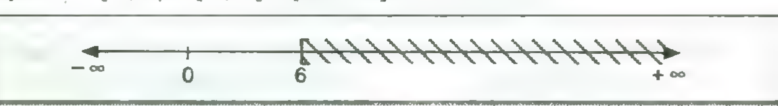
Este tipo de intervalo se puede denotar por cualquiera de estas dos formas:

I) $[a\ ;\ \infty[$



II) $[a\ ;\ \infty\rangle$ – ∞ a + ∞

Ejemplo: $[6\ ;\ \infty\rangle = [6\ ;\ \infty[= \{x/\ x \geq 6\}$



F) ***Intervalo Abierto en "a" por la izquierda.*** Es un subconjunto de los números reales "x" mayores que **a**, es decir:

$$]a\ ;\ \infty[= \{x/\ x > a\}$$

Su gráfica es: $]\ a\ ,\ \infty\ [$

– ∞ a + ∞

Observa: *El extremo **a** no pertenece al intervalo.*

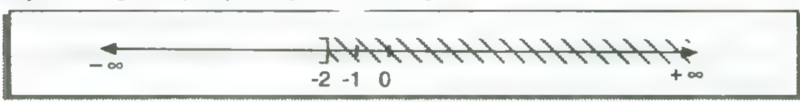
Nota:

Este tipo de intervalo se puede denotar por cualquiera de estas dos formas:

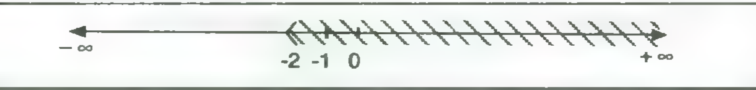
I) $]a\ ;\ \infty[$ – ∞ a + ∞

II) $\langle a\ ;\ \infty\rangle$ – ∞ a + ∞

Ejemplo: $]-2\ ;\ \infty\rangle = \langle -2\ ;\ \infty\rangle = \{x/\ x > -2\}$



• También puede ser así:



G) ***Intervalo Cerrado en "b" por la Derecha:*** Es un subconjunto de los números reales "x" menores o iguales que **b**; osea:

$]-\infty ; b] = \{x/ x \leq b\}$

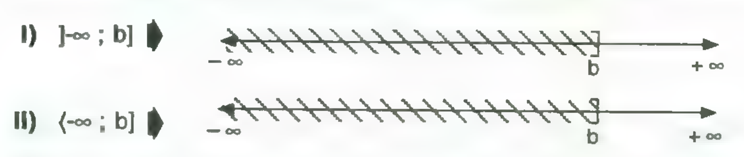
Su gráfica es: $]-\infty ; b]$

$-\infty$ b $+\infty$

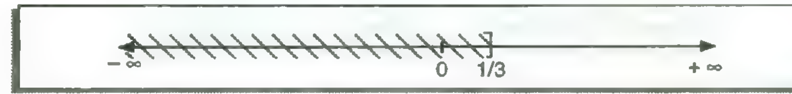
Observa: *El extremo **b** pertenece al intervalo.*

Nota:

Este tipo de intervalo se puede denotar por cualquiera de estas dos formas:

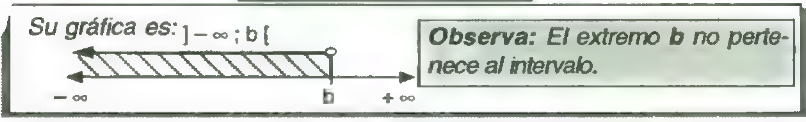


Ejemplo: $]-\infty ; 1/3] = \langle -\infty ; 1/3] = \{x/ x \leq 1/3\}$



H) Intervalo Abierto en "b" por la Derecha. Es un subconjunto de los números reales "x" menores que **b**; esto es:

$]-\infty ; b[= \{x/ x < b\}$



Nota:

Este tipo de intervalo se puede denotar por cualquiera de estas dos formas:

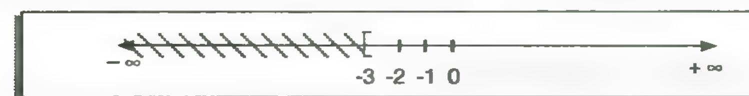
I) $]-\infty ; b[$

$-\infty$ b $+\infty$

II) $\langle -\infty ; b\rangle$

$-\infty$ b $+\infty$

Ejemplo: $]-\infty ; -3[= \langle -\infty ; -3\rangle = \{x/ x < -3\}$



* También puede ser así:



Observación:

Algunas veces es necesario expresar el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) como un intervalo, veamos:

Conjunto $\mathbb{R} =]-\infty \, ; \infty[$ ó Conjunto $\mathbb{R} = \langle -\infty \, ; +\infty \rangle$

$\mathbb{R}$

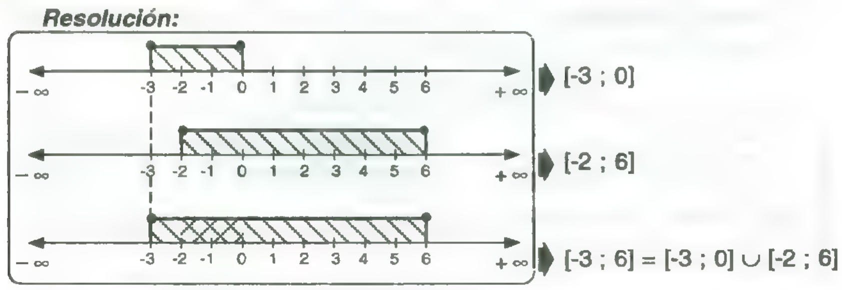
$-\infty$ $+\infty$

El símbolo ∞ (llamado infinito) puede considerarse como algo mayor que cualquier número real y en forma análoga; $-\infty$ (que se lee infinito negativo) como algo menor que cualquier número real.

Reunión, Intersección y Diferencia de Intervalos.

Ejemplo 1: Halla: $[-3 \, ; 0] \cup [-2 \, ; 6]$

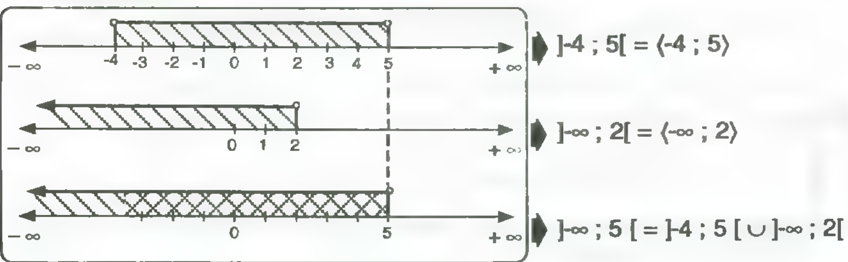
Resolución:



Luego: $[-3 \, ; 0] \cup [-2 \, ; 6] = [-3 \, ; 6]$

Ejemplo 2: Halla: $]-4 \, ; 5[\cup]-\infty \, ; 2[$

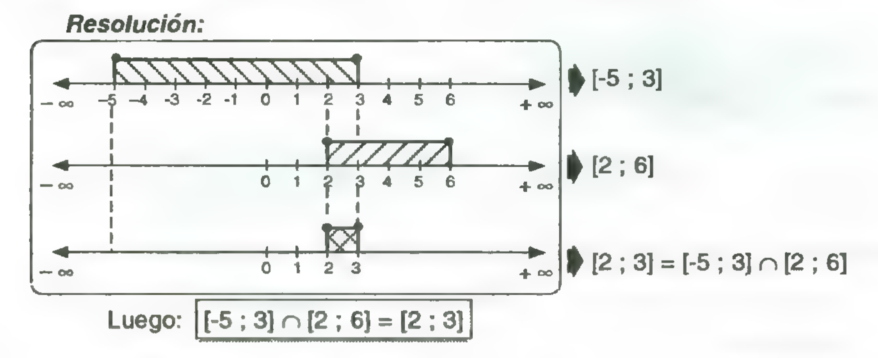
Resolución:



Luego: $]-4\ ;\ 5\ [\ \cup\ ]-\infty\ ;\ 2[\ =\ ]-\infty\ ;\ 5\ [$ ó $\langle -4\ ;\ 5\rangle \cup \langle -\infty\ ;\ 2\rangle = \langle -\infty\ ;\ 5\rangle$

Ejemplo 3: Halla: $[-5\ ;\ 3] \cap [2\ ;\ 6]$

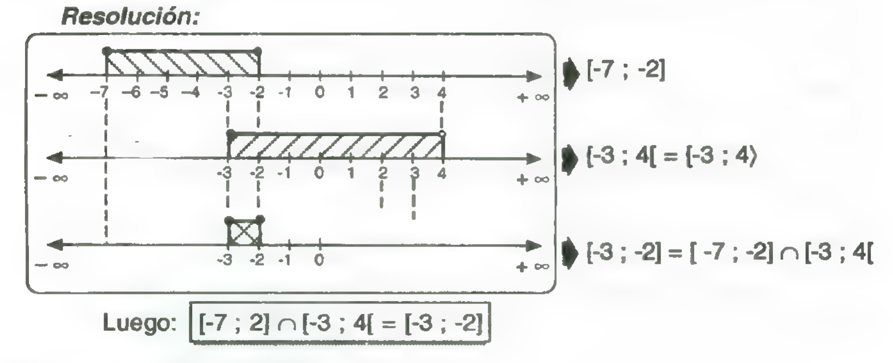
Resolución:



Luego: $[-5\ ;\ 3] \cap [2\ ;\ 6] = [2\ ;\ 3]$

Ejemplo 4: Halla: $[-7\ ;\ -2] \cap [-3\ ;\ 4[$

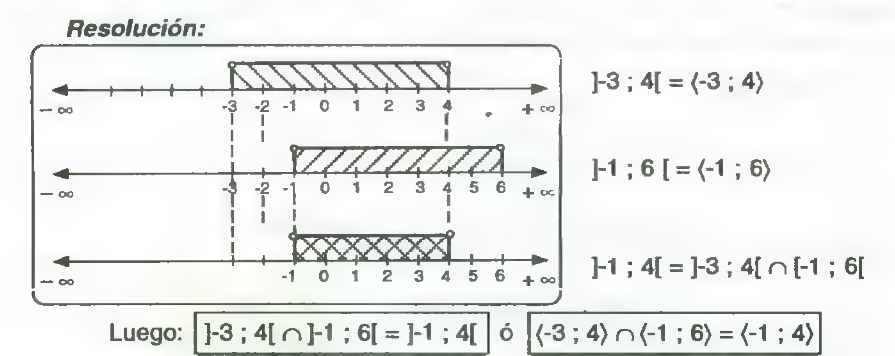
Resolución:



Luego: $[-7\ ;\ 2] \cap [-3\ ;\ 4[\ = [-3\ ;\ -2]$

Ejemplo 5: Halla: $]-3\ ;\ 4[\ \cap\ ]-1\ ;\ 6[$

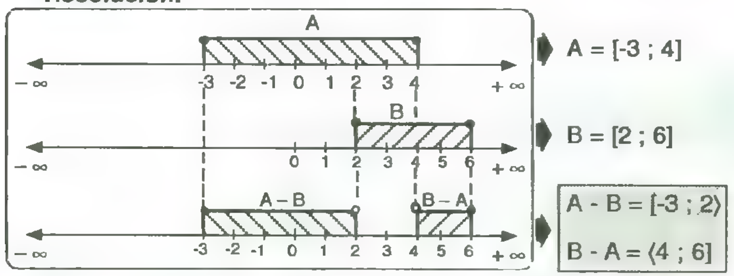
Resolución:



Luego: $]-3\ ;\ 4[\ \cap\ ]-1\ ;\ 6[\ =\ ]-1\ ;\ 4[$ ó $\langle -3\ ;\ 4\rangle \cap \langle -1\ ;\ 6\rangle = \langle -1\ ;\ 4\rangle$

Ejemplo 6: Si: A = [-3 ; 4] y B = [2 ; 6] Halla: "A - B" y "B - A"

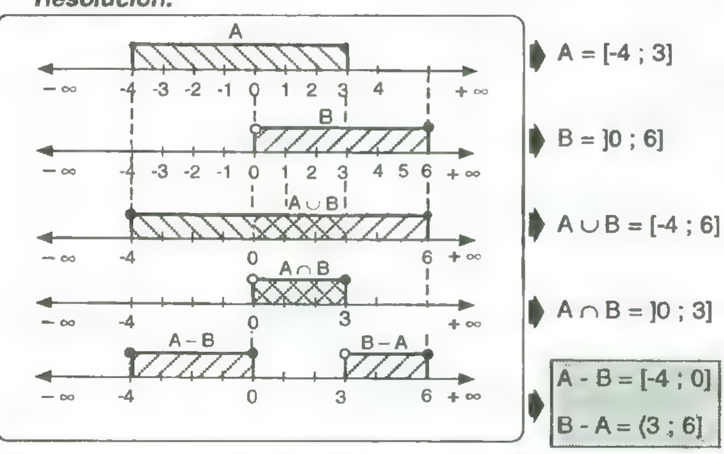
Resolución:



Ejemplo 7: Dados los intervalos: A = [-4 ; 3] y B =]0 ; 6]; Halla:

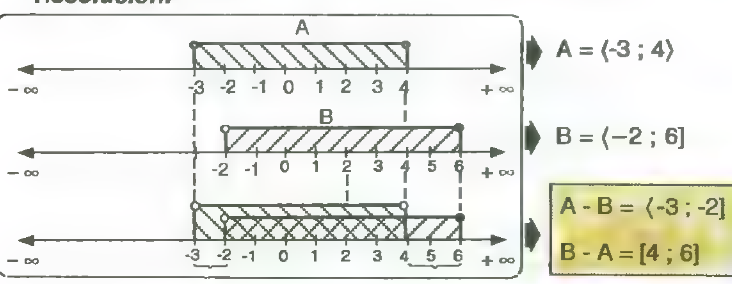
a) A ∪ B b) A ∩ B c) A - B d) B - A

Resolución:

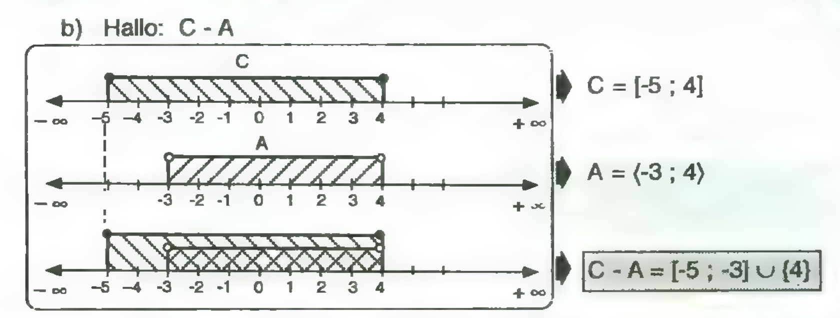


Ejemplo 8: Sabiendo que: A = ⟨-3 ; 4⟩ ; B = ⟨-2 ; 6] ; C = [-5 ; 4]; hallar el intervalo que corresponde a cada conjunto siguiente: a) A - B b) C - A

Resolución:

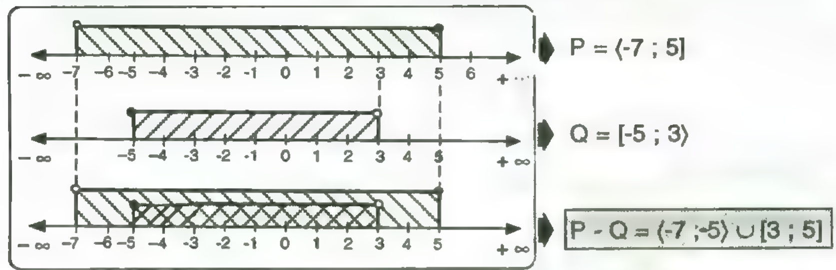


b) Hallo: C - A



Ejemplo 9: Sabiendo que: P = ⟨-7 ; 5] ; Q = [-5 ; 3⟩ Hallar: P - Q.

Resolución:





EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE INTERVALOS





1 Utilizando la notación de conjuntos expresa:

a) El conjunto de los números reales comprendidos entre -5 y 8, incluyendo estos números.
b) El conjunto de los números reales comprendidos entre -3 y 11.
c) El conjunto de los números reales mayores que -1 ó iguales a -1.
d) El conjunto de los números reales menores que 4.
e) El conjunto de los números reales no menores que -6 pero menores que 7.

Resolución:

a) [-5 ; 8] = {x/-5 ≤ x ≤ 8}

b)]-3 ; 11 [ó ⟨-3 ; 11⟩ = {x/3 < x < 11}

c) [-1 ; ∞[ó [-1 ; ∞⟩ = {x/ x ≥ -1}

d)]-∞ ; 4[ó ⟨-∞ ; 4⟩ = {x/ x < 4}

e) [-6 ; 7[ó [-6 ; 7⟩ = {x/ -6 ≤ x < 7}

2 Expresa los conjuntos siguientes en notación de intervalos.

a) $\{x/ -3 \le x \le 6\}$	c) $\{x/ -2 < x < 3\}$	e) $\{x/ -4 \le x\}$
b) $\{x/ -5 < x \le 2\}$	d) $\{x/ 7 \le x \le 10\}$	f) $\{x/ x > 5\}$

Resolución:

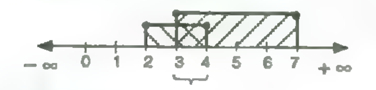
a) $\{x/ -3 \le x \le 6\} = [-3 ; 6]$	b) $\{x/ -5 < x \le 2\} =]-5 ; 2]$ ó $\langle -5 ; 2]$
c) $\{x/ -2 < x < 3\} =]-2 ; 3[$ ó $\langle -2 ; 3\rangle$	d) $\{x/ 7 \le x \le 10\} = [7 ; 10]$
e) $\{x/ -4 \le x\} = [-4 ; \infty]$ ó $[-4 ; \infty\rangle$	f) $\{x/ x > 5\} =]5 ; \infty]$ ó $\langle 5 ; \infty\rangle$

3 Utilizando un gráfico para cada ejercicio, halla:

a) $[2 ; 4] \cap [3 ; 7]$	c) $]-\infty ; 4[\cap]0 ; \infty[$	e) $]-\infty ; 3[\cup]1 ; \infty[$
b) $[1 ; 5] \cup [2 ; 8]$	d) $]-3 ; \sqrt{3}[\cap]\sqrt{3} ; 5[$	f) $]-2 ; 2] - [1 ; 4[$

Resolución:

a) Hallo: $[2 ; 4] \cap [3 ; 7]$



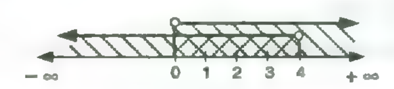
$\therefore$ $[2 ; 4] \cap [3 ; 7] = [3 ; 4]$

b) $[1 ; 5] \cup [2 ; 8]$



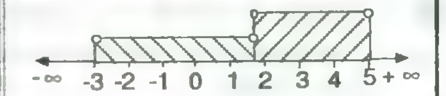
$\therefore$ $[1 ; 5] \cup [2 ; 8] = [1 ; 8]$

c) $]-\infty ; 4[\cap]0 ; \infty[$



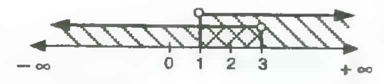
$\therefore$ $]-\infty ; 4[\cap]0 ; \infty[=]0 ; 4[$

d) $]-3 ; \sqrt{3}[\cap]\sqrt{3} ; 5[$



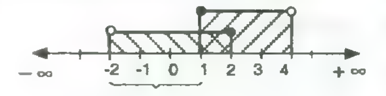
$\therefore$ $]-3 ; \sqrt{3}[\cap]\sqrt{3} ; 5[= \phi$

e) $]-\infty ; 3[\cup [1 ; \infty[$



$\therefore$ $]-\infty ; 3[\cup [1 ; \infty] =]-\infty ; \infty[$
$= \langle -\infty ; \infty\rangle$
$= \mathbb{R}$

f) $]-2 ; 2] - [1 ; 4[$



$\therefore$ $]-2 ; 2] - [1 ; 4[= [-2 ; 1[$
$= \langle -2 ; 1\rangle$


En cada caso determina el intervalo al que pertenece x.

a) $(x - 3) \in \langle -2 ; 4]$	c) $(x + 3) \in [-4 ; -3]$
b) $(x + 7) \in \langle -\infty ; 9\rangle$	d) $(x - 4) \in \langle -2 ; \infty\rangle$

Resolución:

a) Aplicando el significado de intervalo la expresión: $(x - 3) \in \langle -2 ; 4]$ se puede escribir así:

$\langle -2 ; 4] \Rightarrow \boxed{-2 < x - 3 \le 4}$; Sumamos 3; a cada miembro:

$$-2 + 3 < x - \cancel{3} + \cancel{3} \le 4 + 3$$

$$1 < x \le 7 \Rightarrow \boxed{x \in \langle 1 ; 7]}$$

b) $(x + 7) \in \langle -\infty ; 9\rangle$

$\langle -\infty ; 9\rangle \Rightarrow \boxed{-\infty < x + 7 < 9}$; restamos 7; a cada miembro:

$$-\infty - 7 < x + \cancel{7} - \cancel{7} < 9 - 7$$

$$-\infty < x < 2 \Rightarrow \boxed{x \in \langle -\infty ; 2\rangle}$$

c) $(x + 3) \in [-4 ; -3]$

$[-4 ; -3] \Rightarrow \boxed{-4 \le x + 3 \le -3}$; restamos 3; a cada miembro:

$$-4 - 3 \le x + \cancel{3} - \cancel{3} \le -3 - 3$$

$$-7 \le x \le -6 \Rightarrow \boxed{x \in [-7 ; -6]}$$

d) $(x - 4) \in \langle -2 ; \infty\rangle$

$\langle -2 ; \infty\rangle \Rightarrow \boxed{-2 < x - 4 < \infty}$; Sumamos 4; a cada miembro:

$$-2 + 4 < x - 4 + 4 < \infty + 4$$

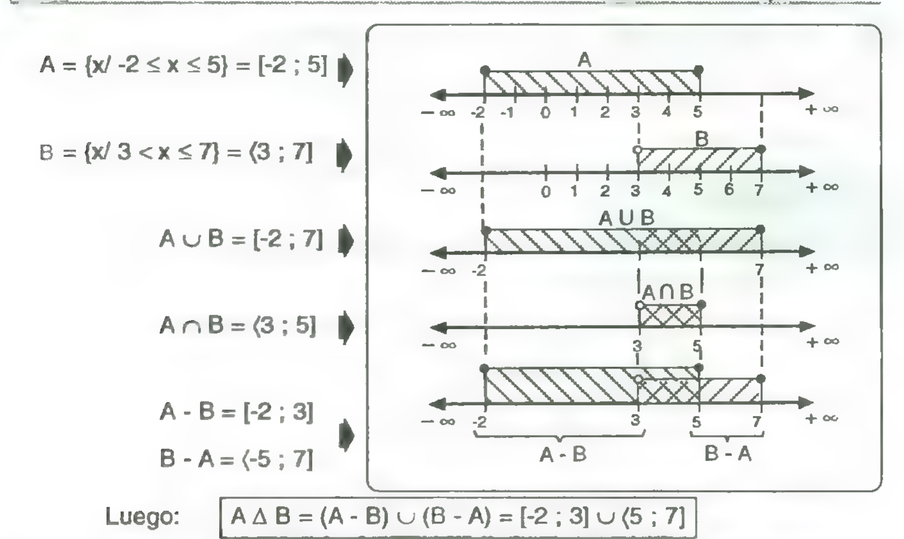
$$2 < x < \infty \Rightarrow \boxed{x \in \langle 2 ; \infty\rangle}$$


Dados los conjuntos: $A = \{x / -2 \le x \le 5\}$ y $B = \{x / 3 < x \le 7\}$

Hallar y representar gráficamente:

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $A - B$ d) $B - A$ e) $A \Delta B$

Resolución:



$A = \{x / -2 \leq x \leq 5\} = [-2 ; 5]$

$B = \{x / 3 < x \leq 7\} = \langle 3 ; 7]$

$A \cup B = [-2 ; 7]$

$A \cap B = \langle 3 ; 5]$

$A - B = [-2 ; 3]$

$B - A = \langle -5 ; 7]$

Luego: $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = [-2 ; 3] \cup \langle 5 ; 7]$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 11

1. Utilizando la notación de conjuntos expresa:

   a) El conjunto de los números reales comprendidos entre -2 y 6, incluyendo estos números.
   b) El conjunto de los números reales comprendidos entre -3 y 9.
   c) El conjunto de los números reales mayores que -5 ó iguales a -5.
   d) El conjunto de los números reales menores que 4 ó iguales a 4.
   e) El conjunto de los números reales menores que -2.
   f) El conjunto de los números reales no menores que -7 pero menores que 8.
   g) El conjunto de los números reales no mayores que 4; pero mayores que -2.

2. Expresa los conjuntos del ejercicio 1, en notación de intervalos y haz las gráficas correspondientes.

3. Expresa los conjuntos siguientes en notación de intervalos:

a) $\{x / -3 \leq x \leq 7\}$	e) $\{x / -4 \leq x < 6\}$	i) $\{x / 2 \leq x < 7\}$
b) $\{x / -2 \leq x < 4\}$	f) $\{x / 6 < x \leq 10\}$	j) $\{x / -5 < x \leq 4\}$
c) $\{x / x \leq -6\}$	g) $\{x / x < 8\}$	k) $\{x / x \geq -2\}$
d) $\{x / -6 < x < -1\}$	h) $\{x / x \geq -1\}$	l) $\{x / -6 \leq x < 1\}$

4. Expresa los intervalos siguientes en notación de conjuntos:

a) $[-4 ; 7]$	e) $[1/5 ; \sqrt{3}\rangle$	i) $]-\infty ; 1/3[$
b) $\langle -2 ; 8\rangle$	f) $]-\infty ; 0[$	j) $]-\infty ; \infty[$
c) $[-3 ; 6\rangle$	g) $]-3 ; \sqrt{2}[$	k) $]-10 ; 2]$
d) $\langle 5 ; 9]$	h) $[2 ; \infty\rangle$	l) $[-3 ; \infty[$

5. Utilizando un gráfico para cada ejercicio halla:

a) $[1 ; 4] \cap [2 ; 7]$	e) $\langle -\infty ; 3\rangle \cap \langle 1 ; \infty\rangle$	i) $[-5 ; 5] - [0 ; 8]$
b) $[1 ; 5] \cup [2 ; 8]$	f) $\langle -\infty ; 3\rangle \cup \langle 1 ; \infty\rangle$	j) $\langle -2 ; 3] - [1 ; 5]$
c) $]-1 ; 3[\cap]2 ; 5[$	g) $\langle -2 ; \sqrt{3}\rangle \cap \langle \sqrt{2} ; 9\rangle$	k) $[0 ; 6] - \langle 1 ; 1\rangle$
d) $\langle 1 ; 4\rangle \cup \langle 3 ; 6\rangle$	h) $\langle -4 ; \sqrt{3}] \cup \langle \sqrt{3} ; 8\rangle$	l) $[-1 ; 5\rangle - [-5 ; 1\rangle$

6. Dado los conjuntos: $A = \{x / -3 \leq x \leq 6\}$ y $B = \{x / 2 < x \leq 8\}$

Hallar y representar gráficamente:

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $A - B$ d) $B - A$

7. Dado los intervalos: $A = [-5 ; 6]$ y $B = \langle 0 ; 8]$

Halla y representa gráficamente:

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $A - B$ d) $B - A$

8. En cada caso determina el intervalo al que pertenece "x".

a) $(x - 1) \in \langle -2 ; 4]$	e) $(x + 1) \in [-3 ; 2]$	i) $(x - 3) \in \langle -\infty ; -4\rangle$
b) $(x + 4) \in [1 ; 6\rangle$	f) $(x - 6) \in \langle -5 ; -2]$	j) $(x + 4) \in \langle 6 ; \infty\rangle$
c) $(x - 2) \in \langle -3 ; 5\rangle$	g) $(x - 6) \in \langle -2 ; 7]$	k) $(x + 7) \in [-1 ; \infty\rangle$

9. Sabiendo que: $A = \langle -4 ; 4]$; $B = [0 ; 5\rangle$; $C = \langle -7 ; 2\rangle$ y $D = \langle 3 ; \infty\rangle$

Halla el intervalo que le corresponde a cada conjunto siguiente:

a) $A \cap B =$	e) $C - B =$
b) $C \cup B =$	f) $B - A =$
c) $B \cap D =$	g) $D \cap A =$
d) $A \cup C =$	h) $D \cap B =$

10. Determina los siguientes conjuntos:

a) $\langle -1 ; 3/5 \rangle \cap \langle 0 ; 5/2 \rangle$	d) $[1 ; 3] \cap [0 ; 4] \cap [-2 ; 5]$
b) $[-1 ; \infty\rangle \cap [-7/2 ; 3\rangle$	e) $\langle -\infty ; 3] \cap [0 ; \infty\rangle$
c) $[-2 ; 5/3] \cup [5/3 ; 4]$	f) $\langle -\infty ; 3\rangle - [-2 ; \infty\rangle$

RESPUESTAS TALLER

(5.)

a) $[2 ; 4]$	d) $\langle 1 ; 6\rangle$	g) $\langle \sqrt{2} ; \sqrt{3}\rangle$	j) $\langle -2 ; 1\rangle$
b) $[1 ; 8]$	e) $\langle 1 ; 3\rangle$	h) $\langle -4 ; 8\rangle$	k) $\langle -1 ; 0\rangle$
c) $\langle 2 ; 3\rangle$	f) $\langle -\infty ; \infty\rangle$	i) $[-5 ; 0\rangle$	l) $[1 ; 5\rangle$

(6.)

a) $A \cup B = [-3 ; 8]$

b) $A \cap B = \langle 2 ; 6]$

c) $A - B = [-3 ; 2]$

d) $B - A = \langle 6 ; 8]$

(8.)

a) $\langle 3 ; 5]$	d) $[-4 ; 1]$	g) $\langle -\infty ; -1\rangle$
b) $[-3 ; 2\rangle$	e) $\langle 1 ; 4]$	h) $\langle 2 ; \infty\rangle$
c) $\langle -1 ; 7\rangle$	f) $\langle 4 ; 13\rangle$	i) $\langle -8 ; \infty\rangle$

(7.)

a) $A \cup B = [-5 ; 8]$

b) $A \cap B = \langle 0 ; 6]$

c) $A - B = [-5 ; 0]$

d) $B - A = \langle 6 ; 8]$

(9.)

a) $A \cap B = [0 ; 4]$	e) $C - B = \langle -7 ; 0\rangle$
b) $C \cup B = \langle -7 ; 5\rangle$	f) $B - A = \langle 4 ; 5\rangle$
c) $B \cup D = [0 ; \infty\rangle$	g) $D \cap A = \langle 3 ; 4]$
d) $A \cup C = \langle -7 ; 4]$	h) $D \cap B = \langle 3 ; 5\rangle$

2.6.2. Valor Absoluto en $\mathbb{R}$. Propiedades. Distancia entre puntos de una Recta. Inecuaciones con Valor Absoluto.

2.6.2.1. Valor Absoluto.

Definición: El Valor Absoluto de un número real **a**, denotado por $|a|$, se define por la Regla:

$$|a| = \begin{cases} a; & \text{Si: } a > 0 \quad \text{.........} \ (1) \\ 0; & \text{Si: } a = 0 \quad \text{.........} \ (2) \\ -a; & \text{Si: } a < 0 \quad \text{.........} \ (3) \end{cases}$$

Ejemplos:

i) $|x| = x \Rightarrow |7| = 7$; pues cumple que: $x > 0$

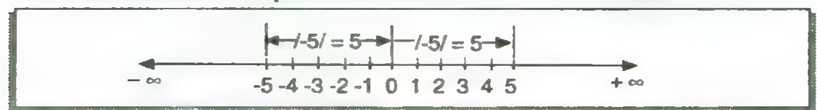
ii) $|x| = 0 \Rightarrow |0| = 0$; pues cumple que: $x = 0$

iii) $|x| = -x \Rightarrow |-3| = -(-3) \Rightarrow |-3| = 3$; pues cumple que: $x < 0$

- De la definición de valor Absoluto deducimos que el valor absoluto de cualquier número real es cero o positivo; pero nunca negativo.

- El valor absoluto de un número negativo es el número positivo correspondiente. Esto significa que para cada número real **a**, hay un número **-a**, cuyo valor absoluto representa su distancia al origen, el positivo a la derecha y el negativo a la izquierda.

  Geométricamente se representa como:



2.6.2.2. Propiedades del Valor Absoluto:

1. $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b$ ó $a = -b$

Ejemplo: $|x| = |3| \Leftrightarrow x = 3$ ó $x = -3$

2. $|a.b| = |a|.|b|$

Ejemplos:

a) $|3.6| = |3|.|6| = 3.6 = 18$
b) $|48| = |6|.|8| = 6.8 = 48$
c) $|-15| = |-3|.|5| = 3.5 = 15$
d) $|4x| = |4|.|x|$
e) $|-5(x + 2)| = |-5|.|x + 2| = 5|x + 2|$

3. $|a| = b \Rightarrow \begin{cases} b \geq 0 \ \wedge \\ a = b \ \vee \ a = -b \end{cases}$

Ejemplos: $|x + 2| = 3$

Donde: $x + 2 = 3 \ \vee \ x + 2 = -3$

$\boxed{x = 1}$ $\boxed{x = -5}$

4. Si:

$|a| < k$; $k > 0$ Entonces: $-k < a < k$

Ejemplo: $|x| < 6 \Rightarrow -6 < x < 6$

$\therefore$ C.S. = $\langle -6 ; 6 \rangle$

5. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$

Ejemplos:

a) $\left|\dfrac{x}{3}\right| = \dfrac{|x|}{|3|}$

b) $\left|\dfrac{x + 2}{-4}\right| = \dfrac{|x + 2|}{|-4|} = \dfrac{|x + 2|}{4}$

6. $|a|^2 = a^2$ y también $|a^2| = a^2$

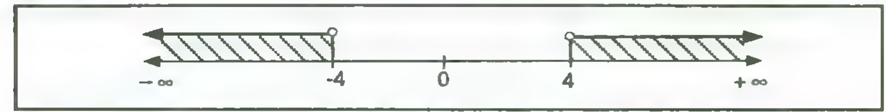
Ejemplo:

$|x^2| = 4$

$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \begin{cases} \boxed{x = 2} \\ \boxed{x = -2} \end{cases}$

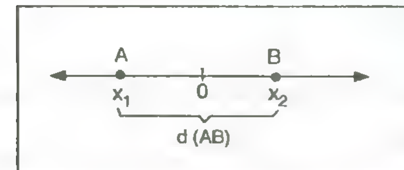
7. Si: $|a| > b$; $b > 0$; Entonces: $a > b \ \vee \ a < -b$

Ejemplo: $|x| > 4 \Rightarrow x > 4 \ \vee \ x < -4 \Rightarrow \therefore$ C.S. = $\langle -\infty ; -4 \rangle \cup \langle 4 ; \infty \rangle$



2.6.3. Distancia entre dos Puntos:

La distancia entre los puntos **A** y **B** de una recta se denota por d(AB), y que es igual al valor absoluto de la distancia dirigida de **A** a **B**.



Si: La coordenada de **A** es $\mathbf{x_1}$ y la coordenada de **B** es $\mathbf{x_2}$, entonces la distancia de **A** a **B** es:

$$\mathbf{d(AB) = |x_2 - x_1|}$$

Ejemplo: En una recta se tiene los puntos y sus coordenadas siguientes:

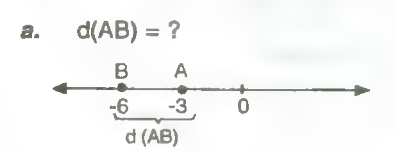
A(-3) ; B(-6) ; C(9) ; D(4)

Hallar la distancia:

a) d(AB) b) d(CA) c) d(BD) d) d(DA)

Resolución:

a. d(AB) = ?



Luego:

d(AB) = |(-6) - (-3)| = |-6 + 3| = |-3|

$\therefore$ **d(AB) = |-3| = 3**

b. d(CA) = ?

A C -3 0 9 d (CA)

Luego:

d(CA) = |(-3) - (9)| = |-12|

$\therefore$ **d(CA) = |-12| = 12**

c. d(BD) = ?

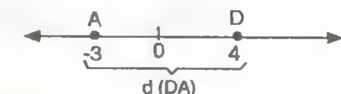
B D -6 0 4 d (BD)

Luego:

d(BD) = |(4) - (-6)| = |4 + 6| = |10|

$\therefore$ **d(AB) = 10**

d. d(DA) = ?



Luego:

d(DA) = |(-3) - (4)| = |-7| = 7

$\therefore$ **d(DA) = 7**

> *Nota:*
>
> *La distancia entre dos puntos siempre es un número real* ***positivo****. A la distancia entre estos dos puntos también se le denomina* ***distancia absoluta*** *o simplemente* ***distancia****.*

EJERCICIOS RESUELTOS

1. La coordenada de A es -6. ¿Cuál debe ser la coordenada del punto B, para que la distancia absoluta de A a B sea 16?

Resolución:



Sea: "x" la coordenada del punto B.

Luego: $d(AB) = |x - (-6)|$

$16 = |x + 6|$; resuelve la ecuación.

Recuerda que:

* **Propiedad de valor Absoluto**

$|a| = b \begin{cases} a = b \\ a = -b \end{cases}$

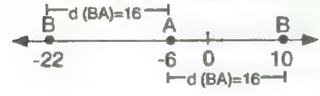
Por Propiedad:

i) $16 = (x + 6) \Rightarrow \boxed{x = 10}$

ii) $16 = -(x + 6) \Rightarrow 16 = -x - 6 \Rightarrow x = -6 - 16$

$\boxed{x = -22}$

* Los valores de "x" hallados nos da a entender que la coordenada del punto B puede estar hacia la derecha o hacia la izquierda, veamos la figura:



Rpta: El punto B, tiene como coordenada a 10, y también al número -22.

2. La distancia absoluta de C a N es 14. C y N son puntos de una misma recta y la coordenada de N es -5. Halla las coordenadas de C.

Resolución:

N
-5 0

Sea: "x" la coordenada del punto C.

Luego: $d(CN) = |(-5) - x|$

$14 = |-5 - x|$

* Los valores de "x" hallados nos da a entender que la coordenada del punto C puede estar hacia la derecha o hacia la izquierda, veamos la figura:



Por Propiedad:

i) $14 = (-5 - x) \Rightarrow \therefore \boxed{x = -19}$

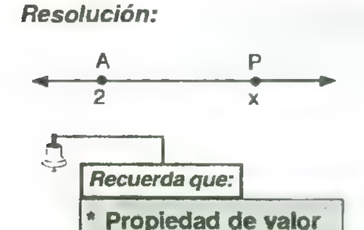
ii) $14 = -(-5 - x) \Rightarrow 14 = 5 + x$

$\therefore \boxed{x = 9}$

Rpta: El punto C, tiene como coordenada a -19 y también al número 9.

3. La coordenada de A es 2 y la coordenada de P es x. Halla todos los valores que puede tomar "x" para que la distancia de A a P. Sea menor que 7.

Resolución:



Por Dato: $d(AP) < 7$



$|x - 2| < 7$

Por Propiedad:

$|x - 2| < 7 \Rightarrow -7 < x - 2 < 7$

* Sumamos 2 a ambos miembros:

$-7 + \mathbf{2} < x - 2 + \mathbf{2} < 7 + \mathbf{2}$

$\therefore \boxed{-5 < x < 9}$

Rpta: Los valores que puede tomar "x" para que la distancia de A a P sea menor que 7, son cualquier elemento del intervalo $\langle -5, 9 \rangle$

4. S es el intervalo al que pertenece "x" tal que: d(AB) < 10,6 en la que A(-8, 4) y B(x); entonces: $S \cap [-8\ ;\ 12{,}3\rangle$

Resolución:



Por Dato: $d(AB) < 10{,}6$

$|x - (-8{,}4)| < 10{,}6$

$|x + 8{,}4| < 10{,}6$

Por Propiedad de Valor Absoluto:

$|x + 8{,}4| < 10{,}6 \Rightarrow -10{,}6 < x + 8{,}4 < 10{,}6$

Restamos 8,4 a ambos miembros:

$-10{,}6 - \mathbf{8{,}4} < x + 8{,}4 - \mathbf{8{,}4} < 10{,}6 - \mathbf{8{,}4}$

$-19 < x < 2{,}2 \Rightarrow \boxed{S = \langle -19\ ;\ 2{,}2\rangle}$

Luego; calculamos: $S \cap [-8\ ;\ 12{,}3\rangle = \langle -19\ ;\ 2{,}2\rangle \cap [-8\ ;\ 12{,}3\rangle$

-19 -8 0 2,2 12,3

Rpta: $S \cap [-8\ ;\ 12{,}3\rangle = \langle -19\ ;\ 2{,}2\rangle \cap [-8\ ;\ 12{,}3\rangle = [-8\ ;\ 2{,}2\rangle$

5. S es el intervalo al que pertenece x; tal que d(AB) ≤ 13 en la que A(-7) y B(x); por tanto [-25 ; 2⟩ - S; es:

Resolución:



Por Dato: $d(AB) \leq 13$

$$|x - (-7)| \leq 13$$

$$|x + 7| \leq 13$$

Por Propiedad de Valor Absoluto:

$|x + 7| \leq 13 \Rightarrow -13 \leq x + 7 \leq 13$ **; restamos 7 a ambos miembros**

$$-13 - 7 \leq x + 7 - 7 \leq 13 - 7$$

$$-20 \leq x \leq 6 \Rightarrow \boxed{S = [-20 ; 6]}$$

Luego; calculamos: [-25 ; 2⟩ - S = [-25 ; 2⟩ - [-20 ; 6⟩



Rpta: [-25 ; 2⟩ - S = [-25 ; 2⟩ - [-20 ; 6] = [-25 ; -20 ⟩



TALLER DE EJERCICIOS Nº 12



1. Todos los puntos y sus respectivas coordenadas que a continuación se indican pertenecen a una misma recta: A(-6) ; B(-2) ; C(3,4) ; D(5,2) ; E(-3,5) ; F(-4)

Halla las siguientes distancias absolutas:

a) d(AC) =	d) d(CA) =	g) d(EF) =	j) d(AF) =
b) d(BD) =	e) d(BE) =	h) d(FB) =	k) d(CD) =
c) d(EC) =	f) d(BC) =	i) d(DE) =	l) d(FD) =

2. Halla las coordenadas de P para que se cumpla la distancia absoluta entre los dos puntos dados.

a) d(PQ) = 15 ; Q(4)	e) d(PK) = 16,8 ; k(-10,2)
b) d(RP) = 9; R(-2)	f) d(MP) = 8,3 ; M(-4,5)
c) d(NP) = 8 ; N(6)	g) d(PA) = 23 ; A(-4)
d) d(PA) = 12 ; A(3)	h) d(BP) = 18,2 ; B(-2,8)

3. En cada uno de los siguientes ejercicios; "x" es la coordenada de A, halla el intervalo al que pertenece "x" para que la distancia de A al punto dado sea menor que el número real establecido:

a) d(CA) < 10 ; C(4)	e) d(QA) < 26 ; Q(-9)
b) d(AE) < 8 ; E(-3)	f) d(AN) ≤ 9,4 ; N(-3,1)
c) d(MA) < 13 ; M(8,4)	g) d(TA) < 18,3 ; T(-6,4)
d) d(AP) ≤ 20 ; P(-6)	h) d(AR) ≤ 30 ; R(-12)

4. La coordenada de A es -11. ¿Cuál debe ser la coordenada del punto B, para que la distancia absoluta de A a B sea 18?

a) -29 ; ó 7 b) -23; ó 7 c) -7; ó 7 d) -23; ó 13 e) N.A.

5. La coordenada de A es el número positivo (x -3); y la coordenada de B es el número negativo (5 + x). Si d(AB) = 18; siendo E(12), entonces d(AE) es:

a) 6 ó 22 b) 8 ó 16 c) 4 ó 22 d) 9 ó 23 e) 16 ó 22

6. S es el intervalo al que pertenece x ; tal que d(AB) < 15,4 en la que A(-5,6) y B (x); por tanto: [-24 ; 7] ∩ S es:

a) [-21 ; 7⟩ b) ⟨-21 ; 7] c) ⟨-21 ; 9,8⟩ d) [7 ; 9,8⟩ e) N.A.

7. S es el intervalo al que pertenece x; tal que d(AB) ≤ 20 en la que A(-9) y B(x); entonces: S - [4; 13⟩ es:

a) ⟨-29 ; 4] b) ⟨11 ; 13⟩ c) ⟨-29 ; 11⟩ d) [-29 ; 4] e) N.A.

8. S es el intervalo al que pertenece x; tal que d(AB) < 13 en la que: A(-10) y B(x); entonces: ⟨-8 ; 6] ∪ S es:

a) [-23; 6⟩ b) ⟨-23 ; 6] c) ⟨-23 ; 3⟩ d) ⟨-20 ; 8] e) N.A.

RESPUESTAS TALLER

(1)	a) d(AC) = 9,4	d) d(CA) = 9,4	g) d(EF) = 0,5	j) d(AF) = 2
	b) d(BD) = 7,2	e) d(BE) = 1,5	h) d(FB) = 2	k) d(CD) = 1,8
	c) d(EC) = 6,9	f) d(BC) = 5,4	i) d(DE) = 8,7	l) d(FD) = 9,2

(2)	a) -11 ó 19	c) -2 ó 14	e) -27 ó 6,6	g) -27 ó 19
	b) -11 y 7	d) -9,4 ó 15,4	f) -12,8 ó 3,8	h) -21 ó 15,4

(3.)	a) $\langle -35 ; 17 \rangle$	c) $\langle -4,6 ; 21,4 \rangle$	e) $\langle -35 ; 17 \rangle$	g) $\langle -24,7 ; 11,9 \rangle$
	b) $\langle -11 ; 5 \rangle$	d) $[-26 ; 14]$	f) $[-6,3 ; 12,5]$	h) $[-42 ; 18]$

(4.) a (5.) c (6.) b (7.) d (8.) b

2.6.4. Ecuaciones con Valor Absoluto:

Ejercicios Resueltos aplicando las propiedades de Valor Absoluto



Resolver la ecuación: $|x - 4| = 3$

Resolución:

Aplicando la propiedad: $|a| = b \Rightarrow \begin{cases} b \geq 0 \wedge \\ a = b \vee a = -b \end{cases}$

Obtenemos:

i)	∨	ii)
$x - 4 = 3$		$x - 4 = -3$
$x = 3 + 4$		$x = -3 + 4$
$\therefore x = 7$		$\therefore x = 1$

Luego: Las raices de la ecuación son: 7 y 1 ó C.S. = {1 ; 7}

Comprobación:

$|x - 4| = 3$; cuando: $x = 7 \Rightarrow |7 - 4| = 3 \Rightarrow |3| = 3$

$|x - 4| = 3$; cuando: $x = 1 \Rightarrow |1 - 4| = 3 \Rightarrow |-3| = 3$



Resolver la ecuación: $|5(x - 6)| = 30$

Resolución:

Aplicando la propiedad: $|a.b| = |a|.|b|$

Obtenemos:

$$|5(x - 6)| = 30 \Rightarrow |5|.|x - 6| = 30 \Rightarrow 5.|x - 6| = 30 \Rightarrow |x - 6| = \frac{30}{5} = 6$$

Donde:

i)	∨	ii)
$x - 6 = 6$		$x - 6 = -6$
$x = 6 + 6$		$x = -6 + 6$
$\therefore x = 12$		$\therefore x = 0$

Luego: Las raices de la ecuación son: 0 y 12 ó C.S. = {0 ; 12}

3 Resolver la ecuación: $|3x + 1| = |x + 7|$

Resolución:

Aplicando la propiedad: $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b$ ó $a = -b$

Obtenemos:

$|3x + 1| = |x + 7| \Leftrightarrow 3x + 1 = x + 7$ ó $3x + 1 = -(x + 7)$

$3x - x = 7 - 1$ $\quad$ $3x + 1 = -x - 7$

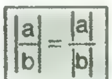
$2x = 6$ $\quad$ $3x + x = -7 - 1$

$\therefore \boxed{x = 3}$ $\quad$ $4x = -8 \Rightarrow \therefore \boxed{x = -2}$

Luego: Las raices de la ecuación son: -2 y 3 ó C.S. = {-2 ; 3}

4 Resolver la ecuación: $\left|\dfrac{2x + 5}{-3}\right| = 3$

Resolución:

Aplicando la propiedad: 

$\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$

Obtenemos: $\dfrac{|2x + 5|}{|-3|} = 3 \Rightarrow \dfrac{|2x + 5|}{3} = 3 \Rightarrow |2x + 5| = 9$

Donde:

i) $2x + 5 = 9$ $\quad \vee \quad$ ii) $2x + 5 = -9$

$2x = 9 - 5$ $\quad$ $2x = -9 - 5$

$2x = 4$ $\quad$ $2x = -14$

$\therefore \boxed{x = 2}$ $\quad$ $\therefore \boxed{x = -7}$

Luego: Las raices de la ecuación son: -7 y 2 ó C.S. = {-7 ; 2}

5 Si: $|2x - 6| = 10$; calcular: $|x - 3|$

Resolución: De la ecuación: $|2x - 6| = 10$

Obtenemos:

i) $2x - 6 = 10$ $\quad \vee \quad$ ii) $2x - 6 = -10$

$2x = 10 + 6$ $\quad$ $2x = -10 + 6$

$2x = 16$ $\quad$ $2x = -4$

$\therefore \boxed{x = 8}$ $\quad$ $\therefore \boxed{x = -2}$

Luego, reemplazamos los valores de "x" hallados en la expresión: $|x - 3|$.

Para: $\boxed{x = 8}$ $\Rightarrow$ $|x - 3| = |8 - 3| = |5| = 5$

Para: $\boxed{x = -2}$ $\Rightarrow$ $|x - 3| = |-2 - 3| = |-5| = 5$

$\therefore$ $\boxed{|x - 3| = 5}$ ***Rpta.***



Si: $|9 - x| = 6$; calcular: $|x - 9|$

Resolución: De la ecuación: $|9 - x| = 6$

Obtenemos:

i)	$9 - x = 6$	$\vee$	ii)	$9 - x = -6$
	$9 - 6 = x$			$9 + 6 = x$
	$\therefore \boxed{3 = x}$			$\therefore \boxed{15 = x}$

Luego, reemplazamos los valores de "x" hallados en la expresión: $|x - 9|$.

Para: $\boxed{x = 3}$ $\Rightarrow$ $|x - 9| = |3 - 9| = |-6| = 6$

Para: $\boxed{x = 15}$ $\Rightarrow$ $|x - 9| = |15 - 9| = |6| = 6$

$\therefore$ $\boxed{|x - 9| = 6}$ ***Rpta.***



Si: $\left|\frac{x-3}{-6}\right| = 2$; calcular: $|x + 3|$

Resolución: De la ecuación: $\left|\frac{x-3}{-6}\right| = 2$

Obtenemos: $\frac{|x-3|}{|-6|} = 2 \Rightarrow \frac{|x-3|}{6} = 2 \Rightarrow |x-3| = 12$

Donde:

i)	$x - 3 = 12$	$\vee$	ii)	$x - 3 = -12$
	$x = 12 + 3$			$x = -12 + 3$
	$\therefore \boxed{x = 15}$			$\therefore \boxed{x = -9}$

Luego, reemplazamos los valores de "x" hallados en la expresión: $|x - 3|$.

Para: $\boxed{x = -9}$ $\Rightarrow$ $|x + 3| = |-9 + 3| = |-6| = 6$

Para: $\boxed{x = 15}$ $\Rightarrow$ $|x + 3| = |15 + 3| = |18| = 18$

$\therefore$ $\boxed{|x - 3| = 6 \quad |x - 3| = 18}$ ***Rpta.***



Hallar el conjunto solución de la ecuación: $|2x - 7| = x - 5$

Resolución:

$|2x - 7| = x - 5$; *Entonces:*

- $x - 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5$ ***(Base)***

$\wedge$

i) $2x - 7 = x - 5$ $\vee$ ii) $2x - 7 = -(x - 5)$

$2x - x = -5 + 7$ | $2x - 7 = -x + 5$

$\therefore \boxed{x = 2}$ | $2x + x = 5 + 7$

$\therefore \boxed{x = 4}$

> ***Nota:***
>
> *La **Base**:* $x - 5 \geq 0$*, es decir:* $x \geq 5$*, nos indica que sus raices de la ecuación debe ser mayores o iguales a 5. Si al resolver la ecuación algún número obtenido no cumple con la **Base**, esto indica que no es raiz de la ecuación.*

En la ecuación: $|2x - 7| = x - 5$; las raices obtenidas son: $x = 2$ y $x = 4$ las cuales no cumplen con la **Base**: $x \geq 5$; por lo tanto el conjunto solución de la ecuación será el conjunto vacio, es decir: $\boxed{C.S. = \phi}$ ***Rpta.***



Hallar el conjunto solución de la ecuación: $|2x - 6| = x + 9$

Resolución:

$|2x - 6| = x + 9$; *Entonces:*

- $x + 9 \geq 0 \Rightarrow x \geq -9$ ***(Base)***

$\wedge$

i) $2x - 6 = x + 9$ $\therefore \boxed{x = 15}$ $\vee$ ii) $2x - 6 = -(x + 9)$

$2x - 6 = -x - 9$

$3x = -3$

$\therefore \boxed{x = -1}$

- Como se observará las raices halladas osea: $x = 15$ y $x = -1$ cumplen con la **Base**: $x \geq -9$; por lo tanto el conjunto solución de la ecuación sería:

$$\boxed{C.S. = \{-1 ; 15\}} \ \textit{Rpta.}$$



Hallar el conjunto solución de la ecuación: $|3x - 2| - 18 = x$

Resolución:

La ecuación dada se puede escribir Así: $|3x - 2| = x + 18$

$|3x - 2| = x + 18$; *Entonces:*

- $x + 18 \geq 0 \Rightarrow x \geq -18$ ***(Base)***

$\wedge$

i) $3x - 2 = x + 18$ $\vee$ ii) $3x - 2 = -(x + 18)$

$3x - x = 18 + 2$ $\qquad$ $3x - 2 = -x - 18)$

$2x = 20$ $\qquad$ $4x = -16$

$\therefore \boxed{x = 10}$ $\qquad$ $\therefore \boxed{x = -4}$

- Como se observará las raices halladas osea: $x = 10$ y $x = -4$ cumplen con la **Base**: $x \geq -18$; por lo tanto el conjunto solución de la ecuación será:

$$\boxed{C.S. = \{-4 ; 10\}} \ \textit{Rpta.}$$

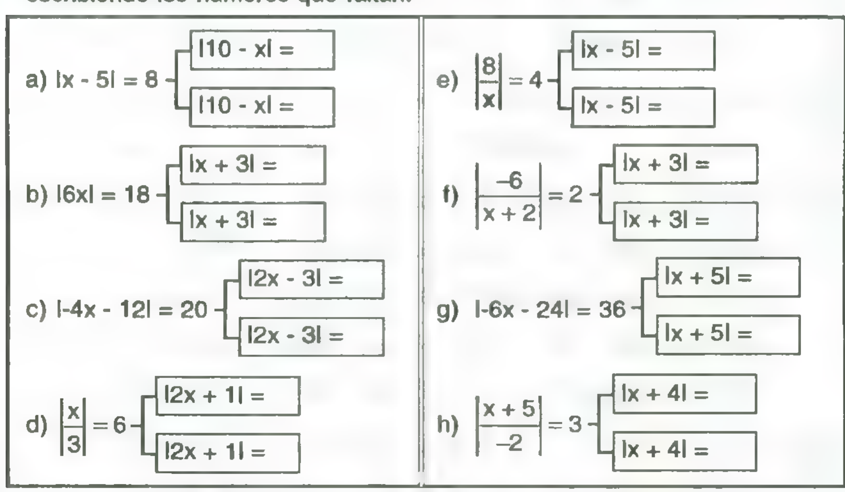


TALLER DE EJERCICIOS Nº 13

1. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\lvert x - 4 \rvert = 9$	f) $\lvert x - 5 \rvert - 6 = 0$	k) $\left\lvert \dfrac{x+6}{4} \right\rvert = 7$
b) $\lvert x + 3 \rvert = 6$	g) $\lvert 3(x + 2) \rvert = 12$	l) $\left\lvert \dfrac{x-6}{11} \right\rvert = 2$
c) $\lvert x + 16 \rvert = 7$	h) $\lvert 2(x + 6) \rvert - 16 = 0$	m) $\left\lvert \dfrac{x-26}{12} \right\rvert - 1 = 0$
d) $\lvert x - 20 \rvert = 5$	i) $5\lvert x - 4 \rvert - 10 = 0$	n) $\lvert 2x + 3 \rvert = \lvert x + 8 \rvert$
e) $\lvert x + 7 \rvert - 12 = 0$	j) $\lvert -(x + 9) \rvert = 17$	ñ) $\lvert 5x - 4 \rvert = \lvert 3x + 8 \rvert$

2. Analiza las propiedades de valor absoluto; luego completa las igualdades escribiendo los números que faltan:



3. Halla el conjunto solución (C.S.) de cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $\lvert 4x - 2 \rvert = x + 13$	f) $\lvert x - 6 \rvert = 4$	k) $\lvert 3x + 4 \rvert = 6 + x$
b) $\lvert 5x - 1 \rvert = 3x + 7$	g) $\lvert 2x - 3 \rvert = 15$	l) $\lvert 6x + 1 \rvert = 5 - 4x$
c) $\lvert x - 8 \rvert = 4x + 2$	h) $\lvert 7x + 4 \rvert = 18$	m) $\lvert 6 - 2x \rvert + 3 = x$
d) $\lvert 2x + 5 \rvert - x = 3$	i) $\lvert 5 - 3x \rvert = 11$	n) $\lvert 4x + 3 \rvert + 5 = 6x$
e) $\lvert 4x - 3 \rvert - 2x = 25$	j) $\lvert 9 - 4x \rvert = 1$	ñ) $\lvert 5 - 3x \rvert - 2 = 2x$

4. Hallar el conjunto solución (C.S.) de cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $\|x + 3\| = \|6 - 2x\|$	d) $\|6 - 4x\| = \|2 - 2x\|$	g) $\|3x - 1\| = \|x + 5\|$
b) $\|4x - 5\| = \|x + 4\|$	e) $\|8x - 3\| = \|3x - 2\|$	h) $\left\|\frac{x}{2} + 4\right\| = \|x + 2\|$
c) $\|2x + 3\| = \|12 - x\|$	f) $\left\|\frac{3x - 5}{2}\right\| = \|x - 1\|$	i) $\left\|\frac{4x - 3}{5}\right\| = \|x - 6\|$

RESPUESTAS TALLER

(1.)	a) C.S. = {-5 ; 13}	f) C.S. = {-1 ; 11}	k) C.S. = {-34 ; 22}
	b) C.S. = {-9 ; 3}	g) C.S. = {-6 ; 2}	l) C.S. = {-16 ; 28}
	c) C.S. = {-23 ; -9}	h) C.S. = {-14 ; 2}	m) C.S. = {14 ; 38}
	d) C.S. = {-15 ; 25}	i) C.S. = {2 ; 6}	n) C.S. = {-11/3 ; 5}
	e) C.S. = {-19 ; 5}	j) C.S. = {-26 ; 8}	ñ) C.S. = {-1/2 ; 6}

(2.)	a) 3 y 13	c) 1 y 19	e) 3 y 7	g) 5 y 7
	b) 0 y 6	d) 35 y 37	f) 2 y 4	h) 5 y 7

(3.)	a) C.S. = {-11/5 ; 5}	f) C.S. = {2 ; 10}	k) C.S. = {-5/2 ; 1}
	b) C.S. = {-3/4 ; 4}	g) C.S. = {-6 ; 9}	l) C.S. = {-3 ; 2/5}
	c) C.S. = {-10/3 ; 6/5}	h) C.S. = {-22/7 ; 2}	m) C.S. = {3}
	d) C.S. = {-8/3 ; -2}	i) C.S. = {-2 ; 16/3}	n) C.S. = {1/5 ; 4}
	e) C.S. = {-11/3 ; 14}	j) C.S. = {2 ; 5/2}	ñ) C.S. = {3/5 ; 7}

(4.)	a) C.S. = {-9 ; 1}	d) C.S. = {4/3 ; 4}	g) C.S. = {-1 ; 3}
	b) C.S. = {-1/5 ; 3}	e) C.S. = {-1/5 ; 5/11}	h) C.S. = {-4 ; 4}
	c) C.S. = {-15 ; 3}	f) C.S. = {7/5 ; 3}	i) C.S. = {11/3 ; 27}

2.6.5. Inecuaciones con Valor Absoluto:

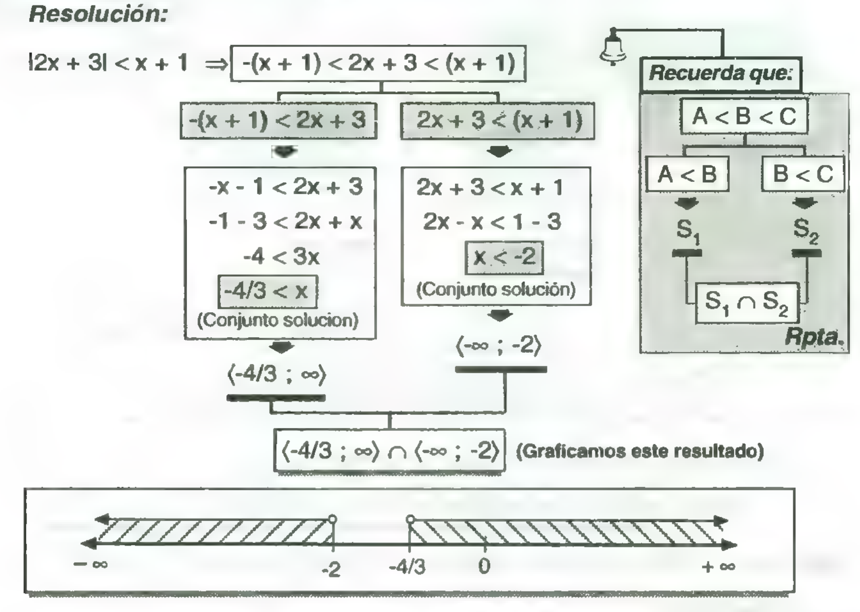
Para resolver inecuaciones con valor absoluto, consideraremos dos casos:

1º Caso: Cuando una inecuación pertenece a la forma: **$|a| < b$**; para resolverla aplicamos la propiedad.

$|a| < K \Rightarrow -K < a < K$ (para que se cumpla esta propiedad "K" debe ser mayor o igual a cero)

Ejemplo 1: Halla el conjunto solución de la inecuación: $|2x + 3| < x + 1$

Resolución:



* Como se observará la figura no hay intersección entre los conjuntos solución; pues esto quiere decir que el conjunto solución de la inecuación es el conjunto vacio ϕ.

Rpta: El conjunto solución de la inecuación es: C.S = ϕ (Conjunto vacio)

Ejemplo 2: Halla el conjunto solución de la inecuación: $|x + 4| + 3 \leq 2x$

Resolución:

- En primer lugar transponemos términos para darle a la inecuación la forma:

$$|a| \leq k \Rightarrow |x + 4| \leq 2x - 3$$

- En segundo lugar; aplico la propiedad:

$$|a| < K \Rightarrow -K < a < K$$

Luego:

$|x + 4| \leq 2x - 3 \Rightarrow$ $-(2x - 3) \leq x + 4 \leq (2x - 3)$

$-(2x - 3) \leq x + 4$	$x + 4 \leq 2x - 3$
$-(2x - 3) \leq x + 4$	$x + 4 \leq 2x - 3$
$3 - 4 \leq x + 2x$	$4 + 3 \leq 2x - x$
$-1 \leq 3x$	$7 \leq x$
$-1/3 \leq x$	$x \geq 7$ (Conjunto solución)
$x \geq -1/3$ (Conjunto solución)	
$[-1/3 ; \infty\rangle$	$\langle -\infty ; 7]$

$\langle -\infty ; 7] \cap [-1/3 ; \infty\rangle$ **(Graficamos este resultado)**

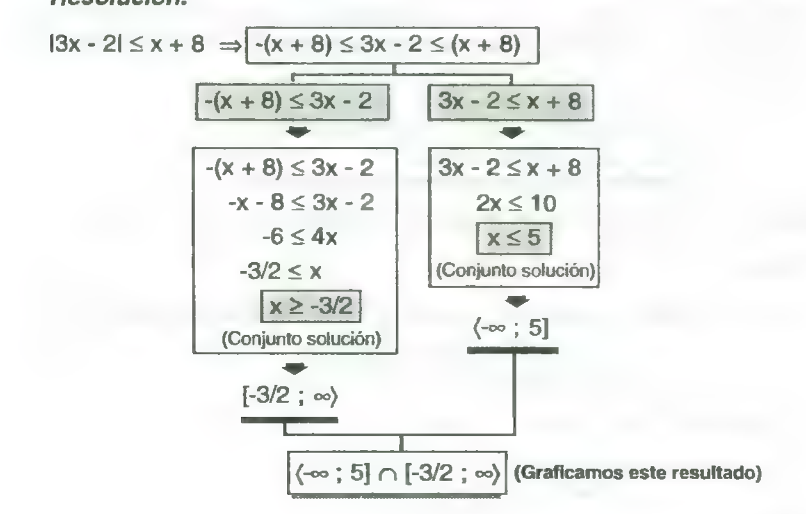
$-\infty$ $-1/3$ 0 7 $+\infty$

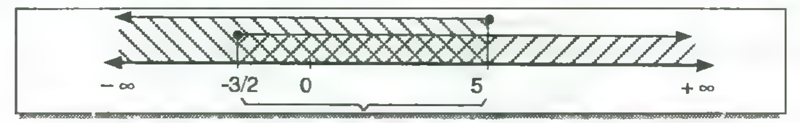
> ***Recuerda que:***
>
> Cuando la inecuación tiene signo < ó ≤ hay **intersección de soluciones.**

Rpta: El conjunto solución de la inecuación es: $C.S = [-1/3 ; 7]$

Ejemplo 3: Halla el conjunto solución de la inecuación: $|3x - 2| \leq x + 8$

Resolución:





Rpta: El conjunto solución de la inecuación es: $[-3/2; 5]$

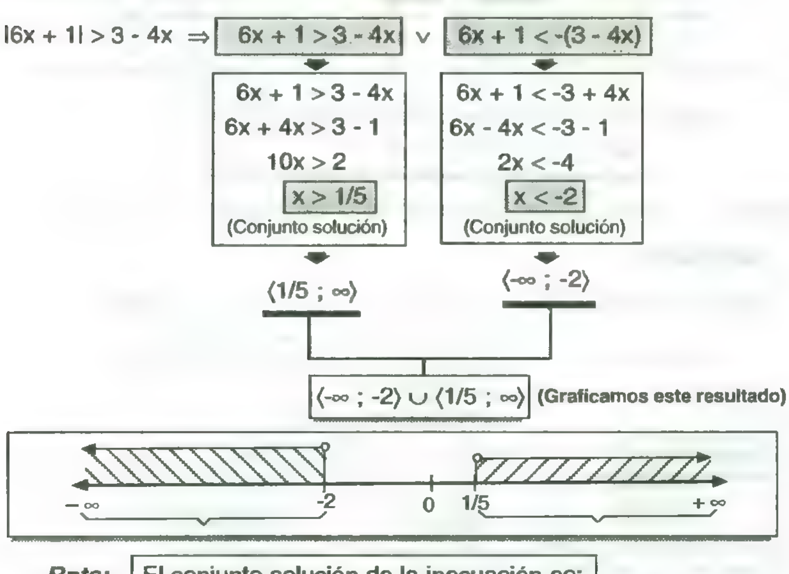
2º Caso: Cuando una inecuación pertenece a la forma: $|a| > b$; para resolverla aplicamos la propiedad.

$$|a| > b \Rightarrow a > b \lor a < -b$$ ***(Propiedad)***

Ejemplo 1: Halla el conjunto solución de la inecuación: $|6x + 1| > 3 - 4x$

Resolución:

Aplicando la propiedad: $|a| > b \Rightarrow \boxed{a > b} \lor \boxed{a < -b}$; se obtiene:

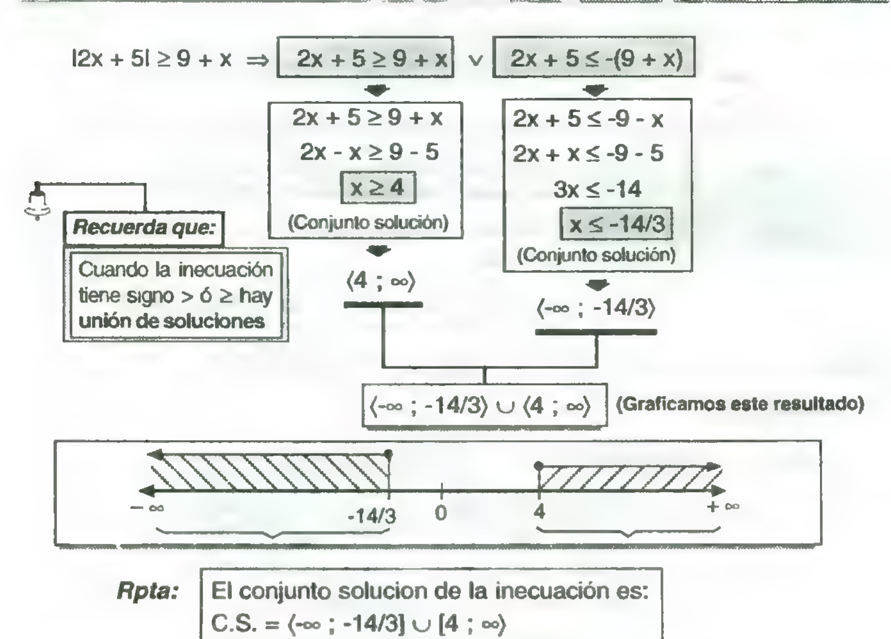


Rpta: El conjunto solución de la inecuación es: $C.S. = \langle -\infty ; -2 \rangle \cup \langle 1/5 ; \infty \rangle$

Ejemplo 2: Halla el conjunto solución de la inecuación: $|2x + 5| \geq 9 + x$

Resolución:

Aplicando la propiedad: $|a| > b \Rightarrow \boxed{a > b} \lor \boxed{a < -b}$; se obtiene:

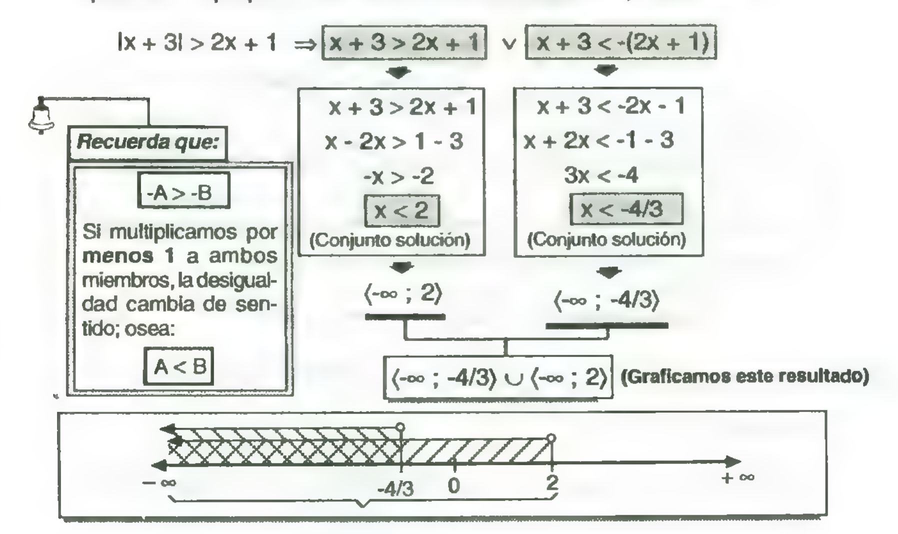


Rpta: El conjunto solucion de la inecuación es: C.S. = ⟨-∞ ; -14/3] ∪ [4 ; ∞⟩

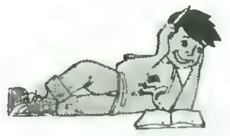
Ejemplo 3: Halla el conjunto solución de la inecuación: $|x + 3| > 2x + 1$

Resolución:

Aplicando la propiedad: $|a| > b \Rightarrow a > b \lor a < -b$; se obtiene:



Rpta: El conjunto solución de la inecuación es: C.S. = $\langle -\infty ; 2\rangle$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 14

- Halla el conjunto solución de cada inecuación siguiente. Escribir la respuesta utilizando intervalos.

a) $\lvert 3x - 1\rvert < x + 3$	e) $\lvert 2x + 5\rvert > -x + 2$	i) $\lvert 7x + 10\rvert - 28 \geq -2x$
b) $\lvert 4x + 3\rvert \leq x + 6$	f) $\lvert 6x + 4\rvert \geq 18 - x$	j) $\lvert 3x + 8\rvert + 2x > 18$
c) $\lvert 2x - 7\rvert < 8 - x$	g) $\lvert 4x + 1\rvert > 13 - 2x$	k) $\lvert 13 - x\rvert + 3x \leq 5$
d) $\lvert 5x + 9\rvert \leq 27 - x$	h) $\lvert 3x + 5\rvert + x \leq 1$	l) $\lvert 16 - 3x\rvert + 14 < 2x$

RESPUESTAS TALLER

a) C.S. = $\langle -1/2 ; 2\rangle$	e) C.S.= $\langle -\infty;-7\rangle \cup \langle -1;\infty\rangle$	k) C.S.= $\langle -\infty;-38/5\rangle \cup [2;\infty\rangle$
b) C.S.= $[-9/5;1]$	g) C.S.= $\langle -\infty;22/5] \cup [2;\infty\rangle$	l) C.S.= $\langle -\infty;-26\rangle \cup \langle 2;\infty\rangle$
c) C.S.= $\langle -1;5\rangle$	h) C.S.= $\langle -\infty;-7\rangle \cup \langle 2;\infty\rangle$	m) C.S.= $\langle -\infty;4]$
d) C.S.= $[-9;3]$	i) C.S.= $[-3;-1]$	n) C.S.= ϕ

2.6.6. Ecuaciones e Inecuaciones Cuadráticas en $\mathbb{R}$.

Definición: Una ecuación se llama de **Segundo Grado** o **Cuadrática** cuando después de quitar denominadores, reducir términos semejantes y pasar todos sus términos al primer miembro, adopta la forma típica:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde:

a: Es el coeficiente de x^2 ($a \in \mathbb{R}$). Es preciso que **a ≠ 0**; pues de otro modo la ecuación no seria de segundo grado siempre puede suponerse a positivo, pues si fuera negativo bastaría multiplicar por (-1) los dos miembros de la ecuación para que fuera positivo.

b: Coeficiente de x ($b \in \mathbb{R}$)

***c*:** Término independiente ($c \in \mathbb{R}$).

Los coeficientes **b** y **c** pueden ser nulos. Entonces la ecuación de segundo grado toma las formas siguientes:

i) Si: $c = 0 \Rightarrow$ $\boxed{ax^2 + bx = 0}$

ii) Si: $b = 0 \Rightarrow$ $\boxed{ax^2 + c = 0}$

iii) Si: $c = b = 0 \Rightarrow$ $\boxed{ax^2 = 0}$

*Estas tres ecuaciones se llaman **incompletas***

* Resolver una ecuación de segundo grado es hallar los valores de la incógnita **x** que hacen cierta la igualdad: $ax^2 + bx + c = 0$; convirtiéndola en una **identidad.**

Estos valores que toma **x** son las raices o soluciones de dicha ecuación.

Denominación de los términos de esta ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- ax^2: ***Término Cuadrático***
- bx: ***Término Lineal***
- c: ***Término Independiente***

2.6.6.1. Resolución de una Ecuación General de Segundo Grado con una Incógnita.

En forma general una ecuación de segundo grado con una incógnita o una ecuación de grado superior a dos, se resuelve:

A) Por medio de la factorización.
B) Empleando la Fórmula General.
C) Por completación de cuadrados.

(A.) Resolución de Ecuaciones Cuadráticas por Factorización:

Una ecuación de segundo grado se resuelve en forma sencilla por medio de la factorización, cuando la factorización del polinomio puede efectuarse.

1). Se transladan todos los términos a un sólo miembro, dejando el otro miembro igual a cero.
2). Se factoriza el primer miembro.
3). Para obtener las soluciones se iguala cada factor a cero.

Ejemplo 1: Resolver: $5x^2 + 4x = 6 - 3x$

Resolución:

Pasando todo al primer miembro:

$$5x^2 + 4x - 6 + 3x = 0 \Rightarrow 5x^2 + \boxed{7x} - 6 = 0$$

Factorizando **(Método del Aspa)**

$5x$	-3	$\Rightarrow$	$-3x$
x	$+2$	$\Rightarrow$	$+10x$
			$+\boxed{7x}$ **(cumple)**

Luego: $5x^2 + 7x - 6 = (5x - 3)(x + 2) = 0$

Igualamos cada factor a cero; veamos:

i) $(5x - 3) = 0 \Rightarrow 5x = 3 \Rightarrow \boxed{x_1 = 3/5}$

ii) $(x + 2) = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow \boxed{x_2 = -2}$

Comprobación:

Para: $\boxed{x = 3/5} \Rightarrow 5x^2 + 7x - 6 = 0 \Rightarrow 5\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 7\left(\frac{3}{5}\right) - 6 = 0$

$$5\left(\frac{9}{25}\right) + \frac{21}{5} - 6 = 0$$

$$\frac{9}{5} + \frac{21}{5} - 6 = 0$$

$$\frac{30}{5} - 6 = 0 \quad \textbf{(cumple)}$$

Para: $\boxed{x = -2} \Rightarrow 5x^2 + 7x - 6 = 0 \Rightarrow 5(-2)^2 + 7(-2) - 6 = 0$

$$5(4) + (-14) - 6 = 0$$

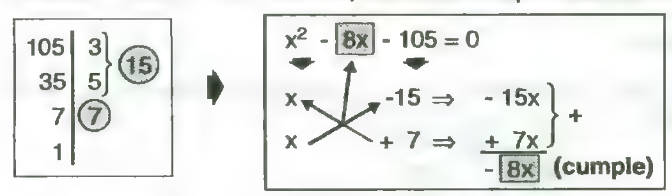
$$20 - 14 - 6 = 0 \quad \textbf{(cumple)}$$

Rpta: El conjunto solución de la ecuación: $5x^2 + 7x - 6 = 0$; es: C.S. = {-2 ; 3/5}

Ejemplo 2: Resolver: $x^2 - 8x - 105 = 0$

Resolución:

La ecuación dada: $x^2 - 8x - 105 = 0$; la factorizamos por el Método del Aspa, así:



Luego: $x^2 - 8x - 105 = (x - 15)(x + 7) = 0$

Igualamos cada factor a cero.

i) $(x - 15) = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = 15}$ **(primera raíz)**

ii) $(x + 7) = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = -7}$ **(segunda raíz)**

Rpta: El conjunto solución de la ecuación: $x^2 - 8x - 105 = 0$ es: C.S. = {-7 ; 15}

Recomendación:

Estimado alumno recuerda siempre; que toda ecuación de Segundo Grado tiene dos raices o soluciones.

Ejemplo 3: Resolver: $4x^2 - 49x = -12$

Resolución:

Pasando todo al primer miembro se tiene:

$4x^2 - 49x + 12 = 0 \Rightarrow$ $4x^2 - \boxed{49x} + 12 = 0$

Factorizamos por el Método del Aspa:

$4x \quad -1 \Rightarrow -x$

$x \quad -12 \Rightarrow -48x$ } +

$\boxed{-49x}$ **(cumple)**

Luego: $4x^2 - 49x + 12 = (4x - 1)(x - 12) = 0$

Igualamos cada factor a cero; veamos:

i) $(4x - 1) = 0 \Rightarrow 4x = 1 \Rightarrow \boxed{x_1 = 1/4}$ **(primera solución)**

ii) $(x - 12) = 0 \Rightarrow x = 12 \Rightarrow \boxed{x_2 = 12}$ **(segunda solución)**

Rpta: El conjunto solución de la ecuación: $4x^2 - 49x + 12 = 0$ es: C.S. = {1/4 ; 12}

Ejemplo 4: Resolver: $-x^2 + 10x + 24 = 0$

Resolución:

En este caso multiplicamos cada término de dicha ecuación por (-1) obteniendo:

$x^2 - \boxed{10x} - 24 = 0$

$x \quad -12 \Rightarrow -12x$

$x \quad +2 \Rightarrow +2x$ } +

$\boxed{-10x}$ **(cumple)**

Luego: $-x^2 + 10x + 24 = 0 \Rightarrow x^2 - 10x - 24 = 0$

$(x - 12)(x + 2) = 0$

Igualamos cada factor a cero.

i) $(x - 12) = 0 \Rightarrow$ $x_1 = 12$	ii) $(x + 2) = 0 \Rightarrow$ $x_2 = -2$

Rpta: El conjunto solución de la ecuación: $-x^2 + 10x + 24 = 0$ es: C.S. = {-2 ; 12}

Ejemplo 5: Resolver: $x(x + 1) = 24(x - 5)$

Resolución:

Efectuando los productos indicados, obtenemos:

$$x(x + 1) = 24(x - 5) \Rightarrow x^2 + x = 24x - 120$$

Pasamos todos los términos al primer miembro, quedando asi:

$$x^2 + x - 24x + 120 = 0 \Rightarrow x^2 - 23x + 120 = 0$$

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$; $3 \cdot 5 = 15$

$x \quad -15 \Rightarrow -15x$

$x \quad -8 \Rightarrow -8x$

$-23x$ (cumple)

Luego: $(x - 15)(x - 8) = 0$

De donde: i) $x - 15 = 0 \Rightarrow x_1 = 15$

ii) $x - 8 = 0 \Rightarrow x_2 = 8$

Rpta: El conjunto solución de la ecuación: $x(x + 1) = 24(x - 5)$ es: C.S. = {8 ; 15}

Ejemplo 6: Resolver: $\dfrac{x+1}{2x-1} = \dfrac{x-3}{x+3}$

Resolución:

Para este tipo de ecuación se aplica la propiedad que dice: "El producto de los extremos es igual al producto de los medios".

$$\frac{x+1}{2x-1} = \frac{x-3}{x+3} \Rightarrow (x+1)(x+3) = (2x-1)(x-3)$$

Efectuando los productos indicados se obtiene:

$$x^2 + 3x + x + \cancel{3} = 2x^2 - 6x - x + \cancel{3} \Rightarrow x^2 + 4x = 2x^2 - 7x$$

Pasamos los términos al segundo miembro:

$$0 = 2x^2 - 7x - x^2 - 4x \Rightarrow 0 = x^2 - 11x$$

Esta expresión, también se puede escribir así:

$x^2 - 11x = 0$; factorizamos "x"

$x(x - 11) = 0$; igualamos cada factor a cero.

De donde:

i) $x = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = 0}$	ii) $(x - 11) = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = 11}$

Rpta: El conjunto solución de la ecuación: $\dfrac{x+1}{2x-1} = \dfrac{x-3}{x+3}$ es: C.S. = {0 ; 11}

Ejemplo 7: Resolver: $\dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x+10}$

Resolución:

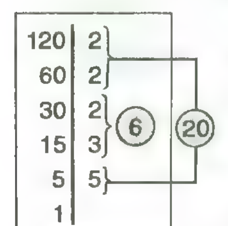
En el primer miembro; aplicamos: $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{a.d - b.c}{b.d}$

Obteniendo:

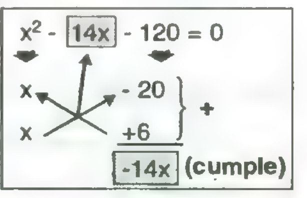
$\dfrac{x-12}{12x} = \dfrac{1}{x+10}$; hacemos producto de extremos y medios.

$(x - 12)(x + 10) = 12x(1) \Rightarrow x^2 + 10x - 12x - 120 = 12x$

$x^2 - 2x - 120 = 12x \Rightarrow x^2 - 2x - 12x - 120 = 0$



Factorizamos por el Método del Aspa:



Luego: $(x - 20)(x + 6) = 0$

De donde:

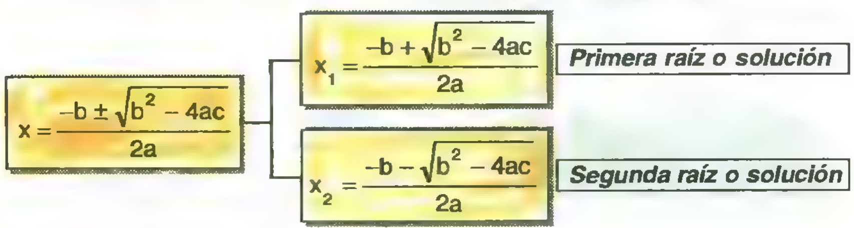
i) $x - 20 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = 20}$	ii) $x + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = -6}$

Rpta: El conjunto solución de la ecuación: $\dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x+10}$ es: C.S. = {-6 ; 20}

B. Resolución de Ecuaciones Cuadráticas empleando la Fórmula General

- Cuando la factorización no es posible se recurre a la fórmula general de la ecuación de Segundo Grado ($ax^2 + bx + c = 0$); la cual nos da las soluciones o raices de dicha ecuación.

• La fórmula General para resolver una ecuación cuadrática es:



Ejemplo 1: Resolver: $3x^2 + x - 6 = 0$

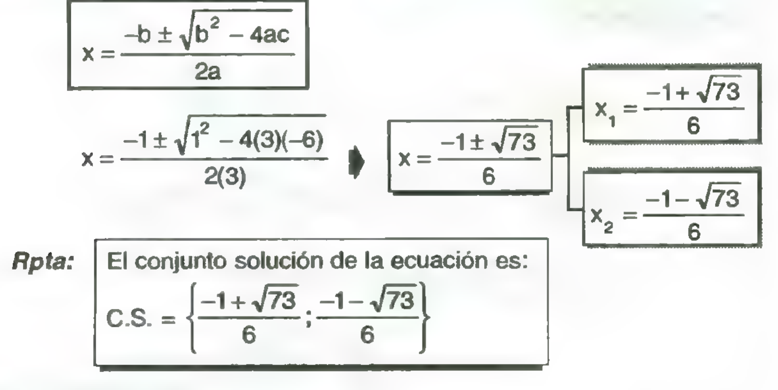
Resolución:

La ecuación dada, $3x^2 + x - 6 = 0$; tiene la forma: $ax^2 + bx + c = 0$

Donde:

$a = 3$; $b = 1$ y $c = -6$

Luego, reemplazamos los valores hallados en la fórmula General:



Rpta:

Ejemplo 2: Resolver: $5x^2 - 8x + 2 = 0$

Resolución:

La ecuación: $5x^2 - 8x + 2 = 0$; tiene la forma: $ax^2 + bx + c = 0$

Donde: $a = 5$; $b = -8$ y $c = 2$

Luego, reemplazamos los valores hallados, en la fórmula General:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \blacktriangleright \quad x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(5)(2)}}{2(5)}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{24}}{10} = \frac{8 \pm \sqrt{4 \times 6}}{10} = \frac{8 \pm 2\sqrt{6}}{10}$$

$$x = \frac{2(4 \pm \sqrt{6})}{10} = \frac{4 \pm \sqrt{6}}{5} \begin{cases} x_1 = \dfrac{4+\sqrt{6}}{5} \\ x_2 = \dfrac{4-\sqrt{6}}{5} \end{cases}$$

Rpta: El conjunto solucion de la ecuación es:

$$C.S = \left\{\frac{4-\sqrt{6}}{5} ; \frac{4+\sqrt{6}}{5}\right\}$$

Ejemplo 3: Resolver: $3x^2 - 2x + 1 = 0$

Resolución:

La ecuación dada: $3x^2 - 2x + 1 = 0$; tiene la forma: $ax^2 + bx + c = 0$

Donde: $a = 3$; $b = -2$ y $c = 1$

De la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3)(1)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-12}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{4(-2)}}{6} = \frac{2 \pm 2\sqrt{-2}}{6}$$

$$x = \frac{2(1 \pm \sqrt{-2})}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{2(-1)}}{3} = \frac{1 \pm \sqrt{2}.\sqrt{-1}}{3}$$

Pero: $\sqrt{-1} = i$ ⇒ $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{2}i}{3} \begin{cases} x_1 = \dfrac{1+\sqrt{2}i}{3} \\ x_2 = \dfrac{1-\sqrt{2}i}{3} \end{cases}$

Las raices son dos números complejos conjugados

Rpta: El conjunto solución de la ecuación es:

$$C.S. = \left\{\frac{1-\sqrt{2}i}{3} ; \frac{1+\sqrt{2}i}{3}\right\}$$

C. Resolución de una Ecuación Cuadrática Completando Cuadrados:

- Toda ecuación de Segundo Grado de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$; puede tomar la forma: $(px + q)^2 = K$; con tan solo **completando cuadrados.** Para esto se siguen los pasos que se indican a continuación:

1. Se hace la transposición de términos de manera que en el primer miembro estén los términos que contienen a la variable y en el segundo miembro el término constante (término independiente).
2. Se dividen los dos miembros entre el coeficiente de x^2.
3. Se suman a los dos miembros el cuadrado de la mitad del coeficiente de x.
4. Se expresa el primer miembro en forma del cuadrado de un binomio.
5. Se extraen las raices cuadradas de los dos miembros, anteponiendo el signo ± a la raiz cuadrada del nuevo término independiente.
6. Se resuelven las dos ecuaciones de primer Grado obtenidas en el paso anterior, hallando así el conjunto solución.

Ejemplo 1: Resolver, completando el cuadrado: $5x^2 - 2x - 3 = 0$

Resolución:

1^er^ Paso: Transponemos términos de tal manera que los términos que contienen la variable "x" esten en el primer miembro, y el término constante (**Término Independiente**), esten el segundo miembro; quedando asi:

$$\boxed{5x^2 - 2x = 3} \text{ .... (I)}$$

2^do^ Paso: Se dividen los dos miembros entre el coeficiente de x^2; osea entre 5.

$$\frac{5x^2 - 2x}{5} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{\cancel{5}x^2}{\cancel{5}} - \frac{2x}{5} = \frac{3}{5} \Rightarrow \boxed{x^2 - \frac{2}{5}x = \frac{3}{5}} \text{ .... (II)}$$

3^er^ Paso: Se suma a los dos miembros el cuadrado de la mitad del coeficiente de "x". así:

- Mitad del coeficiente de $\frac{2}{5}x \Rightarrow \frac{\left(\frac{2}{5}\right)}{2} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

- Su cuadrado de $\frac{1}{5} \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{25}}$

Luego: Sumamos $\boxed{\frac{1}{25}}$ a los dos miembros de la expresión **(II)**; obteniendo:

$$x^2 - \frac{2}{5}x + \boxed{\frac{1}{25}} = \frac{3}{5} + \boxed{\frac{1}{25}} \text{ .... (III)}$$

4^to^ Paso: Expresamos el primer miembro de la expresión **(III)** en forma del cuadrado de un binomio.

$$\underbrace{x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{25}} = \frac{3}{5} + \frac{1}{25}$$

$$\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 = \frac{3(5)+1}{25}$$

$$\boxed{\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}} \text{ .... (IV)}$$

Recuerda que:

$$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$$

5to Paso: Se extraen las raices cuadradas de los dos miembros; anteponiendo el signo a la raiz cuadrada del término 16/25. Así:

$$\sqrt{\left(x - \frac{1}{5}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} \Rightarrow x - \frac{1}{5} = \pm\frac{4}{5}$$

De donde:

i) $x - \frac{1}{5} = +\frac{4}{5} \Rightarrow x = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = \frac{\cancel{5}}{\cancel{5}} = 1 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 1}$

ii) $x - \frac{1}{5} = -\frac{4}{5} \Rightarrow x = -\frac{4}{5} + \frac{1}{5} = \frac{-3}{5} \Rightarrow \therefore \boxed{x = -\frac{3}{5}}$

Rpta: El conjunto solución de la ecuación: $5x^2 - 2x - 3 = 0$; es: C.S. = {-3/5 ; 1}

Ejemplo 2: Resolver, completando el cuadrado: $6x^2 + 26x + 8 = 0$

Resolución:

1º) Pasamos +8, al segundo miembro como -8.

$$\boxed{6x^2 + 26x = -8}$$

2º) Dividimos los dos miembros entre el coeficiente de x^2, osea entre 6.

$$\frac{6x^2 + 26x}{6} = \frac{-8}{6} \Rightarrow \frac{\cancel{6}x^2}{\cancel{6}} + \frac{\cancel{26}x}{\cancel{6}} = -\frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{x^2 + \frac{13}{3}x = -\frac{4}{3}} \text{ .... (II)}$$

- Sacamos la mitad: $\frac{\left(\frac{13}{3}\right)}{2} = \frac{13}{6}$ - El cuadrado de $\frac{13}{6} \Rightarrow \left(\frac{13}{6}\right)^2 = \boxed{\frac{169}{36}}$

3º) Sumamos $\boxed{\frac{169}{36}}$; a los dos miembros de la expresión **(I)**, obteniendo:

$$x^2 + \frac{13}{3}x + \boxed{\frac{169}{36}} = -\frac{4}{3} + \boxed{\frac{169}{36}}$$

$$\underbrace{x^2 + \frac{13}{3}x + \left(\frac{13}{6}\right)^2} = \frac{-4(12)+169}{36} = \frac{-48+169}{36} = \frac{121}{36}$$

$\left(x + \frac{13}{6}\right)^2 = \frac{121}{36}$; extraemos la raiz cuadrada a ambos miembros:

$$\left(x + \frac{13}{6}\right) = \pm\sqrt{\frac{121}{36}} = \pm\frac{11}{6}$$

De donde:

i) $x + \frac{13}{6} = +\frac{11}{6} \Rightarrow x = \frac{11}{6} - \frac{13}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \therefore \boxed{x = -\frac{1}{3}}$

ii) $x + \frac{13}{6} = -\frac{11}{6} \Rightarrow x = -\frac{11}{6} - \frac{13}{6} = \frac{-24}{6} = -4 \Rightarrow \therefore \boxed{x = -4}$

Rpta: El conjunto solución de la ecuación: $6x^2 + 26x + 8 = 0$; es: C.S. = {-1/3 ; -4}

Ejemplo 3: Resolver completando el cuadrado: $2x^2 + 7x - 30 = 0$

Resolución:

1º) Pasamos -30 al segundo miembro como +30.

$$\boxed{2x^2 + 7x = 30}$$

2º) Dividimos los dos miembros entre el coeficiente de x^2; osea entre 2.

$$\frac{2x^2 + 7x}{2} = \frac{30}{2} \Rightarrow \frac{\not{2}x^2}{\not{2}} + \frac{7x}{2} = 15 \Rightarrow \boxed{x^2 + \frac{7}{2}x = 15} \text{ .... (I)}$$

- Sacamos la mitad: $\frac{\left(\frac{7}{2}\right)}{2} = \frac{7}{4}$ ➧ - Su cuadrado de $\frac{7}{4} \Rightarrow \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \boxed{\frac{49}{16}}$

3º) Sumamos $\boxed{\frac{49}{16}}$; a los dos miembros de la expresión **(I)**; obteniendo:

$$x^2 + \frac{7}{2}x + \boxed{\frac{49}{16}} = 15 + \boxed{\frac{49}{16}}$$

$$\underbrace{x^2 + \frac{7}{2}x + \left(\frac{7}{4}\right)^2} = \frac{15(16)+49}{16} = \frac{240+49}{16} = \frac{289}{16}$$

$\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{289}{16}$; extraemos la raiz cuadrada a ambos miembros:

$$\left(x+\frac{7}{4}\right)^2 = \pm\sqrt{\frac{289}{16}} = \pm\frac{17}{4}$$

De donde: i) $x+\frac{7}{4}=+\frac{17}{4} \Rightarrow x=\frac{17}{4}-\frac{7}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2} \Rightarrow \therefore \ x=\frac{5}{2}$

ii) $x+\frac{7}{4}=-\frac{17}{4} \Rightarrow x=-\frac{17}{4}-\frac{7}{4}=\frac{-24}{4}=-6 \Rightarrow \therefore \ x=-6$

Rpta. El conjunto solución de la ecuación: $2x^2 + 7x - 30 = 0$ es: C.S. = {-6 ; 5/2}



TALLER DE EJERCICIOS Nº 15

1. Halla, por factorización, el conjunto solución de:

a) $x^2 + 11x + 24 = 0$	g) $2x(x + 3) = 7(x + 4)$	m) $\frac{24 - x}{x - 8} = \frac{24}{x - 4}$
b) $x^2 + 19x + 84 = 0$	h) $3x^2 + 6x = 32 + 2x$	n) $(x + 5)(x - 2) = 4(2x - 1)$
c) $2x^2 + 13x + 6 = 0$	i) $6 + 5x^2 = 15x - 4x^2$	ñ) $6x - x^2 + 27 = 0$
d) $4x^2 - 42x = 7x - 12$	j) $x^2 - 21x + 90 = 0$	o) $\frac{x + 3}{x + 2} = \frac{5x}{x + 6}$
e) $x(x - 3) = 2(x + 7)$	k) $x^2 + 28x = 4x^2 + 9$	p) $x^2 + 144 = 25x$
f) $2x^2 - 11x - 21 = 0$	l) $8x + 13 - 3x^2 = 0$	q) $\frac{3}{10} + \frac{1}{x + 3} = \frac{1}{x}$

2. Halla, aplicando la fórmula General, el conjunto solución de:

a) $x^2 - 10x + 1 = 0$	f) $3x^2 - 10x + 6 = 0$	k) $3x^2 - 8x + 1 = 0$
b) $x^2 - 6x + 1 = 0$	g) $2x^2 - 12x + 4 = 0$	l) $\frac{2x - 1}{x + 1} = \frac{x + 1}{x - 2}$
c) $5x^2 - 8x + 2 = 0$	h) $7x^2 + 8x - 3 = 0$	m) $(x + 5)^2 + (x + 3) = 5$
d) $3x^2 - 6x + 5 = 0$	i) $3x^2 + 4x - 6 = 0$	n) $(2x + 5)^2 - (x + 3)^2 = 2$
e) $5x^2 + 14x - 6 = 0$	j) $9x^2 - 16x + 4 = 0$	ñ) $4x - x^2 - 8 = 0$

3. Completa la siguiente tabla, sabiendo que la ecuación que se dan a continuación son de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$

Ecuaciones Cuadráticas	a	b	c	$b^2 - 4ac$
$x^2 - x + 1 = 0$				
$x^2 - 5x + 6 = 0$				
$3x^2 - 2x + 1 = 0$				
$4x^2 - 12x + 9 = 0$				
$2x^2 = 7x - 4$				
$18 - 12x = 2x^2$				
$3x^2 = -x - 4$				

4. Resuelva, completando el cuadrado, las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 12x + 20 = 0$
b) $3x^2 + 14x - 5 = 0$
c) $2x^2 - 2x - 1 = 0$
d) $5x^2 - 2x + 3 = 0$
e) $4x^2 = 28x - 49$
f) $x^2 - 10x + 9 = 0$
g) $3x^2 + 5x - 2 = 0$
h) $x^2 - 14x - 49 = 0$
i) $2x^2 - 6x + 3 = 0$
j) $4x^2 - x = 3$
k) $-3x^2 + 2x + 3 = 0$
l) $3x^2 - x - 5 = 0$
m) $5x^2 - 2x - 16 = 0$
n) $9x^2 = 6x - 1$
ñ) $3x^2 + x - 1 = 0$

5. Halla el conjunto solución, de las siguientes ecuaciones, aplicando el procedimiento que prefieras.

a) $\frac{2}{x+2} = \frac{x-4}{8}$
b) $\frac{2x+5}{2x-2} - \frac{3-x}{x} = \frac{7}{3}$
c) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x}{2} = x + 2$
d) $\frac{4}{x} + \frac{x}{2} = \frac{12}{x}$
e) $\frac{x}{x-1} - \frac{3}{2} = \frac{x-1}{x}$
f) $\frac{x-1}{2x-1} = 1 - \frac{2x-1}{x}$
g) $\frac{3}{x+8} - 2 = \frac{4}{x-2}$
h) $\frac{2x-2}{5} = 1 - \frac{x-6}{x-4}$
i) $\frac{9}{2(x-2)} = \frac{5}{x} + \frac{7}{2(x+2)}$

RESPUESTAS TALLER

1.

a) C.S. = {-8 ; -3}
b) C.S. = {-12 ; -7}
c) C.S. = {-6 ; -1/2}
d) C.S. = {1/4 ; 12}
e) C.S. = {-2 ; 7}
f) C.S. = {-3/2 ; 7}
g) C.S. = {-7/2 ; 4}
h) C.S. = {-4 ; 8/3}
i) C.S. = {-1/3 ; 2}
j) C.S. = {6 ; 15}
k) C.S. = {1/3 ; 9}
l) C.S. = {-1/3 ; 13}
m) C.S. = {-8 ; 12}
n) C.S. = {-1 ; 6}
ñ) C.S. = {-3 ; 9}
o) C.S. = {-9/4 ; 2}
p) C.S. = {9 ; 16}
q) C.S. = {-5 ; 2}

2.

a) $C.S.=\left\{5-2\sqrt{6}\,;5+2\sqrt{6}\right\}$

b) $C.S.=\left\{3-2\sqrt{2}\,;3+2\sqrt{2}\right\}$

c) $C.S.=\left\{\frac{4-\sqrt{6}}{5};\frac{4+\sqrt{6}}{5}\right\}$

d) $C.S.=\left\{\frac{3-\sqrt{6}i}{3};\frac{3+\sqrt{6}i}{3}\right\}$

e) $C.S.=\left\{\frac{-7-\sqrt{79}}{5};\frac{-7+\sqrt{79}}{5}\right\}$

f) $C.S.=\left\{\frac{5-\sqrt{7}}{3};\frac{5+\sqrt{7}}{3}\right\}$

g) $C.S.=\left\{3-\sqrt{7}\,;3+\sqrt{7}\right\}$

h) $C.S.=\left\{\frac{4-\sqrt{37}}{7};\frac{4+\sqrt{37}}{7}\right\}$

i) $C.S.=\left\{\frac{-2-\sqrt{22}}{3};\frac{-2+\sqrt{22}}{3}\right\}$

j) $C.S.=\left\{\frac{8-2\sqrt{7}}{9};\frac{8+2\sqrt{7}}{9}\right\}$

k) $C.S.=\left\{\frac{4-\sqrt{14}}{3};\frac{4+\sqrt{14}}{3}\right\}$

l) $C.S.=\left\{\frac{7-3\sqrt{5}}{2};\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right\}$

m) $C.S.=\left\{\frac{-11-\sqrt{29}}{2};\frac{-11+\sqrt{29}}{2}\right\}$

n) $C.S.=\left\{\frac{-7-\sqrt{7}}{3};\frac{-7+\sqrt{7}}{3}\right\}$

ñ) $C.S.=\left\{2(1-i)\,;2(1+i)\right\}$

4.

a) C.S. = {2 ; 10}

b) C.S. = {-5 ; 1/3}

c) $C.S.=\left\{\frac{1-\sqrt{3}}{2};\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right\}$

f) C.S. = {1 ; 9}

g) C.S. = {-2 ; 1/3}

h) $C.S.=\left\{7\left(1-\sqrt{2}\right);7\left(1+\sqrt{2}\right)\right\}$

d) C.S. = {-3/5 ; 1}

e) C.S. = {7/2}

i) $C.S.=\left\{\frac{3-\sqrt{3}}{2};\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right\}$

j) C.S. = {-3/4 ; 1}

k) $C.S.=\left\{\frac{1-\sqrt{10}}{3};\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right\}$

l) $C.S.=\left\{\frac{1-\sqrt{61}}{6};\frac{1+\sqrt{61}}{6}\right\}$

m) C.S. = {-8/5 ; 2}

n) C.S. = {1/3}

ñ) $C.S.=\left\{\frac{-1-\sqrt{13}}{6};\frac{-1+\sqrt{13}}{6}\right\}$

(5.) a) C.S. = {-4 ; 6}

b) C.S. = {-2 ; 9/2}

c) C.S. = {-3 ; 2}

g) C.S. = {-4 ; 4}

h) C.S. = {1/3 ; 2}

i) C.S. = {1/3 ; 1}

m) C.S. = {-1/2 ; -6}

n) $C.S.=\left\{\frac{5-\sqrt{29}}{2};\frac{5+\sqrt{29}}{2}\right\}$

ñ) C.S. = {-1 ; 5}

2.6.7. Inecuaciones Cuadráticas:

Una inecuación cuadrática es una desigualdad condicional que, reducida a su más simple expresión, tiene la forma.

$ax^2+bx+c>0$ .... **(1)** **ó** $ax^2+bx+c<0$ .... **(2)**

Donde: **a, b, c** son números reales, siendo: **a ≠ 0**

Para determinar los valores de "x" que satisfacen las inecuaciones **(1)** y **(2)**.

Existen los siguientes métodos:

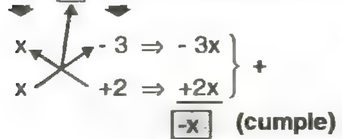
Ejemplo 1: Resolver: $x^2-4<x+2$

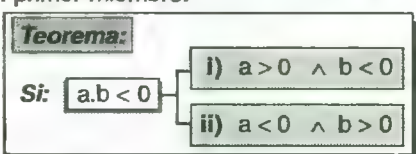
Resolución:

A. Primer Método (Método de Factorización):

$x^2-4<x+2$; transponemos términos, obteniendo:

$x^2-x-6<0$; factorizamos en el primer miembro:





Luego: $x^2 - x - 6 < 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 2) < 0$

Por Teorema:

i) $x - 3 > 0 \;\wedge\; x + 2 < 0$



$\therefore$ Conjunto Solución: $C.S_1 = \phi$

ii) $x - 3 < 0 \;\wedge\; x + 2 > 0$

$\boxed{x < 3} \;\cap\; \boxed{x > -2}$

−∞ -2 -1 0 1 2 3 +∞

$\therefore$ Conjunto Solución: $C.S_2 = x \in \langle -2\,;\,3\rangle$

Luego: El conjunto solución de la inecuación: $x^2 - 4 < x + 2$; es: $C.S. = \{x/x \in \langle -2\,;\,3\rangle\}$

B. Segundo Método (Método de Completar el cuadrado):

En la inecuación: $x^2 - 4 < x + 2$; transponemos términos, veamos:

$$x^2 - x < 6$$

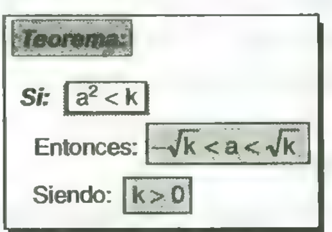
mitad de 1 es 1/2 ; cuadrado de: $\frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{4}}$

Luego; sumamos y restamos $\frac{1}{4}$ al primer miembro:

$$x^2 - x + \boxed{\frac{1}{4}} - \boxed{\frac{1}{4}} < 6$$

$$x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 < 6 + \frac{1}{4}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{25}{4}$$



Por Teorema:

$$-\sqrt{\frac{25}{4}} < \left(x - \frac{1}{2}\right) < \sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$-\frac{5}{2} < x - \frac{1}{2} < \frac{5}{2}$$; sumamos 1/2 a ambos miembros:

$$-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}<x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}<\frac{5}{2}+\frac{1}{2} \;\blacktriangleright\; -2<x<3 \;\Leftrightarrow\; \boxed{x\in\langle -2\,;\,3\rangle}$$ ***Rpta.***

C. Tercer Método (Método de los Puntos Críticos).

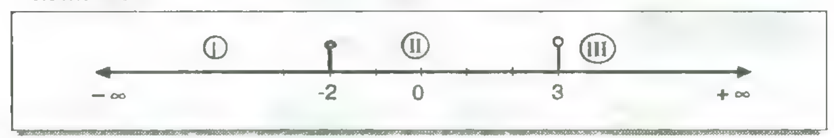
En la inecuación: $x^2 - 4 < x + 2$; transponemos términos, veamos:

$$x^2 - x - 6 < 0 \;\blacktriangleright\; x^2 - \boxed{x} - 6 = (x-3)(x+2)$$

$$(x-3)(x+2) < 0$$

x - 3
x +2

A continuación se encuentran aquellos valores de "x" que anulan a los factores $(x - 3)(x + 2)$ siendo; $x = 3$; $x = -2$ (puntos críticos); colocando en la recta numérica.



Nótese que ambos valores se excluyen ya que no existe el signo igual en la inecuación. Después de colocar estos valores se forman tres zonas que hemos representado por **(I)**, **(II)** y **(III)**.

A continuación se toma un valor cualquiera de la zona **(I)** y se reemplaza en el primer miembro de la inecuación: $(x - 3)(x + 2) < 0$; tomemos por ejemplo: $\boxed{x = -4}$

Donde: $(x - 3)(x + 2)$; para: $x = -4$; resulta: $(-4 - 3)(-4 + 2) = 14$ **(positivo)**

Luego: **Toda la zona (I) es positiva**

Se toma un valor de la zona **(II)** y se reemplaza en el primer miembro de la inecuación; por ejemplo: $\boxed{x = 1}$

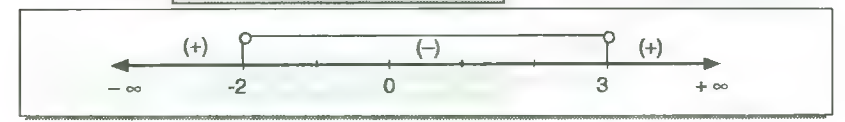
Donde: $(x - 3)(x + 2)$; para: $x = 1$; resulta: $(1 - 3)(1 + 2) = -6$ **(negativo)**

Luego: **Toda la zona (II) es negativa**

Se toma un valor de la zona **(III)** y se reemplaza en el primer miembro de la inecuación; por ejemplo: $\boxed{x = 5}$

Donde: $(x - 3)(x + 2)$; para: $x = 5$; rsulta: $(5 - 3)(5 + 2) = 14$ **(positivo)**

Luego: **Toda la zona (III) es positiva**



Como la inecuación es: $(x - 3)(x + 2) < 0$; nos interesa las zonas negativas vale decir la zona **(II)**.

Luego: La respuesta es: $x \in \langle -2 ; 3\rangle$

Ejemplo 2: Resolver: $x^2 - 7 > 1 - 2x$

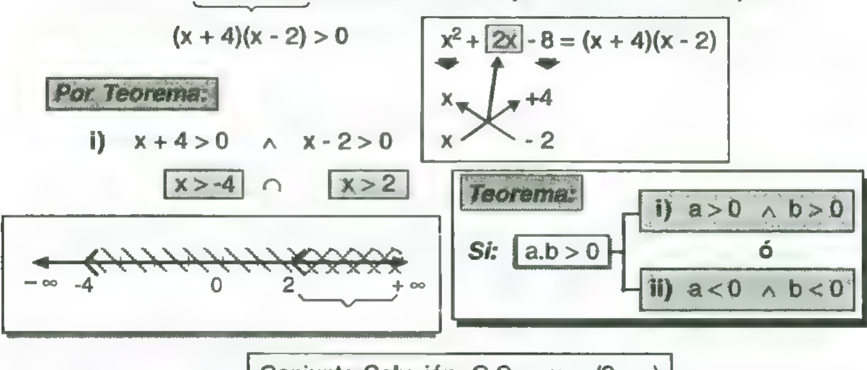
Resolución:

(A.) Método de Factorización:

En la inecuación: $x^2 - 7 > 1 - 2x$; transponemos términos, obteniendo:

$x^2 + 2x - 8 > 0$; factorizamos por el Método del Aspa.

$(x + 4)(x - 2) > 0$



$\therefore$ Conjunto Solución: $C.S_1 = x \in \langle 2 ; \infty\rangle$

Por Teorema:

i) $x + 4 < 0 \wedge x - 2 < 0$

$x < -4 \cap x < 2$

$-\infty$ -4 0 2 $+\infty$

$\therefore$ Conjunto Solución: $C.S_2 = x \in \langle \infty ; -4\rangle$

Luego, el conjunto solución de la inecuación: $x^2 - 7 > 1 - 2x$, será:

Rpta: Conjunto Solución $= C.S_1 \cup C.S_2 : x \in \{\langle \infty ; -4\rangle \cup \langle 2 ; \infty\rangle\}$

(B.) Método de Completar el Cuadrado:

La inecuación: $x^2 -7 > 1 - 2x$; se puede escribir así:

$x^2 + 2x > 8$

mitad de 2 es 1 ; cuadrado de 1 $\Rightarrow 1^2 = 1$

Luego, sumamos y restamos 1 al primer miembro:

$$\underbrace{x^2 + 2x + \boxed{1}}\ - \overrightarrow{\boxed{1}} > 8$$

$$(x + 1)^2 > 9$$

Teorema:

Si: $a^2 > b$

Entonces:

i) $a > \sqrt{b}$ ∨ ii) $a < -\sqrt{b}$

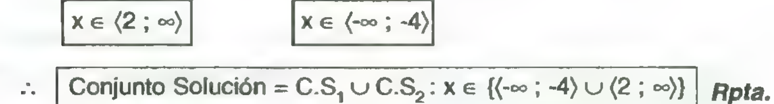
Siendo: $b > 0$

Por Teorema:

i) $x + 1 > \sqrt{9}$ ∨ ii) $x + 1 < -\sqrt{9}$

$x + 1 > 3$ $\qquad$ $x + 1 < -3$

$\boxed{x > 2}$ ∪ $\boxed{x < -4}$



$x \in \langle 2 ; \infty \rangle$ $\qquad$ $x \in \langle -\infty ; -4 \rangle$

∴ Conjunto Solución = $C.S_1 \cup C.S_2 : x \in \{\langle -\infty ; -4 \rangle \cup \langle 2 ; \infty \rangle\}$ ***Rpta.***

C. Método de los Puntos Criticos:

ı la inecuación: $x^2 - 7 > 1 - 2x$; transponemos términos, obteniendo:

$$\underbrace{x^2 + 2x - 8} > 0$$

$$(x + 4)(x - 2) > 0$$

$x^2 + \boxed{2x} - 8 = (x + 4)(x - 2)$

x +4

x - 2

• A continuación se encuentran aquellos valores de "x" que anulan a los factores $(x + 4)(x - 2)$; siendo estos: $x = -4$ y $x = 2$ (**puntos críticos**); colocándolos en la recta numérica.



Nótese que ambos valores se excluyen ya que existe el signo igual en la inecuación. Después de colocar estos valores se forman tres zonas que hemos representado por **(I)**, **(II)** y **(III)**.

A continuación se toma un valor cualquiera de la zona **(I)** y se reemplaza en el primer miembro de la inecuación: $(x + 4)(x - 2) > 0$; tomemos por ejemplo: $\boxed{x = -5}$

Donde: $(x + 4)(x - 2)$; para: $x = -5$; resulta: $(-5 + 4)(-5 - 2) = 7$ (**positivo**).

Luego: **Toda la zona (I) es positiva**

Se toma un valor de la zona **(II)** y se reemplaza en el primer miembro de la inecuación; por ejemplo: $\boxed{x = -2}$

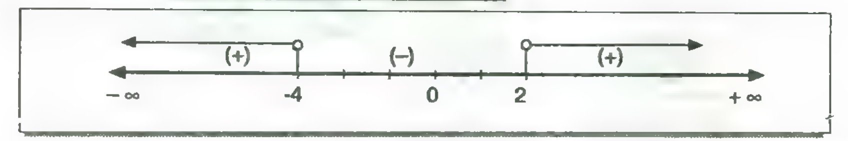
Donde: $(x + 4)(x - 2)$; para: $x = -2$; resulta: $(-2 + 4)(-2 - 2) = -8$ **(negativo)**

Luego: **Toda la zona (II) es negativa**

Se toma un valor de la zona **(III)** y se reemplaza en el primer miembro de la inecuación; por ejemplo: $x = 6$

Donde: $(x + 4)(x - 2)$; para: $x = 6$; resulta $(6 + 4)(6 - 2) = 40$ **(positivo)**

Luego: **Toda la zona (III) es positiva**



Como la inecuación es: $(x + 4)(x - 2) > 0$; nos interesan las zonas positivas vale decir las zonas **(I)** y **(III)**

Luego: **La respuesta es: $\langle -\infty ; -4\rangle \cup \langle 2 ; \infty\rangle$**



TALLER DE EJERCICIOS Nº 16

Halla el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

1) $x^2 + 5x - 14 > 0$	5) $x^2 - 4x - 21 < 0$	8) $4x^2 - 2x > x + 1$
2) $x^2 - x - 12 > 0$	6) $x(3x + 2) < (x + 2)^2$	9) $3x^2 - 5 < 2x$
3) $x^2 + 8x + 15 < 0$	7) $3x^2 - 7x + 4 > 0$	10) $4x^2 + 1 < 8x$
4) $-2x^2 + 3x - 1 > 0$		

RESPUESTAS TALLER

1) $\langle -\infty;-7\rangle \cup \langle 2 ; \infty\rangle$	5) $\langle -3 ; 7\rangle$	8) $\langle -\infty ; -1/4\rangle \cup \langle 1 ; \infty\rangle$
2) $\langle -\infty;-3\rangle \cup \langle 4 ; \infty\rangle$	6) $\langle -1 ; 2\rangle$	9) $\langle -1 ; 5/3\rangle$
3) $\langle -5 ; 3\rangle$	7) $\langle -\infty ; -1\rangle \cup \langle 4/3 ; \infty\rangle$	10) $\left\langle \frac{2-\sqrt{3}}{2};\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right\rangle$
4) $\langle 1/2 ; 1\rangle \cup \langle 2 ; \infty\rangle$		

2.6.7.1. Inecuaciones Cuadráticas en las que se requiere maximizar o minimizar.

Ejemplo 1: Encuentre el mínimo número M con la propiedad de que:
$2 + 6x - 3x^2 \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Resolución:

Completamos cuadrados

$$2 + 6x - 3x^2 = 2 - 3x^2 + 6x = 2 - 3(x^2 - 2x)$$

Completamos cuadrados:

$x^2 - 2x =$ — mitad de 2 es 1

cuadrado de 1 = $1^2 = 1$

Luego:

$x^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 - 1$

$x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$

$$= 2 - 3[x^2 - 2x + 1 - 1]$$
$$= 2 - 3[(x - 1)^2 - 1]$$
$$= 2 - 3(x - 1)^2 + 3$$
$$= 5 - 3(x - 1)^2$$

Luego: $5 - 3(x - 1)^2 \leq M$ .... (I)

* Para que "M" sea mínimo: $(x - 1)^2$, debe ser igual a cero, o sea:

$$(x - 1)^2 = 0 \Rightarrow (x - 1) = 0 \Rightarrow \therefore x = 1$$

El valor de x = 1; lo reemplazamos en **(I)**:

$$5 - 3(1 - 1)^2 \leq M \Rightarrow 5 - 0 \leq M \Rightarrow M \geq 5$$

De esta última expresión podemos afirmar que: "M" toma como valor mínimo 5.

∴ El mínimo número M es: 5 ***Rpta.***

Ejemplo 2: Encontrar el número M máximo con la propiedad de que para todo $x \in \mathbb{R}$: $M \leq x^2 + 4x + 6$

Resolución:

Completamos cuadrados:

$x^2 + 4x =$ — mitad de 4 es 2

cuadrado de 2 es: $2^2 = 4$

Luego:

$x^2 + 4x = x^2 + 4x + 4 - 4$

$x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$

Completamos cuadrados

$$x^2 + 4x + 6 = (x^2 + 4x) + 6$$
$$= (x^2 + 4x + 4 - 4) + 6$$
$$= [(x + 2)^2 - 4] + 6$$
$$= (x + 2)^2 + 2$$

Luego: $M \leq (x + 2)^2 + 2$ .... (I)

Para que "M" sea máximo: $(x + 2)^2$ debe ser igual a cero, o sea:

$$(x + 2)^2 = 0 \Rightarrow (x + 2) = 0 \Rightarrow \therefore x = -2$$

El valor de $x = -2$, lo reemplazamos en (I):

$$M \leq (-2+2)^2 + 2 \Rightarrow \boxed{M \leq 2}$$

* De esta última expresión podemos afirmar que: "M" toma como valor máximo 2.

∴ **El valor máximo de M es: 2** ***Rpta.***



TALLER DE EJERCICIOS Nº 17

1. Encontrar el mínimo número "M" con la propiedad de que para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) $2x - x^2 \leq M$	c) $-19 + 12x - 2x^2 \leq M$	e) $4x - x^2 \leq M$
b) $1 + 6x - x^2 \leq M$	d) $-12 + 8x - x^2 \leq M$	f) $3 + 2x - x^2 \leq M$

2. Encontrar el número "M" máximo con la propiedad de que para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) $M \leq x^2 - 4x + 4$	c) $M \leq 2x^2 - 8x + 3$	e) $M \leq 2x + x^2 - 5$
b) $M \leq x^2 - 4x + 29$	d) $M \leq 3x^2 + 6x - 1$	f) $M \leq 12x - 2x^2 + 3$

RESPUESTAS TALLER

1.	a) 1	c) -1	e) 4	**2.**	a) 0	c) -5	e) -6
	b) 10	d) 4	f) 4		b) 25	d) -4	f) 21



Expresiones Algebraicas en los Números Racionales

> ***Objetivo:***
>
> *Conocer y aplicar las expresiones algebraicas y polinómicas, como representaciones y generalizaciones de las operaciones básicas con números racionales.*

3.1. Nociones Básicas:

3.1.1. Variable:

Es un símbolo que puede representar a cualquiera de los elementos de un conjunto dado llamado **dominio.**

Si: "x" es una variable cuyo dominio es el conjunto: A = {2; 3; 5; 7; 8} esta variable puede ser representada por cualquiera de los números 2; 3; 5; 7; 8.

Una variable que tiene un único valor se dice que es **constante.**

3.1.2. Expresión algebraica:

Es la expresión en la que aparecen una o más variables relacionadas por las operaciones de Adición, Sustracción, Multiplicación, División, Potenciación y Radicación.

Son expresiones algebraicas:

a) $6x^3 - 3x^2y + \frac{1}{4}\sqrt{x}$

b) $-12x^8y^4z + 0{,}6x^3y^2$

c) $5x^9 - 3x^6 + 7x^4$

d) $2x^{-3} - 5x^{-6} + \frac{1}{3}x^{-2}$

Si son expresiones algebraicas, porque los exponentes de las variables de cada término son racionales. (Esto quiere decir que los exponentes pueden ser enteros o fracciones).

> ***Nota:***
>
> *Una expresión algebraica consta de un número finito de términos.*

No son expresiones algebraicas:

a) $8x^{\sqrt{3}} - 6x^{\sqrt{2}} + 19x^{\sqrt{5}}$

b) $3^x + 7^{2x} - 8^x$

c) $x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$ ......

No son expresiones algebraicas porque los exponentes no pueden ser números irracionales ($\sqrt{3}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$, etc) tampoco los exponentes pueden ser letras (variables).

> ***Nota:***
>
> *Los puntos suspensivos significan que la cantidad de sumandos es indefinidamente grande, osea nunca se llega al último sumando.*

3.1.3. Término o Monomio Algebraico:

Es la representación de una variable o variable y constantes relacionados entre sí por signos de Multiplicación, División, Potenciación de exponente entero y Radicación de Indice Natural.

Observemos la siguiente expresión algebraica:

$6 + 5x - 3xy$ ➧ (En esta expresión algebraica existen 3 términos algebraicos)

- $-3xy$: Es el producto de la constante - 3 por las variables xy.
- $5x$: Es el producto de la constante 5 por la variable x.
- 6: Es una constante

Observaciones:

a) En un término algebraico a la **constante** se le da el nombre de **coeficiente** y al producto de las variables se llama **parte literal.**

El término algebraico: $-8x^3y^2$; significa: -8 por x^3 por y^2

- x^3y^2: **Parte literal**
- -8: **coeficiente**

b) En la expresión algebraica: $3 + 7xy^2$

- xy^2: **Parte literal**
- 7: **constante o coeficiente**
- 3: **solo recibe nombre de constante, no es coeficiente porque no tiene parte literal.**

c) Cuando en un término el coeficiente es 1 ó -1, se acostumbra no escribirlo, así:

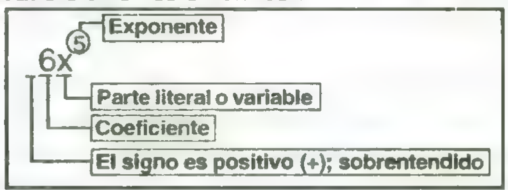
a) x^5y; en vez de $1x^5y$ **b)** $-x^3y^4$, en vez de $-1x^3y^4$

d) Si el signo algebraico no esta precedido por ningún signo se supone que el signo es (+) asi: $3x^2y^5 = +3x^2y^5$.

3.1.4. Elementos de un término algebraico: Los elementos de un término algebraico son:

1). **El signo**, que puede ser positivo (+) o negativo (-)
2). **El coeficiente**, que puede ser numérico o literal.
3). **Parte literal o variables**, que puede ser una letra o letras.
4). **El exponente**, que puede ser numérico o literal.

Por ejemplo, los cuatro elementos en $6x^5$ son:



3.1.5. Términos Semejantes:

Dos o más términos son semejantes si tienen la misma parte literal y cada letra aparece con el mismo exponente.

Asi:

* Son Términos Semejantes	* No Son Términos Semejantes
a) $3x^4$; $-6x^4$; $30x^4$	a) $7x^2y$; $5xy^2$; $-3xy^3$
b) $-4x\sqrt{y}$; $6x\sqrt{y}$; $3x\sqrt{y}$	b) $-4xyz^2$; $6x^2yz$; $-3xy^2z$
c) $7xy^3$; $3xy^3$; $-2xy^3$; $-8xy^3$	c) $6x\sqrt{y}$; $-14x\sqrt[3]{y}$; $8\sqrt{xy}$
d) $3x^ny^m$; $-14x^ny^m$; $23x^ny^m$	d) $3x^2y^3z$; $-14xy^4z^2$; $23x^2yz^3$

3.1.6. Clasificación de Expresiones Algebraicas:

Según la forma de sus variables, las expresiones algebraicas pueden ser: **Racionales** (cuando sus variables están afectadas de exponente entero) **e Irracionales** (cuando sus variables están afectadas de radicales o de exponente fraccionario).

Ejemplo:

* Expresiones Racionales	* Expresiones Irracionales
a) $6x^3 - 4x^4$	a) $5x^{1/2} + 2x^2y$
b) $\sqrt{3}x^6y^4 - 7x^5y^3$	b) $6\sqrt{y} - 2\sqrt[3]{y}$
c) $\frac{1}{3}x^{-4}y^2 + 7x^{-3}$	c) $-16xy^2 - 9x^{1/3}y^{-3}$

Observación:

Las expresiones racionales pueden ser enteras o fraccionarias.

(I) **Expresiones Racionales Enteras:** cuando las variables están afectadas solo de exponentes enteros positivos.

Ejemplos:

a) $4x^5y^3$	c) $\frac{2}{5}x^6 - \sqrt{2}x^4 + 8$
b) $2x^2 + 6x + 3$	d) $\sqrt{7}x^4 - \frac{5}{6}xy^2 - \frac{1}{8}$

(II) **Expresiones Racionales Fraccionarias:** cuando al menos una de las variables está afectada de exponente entero negativo.

Ejemplos:

a) $8x^{-3}$	c) $9x^3 - 6x^2 + 12x^{-1}$
b) $9x^2y^4z^{-6}$	d) $4x^3 + \frac{6}{x} + 3$

3.1.7. Clasificación de las expresiones algebraicas:

Las expresiones algebracias se clasifican en monomios y polinomios.

- **Monomio:** Es la expresión algebraica que consta de un solo término.

Ejemplos: Son monomios:

a) $5x$ b) $6xy^2$ c) $-8x^3y^2$ d) $\frac{2}{5}x^3yz^4$

- **Polinomio:** Es la expresión algebraica de dos o más términos, siendo los exponentes de las variables enteros positivos.

Ejemplos: Son polinomios:

a) $x + 3y$ b) $2x^3 + 4y$ c) $\frac{2}{3}x^3 + 3x^2y + 6$ d) $-\frac{4}{7}xy^2 + 2x^2 - \frac{1}{3}x + 4$

* **En Particular,** se tiene:

• **Binomio:** Es el polinomio que tiene dos términos.

Ejemplos: Son binomios:

a) $5x - 2y$ b) $x^2 + 3y^2$ c) $2xy - x^4$ d) $-7xy + 8y^2$

• **Trinomio:** Es el polinomio que tiene tres términos.

Ejemplos: Son trinomios:

a) $3x + 2y - z$ b) $5x + 3y + 9$ c) $4x^2 + 3x + 2$ d) $5x^3 + 2x^2 - 6$

> *Nota:*
>
> *Cuando un polinomio consta de 4 términos, se dice polinomio de 4 términos; si tiene 5 términos; polinomio de 5 términos, etc.*

① Grado de un Monomio:

Ⓐ Grado Relativo (G.R).

El Grado Relativo de un monomio respecto a una variable es el exponente de dicha variable en el monomio.

Ejemplo: Dado el monomio: $6x^4y^3$

- **Grado relativo** respecto a la variable "x" es 4.
- **Grado relativo** respecto a la variable "y" es 3.

Ⓑ Grado Absoluto (G.A).

El Grado Absoluto de un monomio es la suma de los grados relativos de sus variables.

Ejemplo 1: El monomio $12x^6y^7$

- **Grado relativo** respecto a la variable "x" es 6.
- **Grado relativo** respecto a la variable "y" es 7.

(Grado Absoluto del Monomio) = (Grado Relativo respecto a "x") + (Grado Relativo respecto a "y")

$\therefore$ **(Grado Absoluto del Monomio)** $= 6 + 7 = 13$

Ejemplo 2: Dado el monomio : $-8x^3y^4z^2$

- Grado relativo respecto a "x" es: 3
- Grado relativo respecto a "y" es: 4
- Grado relativo respecto a "z" es: 2

Luego: $\begin{pmatrix}\text{Grado Absoluto}\\ \text{del Monomio}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Grado Relativo}\\ \text{respecto a "x"}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Grado Relativo}\\ \text{respecto a "y"}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Grado Relativo}\\ \text{respecto a "z"}\end{pmatrix}$

$\therefore$ (Grado Absoluto del Monomio) = 3 + 4 + 2 = 9



TALLER DE EJERCICIOS Nº 18

1. Completa la siguiente tabla:

Monomios	$-6x^3y^2$	$13x^5yz^2$	$-\frac{3}{8}x^4y^6$	$7x^3z^4y^2$	$-0{,}8abx^5y^8$	$-2x^9y$
Coeficiente		**13**				
Parte Literal			x^4y^6			
Grado Absoluto						**9+1=10**

2. Completa la siguiente tabla: (**E.A:** significa expresión algebraica)

Expresión	**Es una E.A.**	**No es una E.A.**
$5x^3 - 3x^2 - 6$		
$\frac{x}{3} - \frac{x^2}{6} + x^3$	Si	
$2^x + 3^x - 5^x$		No
$2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots\ldots$		
$4x + \frac{1}{x} - 2$		
$3^x + x^3$		
$x^6 - \sqrt{3}x^3 + \frac{1}{2}x$		

Expresión	Es una E.A.	No es una E.A.
$6\sqrt{x} - 3\sqrt{y} + 4$		
$x^6 - x^3 + \sqrt{3}$		
$x^4 - \sqrt{2}x^3 - 8$		
$x^{\sqrt{3}} - 5y^{\sqrt{5}} + x^2$		
$x^3 + 2 - x^{-3} - \sqrt{x}$		
$x^x + 6 - 2x$		
$8^x - 1 + 2x^2$		

3. Escribe en el recuadro correspondiente el número de términos que tiene cada una de las expresiones algebraicas siguientes:

a) $12x^3y^4z^2$ ☐

b) $2x^5.(-3x^3y^4z)$ ☐

c) $-8xyz^3.\sqrt[3]{y}$ ☐

d) $x^3 + 3x^2 + 2x + 6$ ☐

e) $\sqrt{2}x^8 - x^5 + \sqrt{3}xy^6$ ☐

f) $3x^4y.(2x^2 - xy^3)$ ☐

g) $6x^3 \cdot \frac{1}{3}x^2y + \sqrt{3}x^2z - 16$ ☐

h) $(5xy)(2x^2y^3)(-3xy^2)(x^6)$ ☐

i) $x^3 - x^2 + x + x^{-3} - x^{-2} + x^{-1} + 2$ ☐

j) $-\sqrt{6}x - 5x^2 + \frac{2}{3}xy + 18$ ☐

k) $\left(\sqrt{8}x^4\right)\left(-2\sqrt{2}x^3\right)\left(3x^2\right) - 1$ ☐

l) $\left(-\frac{1}{5}xy^2\right)\left(-10x^3y^{-2}\right) + 2x^4 + 3$ ☐

4. Marcar con un aspa indicando el tipo de expresión algebraica del que se trata:

Expresión Algebraica	Racional Entera	Racional Fraccionaria	Irracional
$3x^2 + 4x + 1$			
$x + x^{-2}$		X	
$\sqrt{x} + x + 5$			X
$x + \frac{1}{x} + x^3 + \frac{1}{x^3}$			

Expresión Algebraica	Racional Entera	Racional Fraccionaria	Irracional
$x^2 + 3x - 4$	X		
$\frac{4}{x} + x^2$			
$\frac{x^2y}{2} - 6$			
$x - 3y$			
$3\sqrt{x} + \sqrt{y} + 1$			
$x^{-3} + \frac{1}{x^2} + 6$			
$5x^2 + x^{-2} + 1$			
$\sqrt{2x} + x + 2$			
$x^{2/3} - x^2 - \frac{1}{3}$			
$\sqrt[3]{x} - x + x^{-1}$			
$6\sqrt{2}\,x + x^3 + x^5$			
$-5x^4 + \frac{1}{x} + 6$			
$\sqrt{xy} + \sqrt{2}\,x$			
$\sqrt{x}\left(\sqrt{x} + 1\right)$			

(II) Grado de un Polinomio:

(A) Grado Relativo (G.R).

El Grado Relativo de un polinomio esta representado por el **mayor exponente** de dicha letra o variable.

Ejemplo: Dado el polinomio: $4x^3y^4 - 9x^2y^{\boxed{5}} + 2x^{④}y^3$

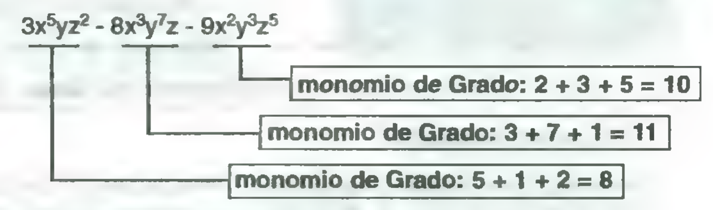
- Grado relativo con respecto a la variable "x" es: ④
- Grado relativo con respecto a la variable "y" es: $\boxed{5}$

(B) Grado Absoluto (G.A.).

El Grado Absoluto de un polinomio esta representado por el monomio de mayor grado.

Ejemplo 1: Dado el polinomio:

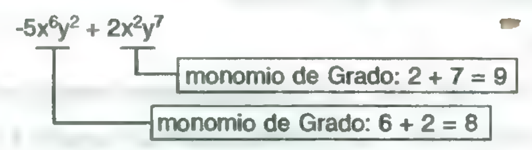
$$3x^5yz^2 - 8x^3y^7z - 9x^2y^3z^5$$



Luego: El Grado Absoluto del Polinomio es: 11

Ejemplo 2: Dado el polinomio:

$$-5x^6y^2 + 2x^2y^7$$



Luego: El Grado Absoluto del polinomio es: 9

> ***Recomendación:***
>
> *Estimado alumno, no vayas a cometer el error de decir:*
>
> (Grado Absoluto del Polinomio) = (Suma de Grados Relativos con respecto a sus variables del polinomio)
>
> ***Porque esto es falso.***

- **Polinomios Homogéneos:** Son aquellos cuyos términos monomios tienen igual grado.

Ejemplo:

$$3x^2y^5 - 5x^3y^4 - 8xy^6$$

Grado Absoluto = 7 = Grado de Homogeneidad

- $3x^2y^5$: **Monomio de Grado 7**
- $5x^3y^4$: **Monomio de Grado 7**
- $8xy^6$: **Monomio de Grado 7**

∴ (Grado de cada monomio) = (Grado Absoluto del polinomio) = (Grado de homogeneidad)

- **Polinomios Heterogéneos:** Son aquellos cuyos términos monomios tienen diferente grado.

Ejemplo:

$$2x^3y^6z^4 - 11x^7y^5z^4 - 8x^6y^3z^5$$

- $8x^6y^3z^5$: **Monomio de Grado 14**
- $11x^7y^5z^4$: **Monomio de Grado 16**
- $2x^3y^6z^4$: **Monomio de Grado 13**

- **Polinomio Ordenado:**

Un polinomio ordenado respecto a una letra llamada **ordenatriz** es aquel en el cual los exponentes de dicha letra van aumentando o disminuyendo. Si el exponente de la ordenatriz va **aumentando** se dice que el polinomio esta ordenado en forma **ascendente** y si va **disminuyendo** se dice que el polinomio esta ordenado en forma **descendente**.

Ejemplos:

1). $9x^5 + 6x^4 - 8x^3 + 4x^2 - 5x$; **es descendente** respecto a "x".

2). $12x^4 - 6x^3y + 3x^2y^2 - 5xy^3$; **es descendente** respecto a "x" y **ascendente** respecto a "y"

3). $7xy^5 - 4x^2y^4 + 7x^3y^3 - 3x^4y^2 + 6x^5y$; **es ascendente** respecto a "x" y **descendente** respecto a "y".

- **Ordenar un polinomio:**

Es escribir sus términos de manera que los exponentes de una letra escogida como ordenatriz queden en orden ascendente o descendente.

Ejemplo 1: Ordenar el polinomio: $8x - 10x^3 - 7 + 5x^2 + 2x^4$, en forma descendente respecto a "x".

Resolución:

$2x^4 - 10x^3 + 5x^2 + 8x - 7$ ➧ **(Polinomio ordenado en forma descendente)**

Este último término que no contiene la variable "x" se sabe llamar término independiente

Ejemplo 2: Ordenar el polinomio: $8x^2y^2 - 5xy - 6x^3y^3 + 3y^4 + 10x^4$, en forma descendente respecto a "x".

Resolución:

$10x^4 - 6x^3y^3 + 8x^2y^2 - 5x^1y + 3y^4$ .....**(Polinomio ordenado en forma descendente respecto a "x").**

Ejemplo 3: Ordenar el siguiente polinomio: $xy^4 + y^5 + x^2y^3$

Resolución:

$x^2y^3 + x^1y^4 + y^5$ ......**(Ordenado descendentemente respecto a "x")**
(Ordenado ascendentemente respecto a "y")

• Polinomio Completo:

Es el que tiene los exponentes de su letra ordenatriz en forma consecutiva desde el mayor hasta el cero o viceversa.

Ejemplos:

a) $5x^{②} - 3x + 1$; **polinomio de Grado 2; cuyo número de términos es 3.**

b) $7x^{③} - 4x^2 + 5x - 7$; **polinomio de Grado 3; cuyo número de términos es 4.**

c) $5x^4 + 7x^3 - 4x^2 + 3x - 1$; **este polinomio se puede escribir así:**

$$5x^4 + 7x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 5x^4 + 7x^3 - 4x^2 + 3x^1 - 1x^0$$

Observaciones:

1). Todo **polinomio completo** tiene un término independiente.

Ejemplo: Dado el polinomio:

$3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 7x + 9$ → **Término Independiente**

2). En todo **polinomio completo** se cumple que:

Número de términos = Grado del Polinomio + 1

Ejemplo: Dado el polinomio:

$7x^5 + 4x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 5x + 6$ ......**(Grado del polinomio = 5)**

$\therefore$ # de términos = 5 + 1 = 6

3). Si un polinomio no es completo, puede completarse escribiendo los términos que faltan con coeficiente cero, asi por ejemplo:
El polinomio: $3x^4 - 7x^2 + 6$

Se completa así: $3x^4 - 7x^2 + 6 = 3x^4 + 0x^3 - 7x^2 + 0x + 6$

• Notación Polinomial:

Un polinomio cuya única variable es "x", se puede representar así:

* $P(x) = 5x^2 + 3x + 2 \Rightarrow$ que se lee: "P de x" ó "P esta en función de x"

(Nos indica que "x" es la variable y que el polinomio P depende de x).

** $P(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 \Rightarrow$ x, y: son las variables.
a,b,c : son las constantes.

Nos indica que "x" e "y" son las variables y que el polinomio P depende de "x" y de "y"

En **General** un polinomio de (n + 1) términos, se representa de la manera siguiente:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

Donde:
- **x:** es la variable, cuyo mayor exponente es n.
- $a_0; a_1; \ldots\ldots a_{n-1}; a_n$: son los coeficientes del polinomio $P_{(x)}$.

Observaciones:

1) En todo polinomio completo se cumple que la suma de coeficientes, se obtiene reemplazando a la variable o variables con los cuales se esta trabajando por la unidad **(1)**.

Ejemplo: Dado el polinomio:

$$P(x) = 5x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 3x + 9$$

Σ de coeficientes: $P(1) = 5(1)^4 - 2(1)^3 + 6(1)^2 + 3(1) + 9$

$$P(1) = 5(1) - 2(1) + 6(1) + 3 + 9 = \boxed{21}$$

2) En todo polinomio **completo** se cumple que el término independiente (T.I), se obtiene reemplazando a la(s) variable(s) por cero.

Ejemplo: Dado el polinomio:

$$Q(x) = 8x^3 - 4x^2 + 5x + 2$$

T.I: $Q(0) = 8(0)^3 - 4(0)^2 + 5(0) + 2 = \boxed{2}$

3) Para la notación de un polinomio no necesariamente se usa P(x); también se pueden usar otras letras como por ejemplo:
$F(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 1$ ó $R(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 1$

• ***Polinomios Idénticos:***

Dos polinomios reducidos son idénticos cuando los coeficientes que afectan a sus términos semejantes son iguales.

Ejemplo: Si: $Ax^4 + Bx^2 + C \equiv px^4 + qx^2 + r$

Se debe cumplir que: $A = p$; $B = q$ y $C = r$

$\equiv$; Significa idénticamente igual

Nota:

Sólo en polinomios idénticos podemos asignarle cualquier sistema de valores a la variable o variables con las cuales se esté trabajando y obtendremos el mismo valor numérico en ambos miembros veamos:

Ejemplo: Si se cumple la siguiente identidad:

$3(x + 5) \equiv a(x + 1) + b(x - 2)$; hallar el valor de "a" y "b".

Resolución:

Primer Método:

$$3(x + 5) \equiv a(x + 1) + b(x - 2)$$

Efectuando los productos indicador, se tiene:

$$3x + 15 \equiv ax + a + bx - 2b$$

Agrupamos términos en el segundo miembro:

$$3x + 15 \equiv (ax + bx) + (a - 2b)$$

$$3x + 15 \equiv (a + b)x + (a - 2b)$$

Por ser idénticos:

i) $a + b = 3 \Rightarrow a = 3 - b$ ...... **(I)**

ii) $a - 2b = 15$

Reemplazamos **(i)** en **(ii)**

i) $(3 - b) - 2b = 15$

ii) $3 - 3b = 15 \Rightarrow -3b = 12$

$$\therefore\ b = -4$$

Reemplazamos el valor de $b = -4$, en **(I)**:

$$a = 3 - (-4)$$

$$a = 3 + 4 \Rightarrow \therefore\ a = 7$$

Segundo Método:

- Por ser una identidad, podemos darle valores numéricos a la variable "x"; estos valores tienen que ser dados en forma conveniente, de modo que sea fácil el cálculo, veamos:

Si: $x = 2$

$$3(x + 5) \equiv a(x + 1) + b(x - 2)$$

$$3(2 + 5) \equiv a(2 + 1) + b(\underbrace{2 - 2}_{0})$$

$$21 \equiv 3a \Rightarrow \therefore\ a = 7$$

Si: $x = -1$

$$3(x + 5) \equiv a(x + 1) + b(x - 2)$$

$$3(-1 + 5) \equiv a(\underbrace{-1 + 1}_{0}) + b(-1 - 2)$$

$$3(4) \equiv -3b$$

$$12 \equiv -3b \Rightarrow \therefore\ b = -4$$

Luego:

Los valores de a y b son: -4 y 7 respectivamente.

Polinomio Idénticamente Nulo:

Un polinomio reducido es idénticamente nulo, cuando los coeficientes de todos sus términos son nulos o ceros.

Ejemplo: Si: $Ax^5 + Bx^3 + Cx^2 + D \equiv 0$

Se debe cumplir que: $\boxed{A = B = C = D = 0}$

Ejemplo: Si el polinomio: $(b - 6a)x^3 - (2a - 1)x^2 + (2b - 6) \equiv 0$, es idénticamente nulo. Hallar el valor de "a" y "b".

Resolución:

El polinomio: $(b - 6a)x^3 - (2a - 1)x^2 + (2b - 6) \equiv 0$

Por ser idénticamente nulo, se debe cumplir que:

i) $(b - 6a) = 0 \Rightarrow \boxed{b = 6a}$ .... (I)

ii) $(2a - 1) = 0 \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow \therefore \boxed{a = 1/2}$

iii) $2b - 6 = 0 \Rightarrow 2b = 6 \Rightarrow \therefore \boxed{b = 3}$

3.1.7. Valor Numérico de expresiones algebraicas

El valor numérico de una expresión algebraica es el valor que ésta toma al reemplazar las letras o variables por valores particulares y efectuar las operaciones indicadas así:

Ejemplo 1: Halla el valor numérico (V.N) de:

$$E = (5x + 1)^2 - (3y^2 + 2) \text{ ; para: } x = 2 \text{ ; } y = 5$$

Resolución:

• Reemplazando los valores para: $x = 2$; $y = 5$, en la expresión "E", se obtiene:

$E = (5.2 + 1)^2 - (3.5^2 + 2)$; efectuamos la potencia: $5^2 = 25$

$E = (5.2 + 1)^2 - (3.25 + 2)$; efectuamos los productos indicados.

$E = (10 + 1)^2 - (75 + 2)$; efectuamos las sumas indicadas dentro de los paréntesis.

$E = (11)^2 - 77$; efectuamos la potencia: $11^2 = 121$

$E = 121 - 77 \Rightarrow \therefore \boxed{E = 44}$ ***Rpta.***

Ejemplo 2: Halla el valor numérico de: $\dfrac{a(a+b)^2(a-b)}{a^2-b^2}$

para: $a = 2$ y $b = 1$

$$\frac{a(a+b)^2(a-b)}{a^2-b^2}=\frac{2(2+1)^2(2-1)}{2^2-1^2}=\frac{2(3)^2(1)}{4-1}$$

$$=\frac{2(9)}{3}=\boxed{6}\ \textit{Rpta.}$$

Ejemplo 3: Halla el V.N. de:

$$M=\left(x^3+2x^2-1\right)^{x^2+1}\ ;\text{ para: } x=-1$$

Resolución:

$$M=\left(x^3+2x^2-1\right)^{x^2+1}=\left[(-1)^3+2(-1)^2-1\right]^{(-1)^2+1}$$

$$=[(-1)+2(1)-1]^{1+1}=(0)^2=0 \quad \boxed{M=0}\ \textit{Rpta.}$$

Ejemplo 4: Halla el V.N. de : $Q = 3xy^2 - 5yz^3 + 2xz$; para: $x = -3$; $y = -1$; $z = 2$

Resolución:

$$Q = 3xy^2 - 5yz^3 + 2xz = 3(-3)(-1)^2 - 5(-1)(2)^3 + 2(-3)(2)$$

$$= \underbrace{3(-3)(1)} - \underbrace{5(-1)(8)} + \underbrace{2(-3)(2)}$$

$$= -9 + 40 - 12 = 19 \Rightarrow \therefore \boxed{Q = 19}\ \textit{Rpta.}$$

Ejemplo 5: Halla el V.N. de: $\dfrac{5abc-b^2c+2ac^2}{3ab-5bc^2}$; para: $a = 2$; $b = -1$; $c = -3$.

Resolución:

$$\frac{5abc-b^2c+2ac^2}{3ab-5bc^2}=\frac{5(2)(-1)(-3)-(-1)^2(-3)+2(2)(-3)^2}{3(2)(-1)-5(-1)(-3)^2}$$

$$=\frac{30-(1)(-3)+4(9)}{-6-(-5)(9)}=\frac{30+3+36}{-6+45}$$

$$=\frac{69}{39}=\boxed{\frac{23}{13}}\ \textit{Rpta.}$$

Ejemplo 6: Si: $F(x) = 5x^2 - x + 7$; hallar: $F(2)$

Resolución:

$$F(x) = 5x^2 - x + 7$$

$$F(2) = 5(2)^2 - (2) + 7 = 5(4) - 2 + 7 = 20 - 2 + 7 = 25$$

$$\therefore \boxed{F(2) = 25}\ \textit{Rpta.}$$

Ejemplo 7: Si: $M(x) = 5(x + 1)(x - 1) + (x + 1)^3$; hallar $M(-3)$

Resolución:

$M(-3) = 5(-3 + 1)(-3 - 1) + (-3 + 1)^3$

$M(-3) = 5(-2)(-4) + (-2)^3 = 5(8) + (-8) = 40 - 8 = 32 \Rightarrow \therefore$ $\boxed{M(-3) = 32}$ ***Rpta.***

Ejemplo 8: Calcular el V.N. de: $R = (3a + 3b)^2$;

para: $a = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ y $b = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

Resolución:

$$R = (3a + 3b)^2 = \left[3\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) + 3\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\right]^2$$

$$= \left[3\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + 3\sqrt{2}\right]^2$$

$$= \left[6\sqrt{3}\right]^2 = 6^2.\sqrt{3}^2 = 36.3 = 108$$

$\therefore$ $\boxed{R = 108}$ ***Rpta.***

Ejemplo 9: Si: $P(x) = x^2 - 2x + 3$; hallar: $E = \dfrac{P(-1) + P(1)}{P(-2)}$

Resolución:

Del polinomio: $P(x) = x^2 - 2x + 3$

Calculamos:

Para: $\boxed{x = -1}$: $P(-1) = (-1)^2 - 2(-1) + 3 = 1 + 2 + 3 = 6$

Para: $\boxed{x = 1}$: $P(1) = (1)^2 - 2(1) + 3 = 1 - 2 + 3 = 2$

Para: $\boxed{x = -2}$: $P(-2) = (-2)^2 - 2(-2) + 3 = 4 + 4 + 3 = 11$

Luego, reemplazamos los valores hallados en la expresión "E"

$$E = \frac{P(-1) + P(1)}{P(-2)} = \frac{6 + 2}{11} = \boxed{\frac{8}{11}}$$ ***Rpta.***

Ejemplo 10: Si el valor numérico de "R" es 24 ; para $x = 2$; $y = -3$. ¿Cuál es el valor de "n"?. $R = x^2y + nxy^2$

Resolución:

Reemplazamos los valores de: x, y, R, en la expresión "R", obtenemos:

$R = x^2y + nxy^2$

$24 = 2^2(-3) + n(2)(-3)^2 \Rightarrow 24 = 4(-3) + n(2)(9)$

$24 = -12 + 18n$

$24 + 12 = 18n \Rightarrow 36 = 18n \Rightarrow \therefore \boxed{n = 2}$ ***Rpta.***

3.1.8. Grado de las operaciones algebraicas:

El Grado de una expresión algebraica se determina después de realizar operaciones indicadas, las reglas que debemos aplicar son las siguientes:

I. ***Grado de un producto:*** *Se suman los grados de los factores.*

Ejemplo 1: El grado de:	***Ejemplo 2:*** El grado de:
$(x^{2} + 1)(x^{3} + 2)$;	$(x^{1} + 3)(x^{2} - 1)(x^{3} + 5)$
Será: $2 + 3 = \boxed{5}$	Será: $1 + 2 + 3 = \boxed{6}$

II. ***Grado de un cociente:*** *Se resta el grado del dividendo menos el grado del divisor.*

Ejemplo 1: El grado de:	***Ejemplo 2:*** El grado de:
$\dfrac{x^3y^4}{z^2y}$	$\dfrac{x^{8} + x^4 + 1}{x^{2} + x + 1}$
Será: $(3 + 4) - (2 + 1) = \boxed{4}$	Será: $8 - 2 = \boxed{6}$

III. ***Grado de una potencia:*** *Está dado por el grado de la base multiplicado por la potencia.*

Ejemplo 1: El grado de:	***Ejemplo 2:*** El grado de:
$(x^{2} + 1)^4$;	$(x^{5} + 3x^2 + 5)^3$
Será: $2 \times 4 = \boxed{8}$	Será: $5 \times 3 = \boxed{15}$

IV. ***Grado de una raiz:*** *Está dado por la división del grado del radicando entre el índice de la raiz.*

Ejemplo 1: El grado de:	***Ejemplo 2:*** El grado de:
$\sqrt[4]{x^{12} + 2x^6 + 1}$	$\sqrt[3]{x^{6} - 5x^4 + 3x^2 - 6}$
Será: $12 : 4 = \boxed{3}$	Será: $6 : 3 = \boxed{2}$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Calcular el valor de "a", si el término algebraico. $18x^{5a}y^4$ es de grado 19.

   a) 2   b) 3   c) 4   d) -2   e) 5

Resolución:

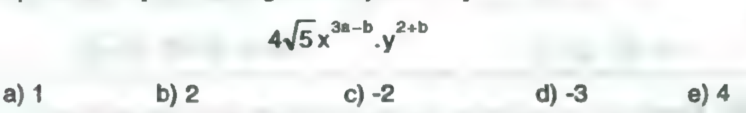
- Cuando nos dicen que el término algebraico es de tal grado, es porque se refiere al grado absoluto.

Luego: $18x^{5a}y^{4} \Rightarrow 5a + \overrightarrow{4} = 19$

$$5a = 19 - 4 \Rightarrow 5a = 15 \Rightarrow a = \frac{15}{5} \Rightarrow \therefore \boxed{a = 3}$$

Rpta. b

2. Hallar el valor de "a", si se sabe que el siguiente monomio es de quinto grado respecto a "x" y de tercer grado respecto a "y".



$$4\sqrt{5}\,x^{3a-b}.y^{2+b}$$

a) 1 b) 2 c) -2 d) -3 e) 4

Resolución:

$$4\sqrt{5}\,x^{\boxed{3a-b}}.y^{\boxed{2+b}}$$

$\boxed{3a - b = 5}$ .... (1)

$\boxed{2 + b = 3} \Rightarrow \boxed{b = 1}$ .... (2)

Reemplazamos (2) en (1): $3a - 1 = 5 \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow \therefore \boxed{a = 2}$ ***Rpta. b***

3. Calcular el coeficiente del siguiente monomio, sabiendo que es de sétimo grado.

$$P(x, y) = -2a^3x^{2a-5}.\,y^4$$

a) -64 b) -182 c) -128 d) -124 e) -136

Resolución:

$\boxed{-2a^3}x^{2a-5}.\,y^4 \Rightarrow$ ***Por dato:*** $(2a - 5) + 4 = 7$

Coeficiente

$$2a - 1 = 7$$

$$2a = 8 \Rightarrow \therefore \boxed{a = 4}$$

Luego; hallamos el valor del coeficiente:

$\boxed{-2a^3} = -2(4)^3 = -2(64) = \boxed{-128}$ ***Rpta. c***

4. Calcular: $2a + b$; en el siguiente monomio, si además se sabe que:
G.R(x) = 13 ; GR(y) = 9 ; $P(x, y) = 23x^{3a-b}.\,y^{2b+5}$

a) 6 b) 8 c) 10 d) 12 e) 14

Resolución:

$\boxed{3a - b = 13}$ .... (1)

$\boxed{2b + 5 = 9} \Rightarrow 2b = 4 \Rightarrow \therefore \boxed{b = 2}$ .... (2)

$$23x^{\boxed{3a-b}}.y^{\boxed{2b+5}}$$

Reemplazamos **(2)** en **(1)**: $3a - 2 = 13 \Rightarrow 3a = 15 \Rightarrow \therefore \boxed{a = 5}$

Luego, calculamos el valor de: $2a + b$

$$2a + b = 2(5) + 2 = \boxed{12}$$ ***Rpta. d***

5. Encontrar el coeficiente del siguiente monomio, si: $G.R(x) = 6$; $G.R(y) = 8$.

$$Q(x, y) = -\frac{5}{4}a^2bx^{b-3a}.y^{5a-2}$$

a) -40 b) -60 c) -80 d) -30 e) -20

Resolución:

$\boxed{b - 3a = 6}$ .... (1)

$\boxed{5a - 2 = 8} \Rightarrow 5a = 10 \Rightarrow \therefore \boxed{a = 2}$ ..... (2)

$$Q(x, y) = \boxed{-\frac{5}{4}a^2b}x^{\boxed{b-3a}}.y^{\boxed{5a-2}}$$

Coeficiente

Reemplazamos **(2)** en **(1)**: $b - 3(2) = 6 \Rightarrow b - 6 = 6 \Rightarrow \therefore \boxed{b = 12}$..... (2)

Luego, hallamos el valor del coeficiente:

$$\boxed{-\frac{5}{4}a^2b} = -\frac{5}{4}(2)^2.12 = -\frac{5}{4}(4).12 = \boxed{-60}$$ ***Rpta. b***

6. Calcular el valor de: $a^2 + b^2$, si el monomio: $-5x^{2a+b}.y^{a+2b}$, es de grado 7 respecto a "x" y de G.A. = 12.

a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) 11

Resolución:

$\boxed{2a + b = 7} \Rightarrow \boxed{b = 7 - 2a}$ .... (1)

$(2a + b) + (a + 2b) = 12$

$$-5x^{\boxed{2a+b}}.y^{\boxed{a+2b}}$$

$3a + 3b = 12 \Rightarrow 3(a + b) = 12$

$\therefore \boxed{a + b = 4}$ .... (2)

Reemplazamos **(1)** en **(2)**: $a + (7 - 2a) = 4 \Rightarrow 7 - a = 4 \Rightarrow \therefore \boxed{3 = a}$

Reemplazamos el valor de $a = 3$, en **(1)**:

$$b = 7 - 2(3) \Rightarrow \therefore \boxed{b = 1}$$

Luego, hallamos el valor de: $a^2 - b^2 = 3^2 - 1^2 = \boxed{8}$ ***Rpta. c***

7. Determinar el valor de "K", de manera que la expresión:

$\sqrt[3]{x^{k-1}.\sqrt{x^{3k}}}$; sea de tercer grado.

a) 4 b) 3 c) 6 d) 8 e) 2

Resolución:

$$\sqrt[3]{x^{k-1}.\sqrt{x^{3k}}} = \sqrt[3]{x^{k-1}.x^{\frac{3k}{2}}}$$

$$= \sqrt[3]{x^{k-1+\frac{3k}{2}}}$$

$$= \sqrt[3]{x^{\left(\frac{2k-2+3k}{2}\right)}} = x^{\frac{\left(\frac{5k-2}{2}\right)}{3}} = x^{\frac{5k-2}{6}}$$

Recuerda que:

* $\sqrt[n]{A^m} = A^{m/n}$
* $A^n.A^m = A^{n+m}$

Luego; a la expresión: $\frac{5k-2}{6}$; lo igualamos a 3, por ser de tercer grado.

$$\frac{5k-2}{6} = 3 \Rightarrow 5k-2 = 18 \Rightarrow 5k = 20 \Rightarrow \therefore \boxed{k=4}$$ ***Rpta. a***

8. ¿Cuál es el G.A. del polinomio: $P(x, y) = 5x^{m+3} - 8x^m y^{2n} + 6y^{3n+4}$?

Si: $G.R._x = 7$; $G.R_y = 13$

a) 5 b) 7 c) 10 d) 13 e) 15

Resolución:

Del dato: $G.R_x = 7 \Rightarrow m+3 = 7 \Rightarrow \therefore \boxed{m=4}$

Además: $G.R_y = 13 \Rightarrow 3n+4 = 13 \Rightarrow 3n = 9 \Rightarrow \therefore \boxed{n=3}$

Reemplazamos los valores de m y n, en el polinomio, se tiene:

$$P(x, y) = 5x^{4+3} - 8x^4y^{2(3)} + 6\,y^{3(3)+4}$$

$$P(x, y) = 5x^7 - 8x^4y^6 + 6y^{13}$$

- $6y^{13}$: **monomio de grado 13.**
- $8x^4y^6$: **monomio de grado 10.**
- $5x^7$: **monomio de grado 7.**

$\therefore$ El Grado Absoluto del polimonio es: 13 ***Rpta. d***

9. Hallar: "2m - n" si el polinomio es de grado 4 respecto a "x" y de grado 3 respecto a "y".

$$P(x, y) = 6x^{m-3} + \sqrt{3}x^{m-4}y^{n-5} + \frac{2}{7}x^{m-6}y^{n-4}$$

a) 6 b) 7 c) 14 d) 21 e) 28

Resolución:

De acuerdo al polinomio:

- El Grado con respecto a "x": $\boxed{m-3} > m - 4 > m - 6$

Donde:

Por dato: $\boxed{m-3} = 4 \Rightarrow \boxed{m = 7}$

- El Grado con respecto a "y": $\boxed{n-4} > n - 5$

Donde:

Por dato: $\boxed{n-4} = 3 \Rightarrow \boxed{n = 7}$

Luego, hallamos el valor de "2m - n":

$$2m - n = 2(7) - 7 = \boxed{7}$$ ***Rpta. c***

10. El polinomio: $P(x, y) = 3a^2x^{a-1}y^7 + 7ax^{a-3}y^6 - 2a^3x^ay^9$. Tiene por G.A. = 15, hallar la suma de sus coeficientes.

a) -362 b) 260 c) -282 d) 436 e) -128

Resolución:

$$P(x, y) = 3a^2x^{a-1}y^7 + 7ax^{a-3}y^6 - 2a^3x^ay^9$$

Monomio de grado: $\boxed{a + 9}$

Monomio de grado: $(a - 3) + 6 = \boxed{a + 3}$

Monomio de grado: $(a - 1) + 7 = \boxed{a + 6}$

Donde: El G.A. del polinomio P(x, y) es: a + 9

Por dato: $\boxed{a + 9} = 15 \Rightarrow \therefore \boxed{a = 6}$

Luego; calculamos la suma de los coeficientes del polinomio:

$$\Sigma \text{ de coeficientes} = 3a^2 + 7a - 2a^3$$

$$= 3(6)^2 + 7(6) - 2(6)^3$$

$$= 3(36) + 42 - 2(216) = 108 + 42 - 432$$

$$\therefore \boxed{\Sigma \text{ de coeficientes} = -282}$$ ***Rpta. c***

11. Hallar: "ab", sabiendo que: $P(x, y) = 3x^{a-2b}y^{a+b} + 5x^by^{a+2b} - 8x^{a-b}y^8$ es un polinomio homogéneo:

a) 12 b) 10 c) 8 d) 16 e) 24

Resolución:

$P(x, y) = 3x^{a-2b}y^{a+b} + 5x^{b}y^{a+2b} - 8x^{a-b}y^{8}$

Grado del monomio: $\boxed{a - b + 8}$

Grado del monomio: $b + (a + 2b) = \boxed{3b + a}$

Grado del monomio: $(a - 2b) + (a + b) = \boxed{2a - b}$

* Como el polinomio es homogéneo: $\underbrace{a - b + 8 = 3b + a}_{①} = \underbrace{2a - b}_{②}$

• **De la expresión ①:**	• **De la expresión ②:**
$a - b + 8 = 3b + a$	$3b + a = 2a - b$
$8 = 4b \Rightarrow \therefore \boxed{b = 2}$	$4b = a \Rightarrow 4(2) = a \Rightarrow \therefore \boxed{8 = a}$

Luego; calculamos el valor de "ab"

$\therefore \boxed{ab = 8.2 = 16}$ ***Rpta. d***

12. Sabiendo que: $3(x^2 + 1) - 2(x + 3) + 8 \equiv Ax^2 + Bx + C$; Calcular: "A + B + C"

a) 4 b) 6 c) 5 d) 7 e) 8

Resolución:

Primer Método:

$$3(x^2 + 1) - 2(x + 3) + 8 \equiv Ax^2 + Bx + C$$

$$3x^2 + 3 - 2x - 6 + 8 \equiv Ax^2 + Bx + C$$

$$3x^2 - 2x + 5 \equiv Ax^2 + Bx + C$$

Donde: $\boxed{A = 3}$; $\boxed{B = -2}$ y $\boxed{C = 5}$

Luego: $A + B + C = 3 + (-2) + 5$ ➧ $\therefore \boxed{A + B + C = 6}$ ***Rpta. b***

Segundo Método:

$$\boxed{3(x^2 + 1) - 2(x + 3) + 8 \equiv Ax^2 + Bx + C}$$

• ***Para:*** $\boxed{x = 0} \Rightarrow 3(0^2 + 1) - 2(0 + 3) + 8 \equiv A(0)^2 + B(0) + C$

$$3 - 6 + 8 = C \Rightarrow \therefore \boxed{C = 5}$$

- **Para:** $x = -3$ $\Rightarrow$ $3[(-3)^2 + 1)] - 2[-3 + 3] + 8 \equiv A(-3)^2 + B(-3) + C$

$$3(9 + 1) - 2(0) + 8 = 9A - 3B + 5$$

$$38 = 9A - 3B + 5 \Rightarrow \boxed{33 = 9A - 3B} \;\text{......}\; (I)$$

- **Para:** $x = 1$ $\Rightarrow$ $3[1^2 + 1] - 2[1 + 3] + 8 \equiv A(1)^2 + B(1) + C$

$$6 - 8 + 8 = A + B + 5$$

$$1 = A + B \Rightarrow \boxed{1 - B = A} \;\text{......}\; (II)$$

Reemplazamos (II) en (I): $33 = 9(1 - B) - 3B$

$$33 = 9 - 9B - 3B \Rightarrow 24 = -12B \Rightarrow \therefore \boxed{-2 = B}$$

Reemplazamos el valor de $B = -2$; en (II): $1 - (-2) = A \Rightarrow \therefore \boxed{3 = A}$

Luego : $A + B + C = 3 + (-2) + 5 \Rightarrow \therefore \boxed{A + B + C = 6}$ ***Rpta. b***



TALLER DE EJERCICIOS Nº 19



1. Escribir **Si** o **No**, según corresponda en cada casillero.

Expresión Algebraica	Es un polinomio?	Expresion Algebraica	Es un polinomio?
$2x^3 - 5x^2 + x + 4$		$\sqrt{x^2} + 2x^2 + 3x + 8$	
$x^2 - 5xy^2 + y$		$x^{2/3} - 5x^{1/3} - 2$	
$x + \frac{1}{x} + x^2 - 1$		$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + x + y$	
$\sqrt{2}x^3 - 5x^2 - 2x$		$ax^4 + bx^3 + cx^2 + d$	
$x^{-2} + x^{-1} + 3$	No	$\frac{x^6 + x^3}{x^3} + 5x + 2$	
$5x^4 + 3x^2 + 6x + 1$		$2x^3 + \sqrt{3}x + 5xy + y^2$	
$\frac{x^3 + 3x^2 + x}{x^3}$		$4xy^2 - 3x^2y + x^3$	

Expresión Algebraica	Es un polinomio?	Expresion Algebraica	Es un polinomio?
$0,5x^3 - 0,2x + 3$	Si	$\sqrt[3]{x^6} - \sqrt{x^4} + 8x^2 - 7$	
$2x^2y^2 - 3xy + x$		$3\sqrt{x} + 2\sqrt{x^3} + 16$	
$x^2 - x^2y + x + y$		$\frac{x^4}{x^{-2}} + \frac{x^2}{x^{-1}} + 6x + 4$	

2. Halla:

i) El Grado Relativo de cada polinomio; respecto a la variable "x"

ii) Halla el Grado Absoluto de cada polinomio.

a) $3x^6 + 6x^4 + 3x^2 + 5$

b) $2xy^3 + \frac{5}{2}x^2y^3 + 4x^4y - 2$

c) $-3ax^2y - 8axy^3 + 16x^3y^2$

d) $9bx^3y^4 - 7b^3x^2y^3 + 2x^4y^3$

e) $\sqrt{2}x^3y^2z - x^4y^3z^2 + 8$

f) $-8x^3yz + 6x^4yz^6 - x^2y^3z^4$

g) $\frac{3}{4}x^6y^3z^2 + \frac{1}{2}x^3y^4z - x^4y^2z^3$

h) $2x^ay^b - 6x^{2a+1}y^{b-2} + 3x^{2a+1}y^{b+1}$

j) $\frac{\sqrt{3}}{2}x^{a-1}y^{a+2} + 4x^{a+2}y^{2a-1} + x^{a-3}y^{a-4}$

k) $9xyz^a - 7x^ayz^2 - 3xy^az^4 + 6$

3. Ordena, respecto a "x" cada polinomio siguiente:

• En forma creciente:

a) $5x^4 - 2x^2 + x^6 + 3x + 9$

b) $12x^2y^3 + x^4y^4 + 6x^5y^6 - 5xy^2 + 1$

c) $-0,6x^6y + 0,2xy^2 + 6x^3y + 8$

d) $-x^5 + x^2 - x^4 + x + 6$

e) $\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}x^6 - 5x^5 + x^2 + 2$

• En forma Decreciente:

a) $3x^2 + 7x - x^6 + 18x^4 - 9$

b) $2ax^3 + 6ax^5 - 3x^2 + 2ab$

c) $x^6y - x + 7 - 3x^2y^3 + x^7y$

d) $\sqrt{2}x^3yz^3 + \sqrt{3}x^2y^2z - x^5yz^4 + 5$

e) $\frac{2}{7}x^3yz^8 + \frac{1}{5}xy^3z^6 + x^5yz^3 - x^2$

4. Dado los siguientes polinomios: **ordénalos** y **complétalos** respecto a la variable "x".

• En forma creciente:

a) $6x^2 + 2x^3 - 10$

b) $3x^4 - x + 6 + 5x^3$

c) $4x^5y + 6x^2y^3 - 2x + 8$

• En forma Decreciente:

a) $2x^5 - 3x^3 + 16 - 5x$

b) $10x^7 - x^2 + 8ax^5 + 5x^4 + 2$

c) $2x^6 + x^5 - \frac{1}{3}x^2y$

d) $0,5xy^2 - 0,4x^4y + 11$	d) $-ax^3y + 5xy^6 + 6x^4y^5 + x$
e) $\frac{2}{3}x^4y + 5x^6y^2 - 3x^2y^3 + 6$	e) $-x^2 + 13 + 9x^4 = x^8$

5. Completa la siguiente tabla:

Polinomio	Σ de coeficientes = P(1)	Término independiente = P(0)
$P(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 3$	$P(x) = 1^4 + 2(1)^3 + 1^2 + 3 = 7$	
$P(y) = 5y^3 - 3y^2 + 8y + 5$		$P(0) = 5(0)^3 - 3(0)^2 + 8(0) + 5 = 5$
$Q(x) = 3x^6 + 5x^4 - 2x$		
$R(z) = \frac{1}{3}z^2 + \frac{1}{6}z + \frac{1}{2}$		
$M(x) = 5x^4 - 2x^5 + x^3 - 6x + 10$		
$F(y) = \sqrt{2}y^4 - 2\sqrt{2}y^2 + 6\sqrt{2}y - \sqrt{2}$		

6. Sabiendo que: a = -2 ; b = 2 ; c = -1 ; d = 3 ; x = 1/2 ; y = -2/3

Halla el valor numérico de las expresiones siguientes:

a) $A = 2a + b^2 - 3c$	$H = \sqrt[b]{4a^2d^4} - \frac{bcd}{3} + \frac{ab}{4}$
b) $B = 5c^2 + 2d + 5a$	$P = (a + b + c)^{20} - (b - c - d)^{50} + bx^{-2}$
c) $C = 3ab - 2cd$	$Q = 8x^2 - 27x^3 + \sqrt[3]{9d.(-2ab)}$
d) $D = 6x - 3y + 12xy$	$R = x^2 - 3c^2 - 2a^3 + dxy$
e) $E = abc^2 - b^3cd$	$S = a^4 - b^4 + c^4 - 2d^2 + 4x^2 - 9y^2$
f) $F = a^2 + b^2 + c^2 - abc$	$M = \frac{abcd}{12} + \sqrt{(ab)^2 + d^2} - 6cdx$
g) $G = \frac{a + b + 3c}{2a} + \frac{5c + d}{3}$	$T = \sqrt[d]{d + 6abc} + 24(x + y)$

7. Halla el valor numérico de las expresiones siguientes:

a) Si: $P(x) = x^2 + 3x + 2$ Halla: P(2)	g) Si: $P(x ; y) = 3x^2 - 5xy + 2y^2$ Halla: P(2; 3)
b) Si: $P(x) = 2x^2 - x + 1$ Halla: P(1)	h) Si: $S(x ; y) = x^4 - 3y^2 + (xy)^2$ Halla: $S(\sqrt{2} ; \sqrt{3})$

c) Si: $P(x)$; $x^3 - 2x^2 + 3$

Halla: $P(-2)$

d) Si: $Q(x) = 5x^2 - 3x - 6$

Halla: $Q(-3)$

e) Si: $M(x) = (x - 1)(x^2 + 1)$

Halla: $M(3)$

f) Si: $R(x) = \dfrac{x^3 + 2}{x - 1}$

Halla: $R(2)$

i) Si: $R(x) = \dfrac{1}{2}x^4 - x^2 + 3x + 5$

Halla: $R(-2)$

j) Si: $P(x) = \dfrac{1}{x} + x$

Halla: $P(1/2)$

k) Si: $F(x ; y) = (x^2 + y^2)(xy)(2\sqrt{3})$

Halla: $F(-2 ; \sqrt{3})$

l) $M(x ; y ; z) = x + y^2 + 3z - x^2$

Halla: $M(2 ; -3 ; 5)$

Ejemplo 1: Si: $P(x , y) = 6x^3 - 2xy^2 + 3$

Halla: $P(2 ; -2)$

Resolución:

$$P(x ; y) = 6x^3 - 2xy^2 + 3$$

$$P(2 ; -2) = 6(2)^3 - 2(2)(-2)^2 + 3$$

$$= 6(8) - 2(2)(4) + 3$$

$$= 48 - 16 + 3$$

$\therefore$ $\boxed{P(2 ; -2) = 35}$

Ejemplo 1: Si: $Q(x , y) = 2x + 3y^2$

Halla: $Q(-3 ; 4)$

Resolución:

$$Q(x ; y) = 2x + 3y^2$$

$$Q(-3 ; 4) = 2(-3) + 3(4)^2$$

$$= -6 + 3(16)$$

$$= -6 + 48$$

$\therefore$ $\boxed{Q(-3; 4) = 42}$

RESPUESTAS TALLER

⑥		⑦	
a) A = 3	H = 37	a) P(2) = 12	g) P(2;3) = 0
b) B = 1	P = 9	b) P(1) = 2	h) $h(\sqrt{2} ; \sqrt{3}) = 1$
c) C = -6	Q = 16	c) P(-2) = -13	i) R(-2) = 3
d) D = 1	R = 49/4	d) Q(-3) =48	j) P(1/2) = 5/3
e) E = 20	S = -20	e) M(3) = 20	k) $F(-2 ; \sqrt{3}) = -84$
f) F = 5	M = 15	f) R(x) = 10	l) M(2 ; -3,5) = 22
g) G = 1/12	T = -1		



EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

NIVEL I

Ejercicio 1: Hallar «m» si el siguiente monomio es de segundo grado:

$$-5^3 \sqrt{3}\ x^{m-4}$$

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

Ejercicio 2: Calcular «a» si el término: $0,85x^{3a}y^2$ es de grado 11.

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

Ejercicio 3: Calcular el coeficiente del siguiente monomio, sabiendo que es de octavo grado.

$$M(x;y) = 15a^2 x^{a+1} y^2$$

A) 375 B) 225 C) 175 D) 155 E) 215

Ejercicio 4: Obtener: «m . n»; si se sabe que el siguiente monomio es de noveno grado respecto a «y», y de sexto grado respecto a «x».

$$-\frac{1}{4}\sqrt{2}\ x^{m+1}y^{n+7}$$

A) 10 B) 14 C) 21 D) 3 E) 8

Ejercicio 5: Proporcionar «m» si el siguiente polinomio es de grado absoluto igual a 10.

$$P(x) = 5 + 8x^{m\,4} - 6x^{m+3}$$

A) 7 B) 4 C) 6 D) 3 E) 5

Ejercicio 6: Hallar «p» en:

$5x^{p-2}\ y^{2p-1}\ z^{3p-12}$ de modo que su grado sea: $5p - 6$

A) 8 B) 9 C) 7 D) 10 E) 11

Ejercicio 7: Hallar: (m + n) si el polinomio adjunto es el grado 8 respecto a «y» y de tener grado respecto a «x»:

$$P(x,y) = -5x^{m-2} + 2x^m y^{n-3} - \frac{1}{5}x^{m+1}y^{n-2}$$

A) 9 B) 12 C) 11 D) 17 E) 15

Ejercicio 8: Calcular el valor de «a», si el término algebráico: $3x^{2a-1}y^6$ es de grado 15.

A) 4 B) 5 C) 3 D) 6 E) 8

Ejercicio 9: Determinar el valor de «K», de manera que la expresión:

$$\sqrt{x^{K-1}\cdot\sqrt[3]{x^{2K}}}$$; es de segundo grado.

A) 2 B) 3 C) 5 D) 4 E) 6

Ejercicio 10: La expresión:

$$E = \frac{\left(x^5+3\right)\left(x^2-2\right)}{\left(x^2-1\right)\left(x^4\right)}$$; es de grado:

A) 1 B) 2 C) Cero D) 3 E) 6

Ejercicio 11: Si: $P(x) = 2x^2 + \frac{3}{5}x^3 + \frac{1}{3}$

Calcular: P (-1/2)

A) 7/20 B) 91/120 C) 11/120
D) 97/120 E) N.A.

Ejercicio 12 : Si: $P(x) = 5x^2 + 7x - 12$
Calcular: $[P(-1)]^{P(1)}$

A) 1 B) - 1 C) 2 D) - 2 E) 0

Ejercicio 13 : Si: $P(x) = x^2 - 3x + 1$;

Calcular: $E = \dfrac{P(-2) + P(-1)}{P(4) - P(3)}$

A) - 2 B) 2 C) 1 D) 0 E) 4

Ejercicio 14 : P(2) = 4; determinar el valor de «m» si:

$$P(x) = (m - 1)x^2 + mx + m + 1$$

A) - 1 B) - 2 C) 1 D) 1/2 E) 2

Ejercicio 15 : Si:

$$5(x - 6) \equiv a(x - 3) - b(x + 2)$$

Hallar: «a + b»

A) 11 B) 13 C) 10 D) 12 E) N.A.

Ejercicio 16 : Si:

$$x^2 + 3x + 1 \equiv A(x^2 + 1) - B(x - 2) + C$$

Hallar: «A + B + C»

A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 14

Clave de Respuestas

1. A	2. C	3. A	4. A
5. B	6. B	7. B	8. B
9. B	10. A	11. B	12. A
13. E	14. C	15. A	16. C

NIVEL II

Ejercicio 1: Hallar el grado de:

$$P(x) = 6x^5 \cdot \sqrt[5]{x^8 \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x^8}}}$$

A) 3 B) 2 C) 5 D) 8 E) 7

Ejercicio 2: Reducir:

$$\frac{\sqrt[6]{x} \cdot \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[3]{x}}{\sqrt[20]{x} \cdot \sqrt[5]{x}}$$

e indicar el exponente final de «x»

A) 5/8 B) 7/12 C) 3/4 D) 1/2 E) 1

Ejercicio 3: El valor de:

$(x - y)^2 \cdot (x + y)$, cuando: $x = -6$; $y = -2$; es:

A) 128 B) - 128 C) - 64
D) 512 E) Otro valor

Ejercicio 4: Si: $P(x) = x^2 - x^3$ entonces: P(-2) - P(-3); Vale:

A) - 4 B) 0 C) 12 D) 4 E) - 24

Ejercicio 5: En la expresión reducida de: $(ab^{-3}.c^3)^{1/2} \cdot (a^7.b^4.c^2)^{1/3} \cdot (a^{-5}.b.c)^{1/6}$
¿En cuánto excede el exponente de «c» al exponente de «a»?

A) 2/3 B) 1 C) 4/3 D) 1/3 E) 5/3

Ejercicio 6: Hallar: $\overline{mn}$, si el monomio:

$$M_{(x;y)} = 5^{m+n} \cdot x^{m+2n} \cdot y^{3m+2n}$$

es de G.A = 24 y G.R (x) = 8

A) 24 B) 32 C) 42 D) 35 E) 46

Ejercicio 7 : En el polinomio:

$P(x;y) = x^m y^{n-1} - 3x^{m+1}y^n + 5x^{m-2}y^{n+2} + 4x^{m+3}y^{n+1}$

El G.R (x) = 12 y G.A = 18. Hallar el grado relativo a «y».

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Ejercicio 8 : Si:

$$m(x-2) + n(x-3) = 5x + 7$$

Hallar: «m + n»

A) 3 B) 5 C) 9 D) 25 E)15

Ejercicio 9 : Hallar: «a.b» si:

$$13 - 2x = a(x+1) + b(2-x)$$

A) 3 B) 5 C) 9 D) 25 E) 15

Ejercicio 10 : Si: $a = -\frac{1}{2}$ y $b = -8$;

Hallar el valor de: $\frac{a^2}{b} + b$

A) - 8 B) -257/32 C) - 6
D) 1/32 E) - 10

Ejercicio 11 : Si: x = 2. ¿ Cuál de las siguientes expresiones vale 4 ?

A) $\frac{x-4}{3x}$ B) $\frac{4x}{x-2}$ C) $\frac{2x}{x-1}$

D) $\frac{3(x-2)}{2x}$ E) $\frac{2x^2}{3}$

Ejercicio 12 : Si: $P(x) = 2x + a$; $P(x-1) = 2x - 1$. Hallar el valor de la constante «a».

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Ejercicio 13 : Si: $Q(x+1) = 7x^2 - 2x + 5$
Hallar: $Q(x) - Q(-x)$

A) 0 B) 32x C) - 32x
D) - 32x + 28 E) N.A.

Ejercicio 14 : En el poligono homogéneo: $P(x;y) = x^{a-b}y^{b+4} + x^{2a}y^2$
El valor de «a» es:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Ejercicio 15 : Hallar el valor de «a», si se sabe que el siguiente monomio es de sétimo grado respecto a «x» y de quínto grado respecto a «y».

$$-28x^{5a-b}y^{b+2}$$

A) 2 B) 3 C) 4 D) - 2 E) - 5

Ejercicio 16 : Calcular el coeficiente del siguiente monomio, sabiendo que es de quínto grado $P(x;y) = 6a^2 x^{a-7} . y^{3a}$

A) 28 B) 54 C) 45 D) 36 E) 27

Ejercicio 17 : El coeficiente del monomio: $P(x;y) = 3mx^{8-m} . y^{m^{2m}}$; es igual al grado de «x». Hallar el grado relativo a «y».

A) 4 B) 8 C) 16 D) 256 E) 1024

Ejercicio 18 : El grado absoluto de: $P(x;y) = (m - n^2)x^m y^{2n}$, es 12; el grado relativo a «y» es 8. Hallar el coeficiente de P(x ; y).

A) 4 B) - 4 C) - 12 D) 8 E) Cero

Ejercicio 19 : Calcular el valor de: $b^2 - 3a$; si el monomio:

$3x^{a+b-2} \cdot y^{2b+a}$; es de grado 3 respecto a «x» y de G.A. = 11.

A) 4 B) - 3 C) 2 D) 3 E) 5

Ejercicio 20 : Encontrar el coeficiente del siguiente monomio; Si:

$$G.R_{(x)} = 10 \quad ; \quad G.R_{(y)} = 5.$$

$$Q_{(x;y)} = \frac{20}{3}\left(\frac{a}{b}\right)x^{2a+b}y^{3a-4}$$

A) 10 B) 5 C) 8 D) 10/3 E) 5/2

Ejercicio 21 : ¿ Cuál es el G.A. del polonomio:

$$P(x;y) = 7x^{2m-3} - 3x^{2m-1}y^{3n} - y^{3n+2}?$$

Si: $G.R_{(x)} = 11$; $G.R_{(y)} = 17$.

A) 18 B) 21 C) 23 D) 26 E) 28

Ejercicio 22 : Hallar: "$m + n^2$" si el polinomio es de grado 9 respecto a "x" y de grado 6 respecto a "y" .

$$P_{(x;y)} = 4x^{2m+1} + 2x^{m-3}y^{n+2} - \sqrt{3}x^{m+4}y^{n-3}$$

A) 16 B) 18 C) 20 D) 24 E) N.A.

Ejercicio 23 : El polinomio:

$P_{(x;y)} = 5a^3x^{a-3}y^6 - 3a^2x^{a-4}y^9 - ax^ay^7$ tiene por G.A = 9; Hallar la suma de sus coeficientes.

A) 18 B) 22 C) 24 D) 26 E) N.A.

Ejercicio 24 : Hallar: $a^2 - b^3$, sabiendo que:

$$P_{(x;y)} = 7x^{2a-3b}y^{a+5} + 3x^{2b}y^{a-4} - 14x^{3a+b}y^b$$

es un polinomio homogéneo.

A) 2 B) 3 C) - 3 D) 4 E) - 2

Ejercicio 25 : Si: $P_{(x)} = 2x^2 - x + 1$ Hallar el valor de:

$$M = \frac{P_{(3)} + P_{(-3)} + P_{(2)}}{P_{(-2)} + P_{(-1)}}$$

A) 2 B) 3 C) 5 D) 7 E) 4

Ejercicio 26 : Calcular: $P_{[P(0)]}$;

Si: $P_{(x)} = x^2 - x + 1$

A) - 2 B) 2 C) 1 D) 0 E) - 1

Ejercicio 27 : Si: $P_{(x+2)} = 7x$; Calcular $P_{(5)}$

A) 17 B) 19 C) 23 D) 21 E) 25

Ejercicio 28 : Si: $F_{(x+7)} = 3x^3 + 2x^2 - 1$; Calcular: $F_{(5)}$

A) - 11 B) 17 C) 12 D) - 17 E) 15

Clave de Respuestas

1. E	2. D	3. B	4. E
5. D	6. C	7. C	8. B
9. E	10. B	11. C	12. A
13. C	14. B	15. A	16. B
17. C	18. C	19. D	20. B
21. D	22. C	23. D	24. B
25. B	26. C	27. D	28. D



EJERCICIOS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA

Organizados por las Academías:

César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa.

1. De las siguientes expresiones algebraicas:

I) $3x^2 + 2x + 5$ II) $5x^{-2} + 3x^{-1} + 1$ III) $3x^{2/3} + 2x - 1$ IV) $4x^2 + 2xy + y^2$

¿Cuántos son polinomios?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 4 e) 5

Resolución:



Recuerda que:

Polinomio es la expresión algebraica de dos o más términos, siendo los exponentes de sus variables enteros positivos.

I)	$3x^2 + 2x + 5$	$\Rightarrow$	**Si es un polinomio**, porque los exponentes de la variables "x" son enteros positivos.
II)	$5x^{-2} + 3x^{-1} + 1$	$\Rightarrow$	**No es un polinomio**, porque los exponentes de la variable "x" son enteros negativos.
III)	$3x^{2/3} + 2x - 1$	$\Rightarrow$	**No es un polinomio**, porque uno de los exponentes de la variable "x", no es entero positivo.
IV)	$4x^2 + 2xy + y^2$	$\Rightarrow$	**Si es un polinomio**, porque los exponentes de las variables "x" e "y" son números enteros positivos.

Rpta. c

2. Después de simplificar:

$\dfrac{\sqrt[9]{x^{17}.y^{22}}}{\sqrt[3]{x^2y.\sqrt[3]{x^2y}}}$; se observa que el Grado Absoluto de la expresión es:

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

Resolución:

• En primer lugar reducimos la expresión dada; de la manera siguiente:

$$\frac{\sqrt[9]{x^{17}.y^{22}}}{\sqrt[3]{x^2y.\sqrt[3]{x^2y}}} = \frac{\sqrt[9]{x^{17}.y^{22}}}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{x^2y.(x^2y)^3}}} = \frac{\sqrt[9]{x^{17}.y^{22}}}{\sqrt[9]{x^2y.x^6y^3}} = \frac{\sqrt[9]{x^{17}.y^{22}}}{\sqrt[9]{x^8.y^4}}$$

$$\frac{\sqrt[9]{x^{17}.y^{22}}}{\sqrt[3]{x^2y.\sqrt[3]{x^2y}}}=\sqrt[9]{\frac{x^{17}}{x^8}.\frac{y^{22}}{y^4}}$$

$$=\sqrt[9]{x^9.y^{18}}$$

$$=x^{\frac{9}{9}}.y^{\frac{18}{9}}$$

$$=\boxed{x^1y^2}$$

Recuerda que:

- $a.\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{b.a^n}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{A}}=\sqrt[n.m]{A}$
- $A^n.A^m=A^{n+m}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}=\sqrt[n]{\dfrac{A}{B}}$
- $\dfrac{A^n}{A^m}=A^{n-m}$

Luego, el grado absoluto de esta última expresión es: $\boxed{1+2=3}$ ***Rpta. a***

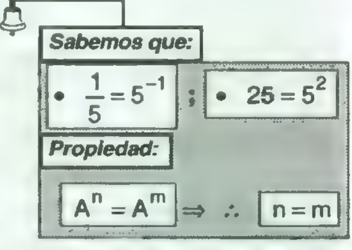
3. Si se cumple que:

$$25^{-8^{-x^{-2^{-1}}}}=\frac{1}{5}\text{ ; el valor "x" es:}$$

a) 1 b) 3 c) 9 d) 2 e) 4

Resolución:

En primer lugar, reducimos la expresión del primer miembro, empezando de abajo hacia arriba, veamos:

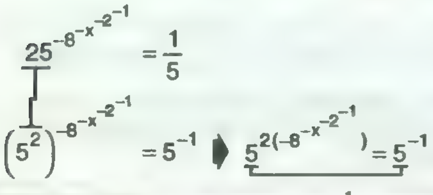


Sabemos que:

- $\dfrac{1}{5}=5^{-1}$; • $25=5^2$

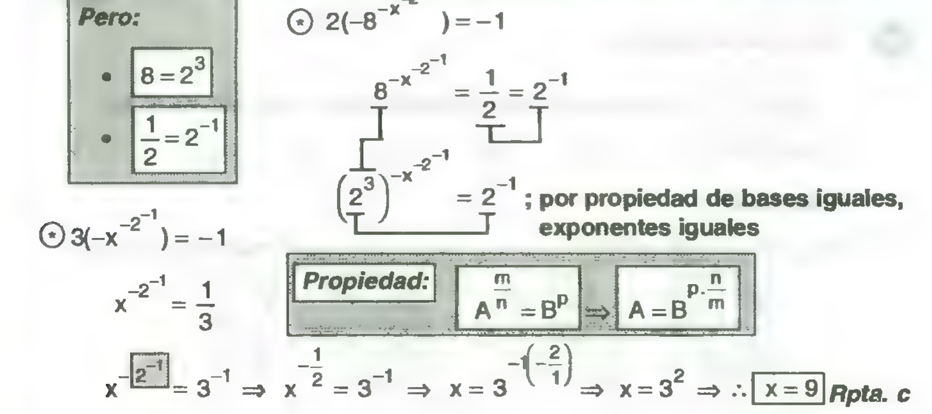
Propiedad:

$A^n=A^m \Rightarrow \therefore\ n=m$



$$25^{-8^{-x^{-2^{-1}}}}=\frac{1}{5}$$

$$\left(5^2\right)^{-8^{-x^{-2^{-1}}}}=5^{-1} \;\blacktriangleright\; 5^{2\left(-8^{-x^{-2^{-1}}}\right)}=5^{-1}$$; **por propiedad de bases iguales, exponentes iguales**



Pero:

- $8=2^3$
- $\dfrac{1}{2}=2^{-1}$

(*) $2\left(-8^{-x^{-2^{-1}}}\right)=-1$

$$8^{-x^{-2^{-1}}}=\frac{1}{2}=2^{-1}$$

$$\left(2^3\right)^{-x^{-2^{-1}}}=2^{-1}$$; **por propiedad de bases iguales, exponentes iguales**

(*) $3\left(-x^{-2^{-1}}\right)=-1$

$$x^{-2^{-1}}=\frac{1}{3}$$

Propiedad: $A^{\frac{m}{n}}=B^p \Rightarrow A=B^{p.\frac{n}{m}}$

$$x^{-\boxed{2^{-1}}}=3^{-1}\Rightarrow x^{-\frac{1}{2}}=3^{-1}\Rightarrow x=3^{-1\left(-\frac{2}{1}\right)}\Rightarrow x=3^2\Rightarrow\therefore\ \boxed{x=9}$$ ***Rpta. c***

4. Si: $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + 3x + 15$; $F(x) = 4x^3 - 5x^2 + 6$

Además: $E = \dfrac{F(-3) + F(2)}{F(-1) - F(-2)}$; Calcular: P(E)

a) -1 b) -2 c) -3 d) -4 e) -5

Resolución:

De la expresión: $F(x) = 4x^3 - 5x^2 + 6$

Calculamos: $F(-3) = 4(-3)^3 - 5(-3)^2 + 6 = 4(-27) - 5(9) + 6 = -147$

$F(2) = 4(2)^3 - 5(2)^2 + 6 = 4(8) - 5(4) + 6 = 18$

$F(-1) = 4(-1)^3 - 5(-1)^2 + 6 = 4(-1) - 5(1) + 6 = -3$

$F(-2) = 4(-2)^3 - 5(-2)^2 + 6 = 4(-8) - 5(4) + 6 = -46$

Luego, los valores hallados, los reemplazamos en la expresión "E", obteniendo:

$$E = \frac{(-147) + (18)}{(-3) - (-46)} = \frac{-129}{43} = -3 \Rightarrow \therefore \boxed{E = -3}$$

* De la expresión: $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + 3x + 15$

Calculamos: $P(E) = 2(E)^3 + 5(E)^2 + 3(E) + 15$

Pero: $\boxed{E = -3} \Rightarrow P(-3) = 2(-3)^3 + 5(-3)^2 + 3(-3) + 15$

$P(-3) = 2(-27) + 5(9) - 9 + 15 = -54 + 45 + 6 = -3$

$\therefore \boxed{P(-3) = P(E) = -3}$ ***Rpta. c***



5. Sabiendo que: $3^x - 3^{x-2} = 216$

Calcular el valor de: $\sqrt[x-1]{x^2 - 9}$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Resolución:

Aplicando la propiedad: $\boxed{A^{m-n} = \dfrac{A^m}{A^n}}$; obtenemos:

$$3^x - \frac{3^x}{3^2} = 216 \Rightarrow 3^x - \frac{3^x}{9} = 216 \Rightarrow 9.3^x - 3^x = 216.9$$

$$8\left(3^x\right) = 216.9$$

$$3^x = 27.9 \Rightarrow 3^x = 3^5$$

$$\therefore \boxed{x = 5}$$

Pero:

- $27.9 = 3^3.3^2$

$27.9 = 3^{3+2} = 3^5 \Rightarrow \therefore \boxed{27.9 = 3^5}$

Luego, el valor de: $\boxed{x=5}$, lo reemplazamos en la expresión incógnita; osea:

$$\sqrt[x-1]{x^2-9}=\sqrt[5-1]{5^2-9}=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=\boxed{2}$$ ***Rpta. b***

6. En el monomio M (x, y, z) se cumple:

GR(x) + GR(y) = 12 ; GR(x) + GR(z) = 19

GR(y) + GR(z) = 15 ; (GR → Significa Grado Relativo)

Calcular el grado absoluto de M(x, y, z).

a) 20 b) 21 c) 22 d) 28 e) 24

Resolución:

$$\left.\begin{array}{l} GR(x)+GR(y)=12 \\ GR(y)+GR(z)=15 \\ GR(x)+GR(z)=19 \end{array}\right\}$$ ***(Sumamos miembro a miembro)***

Σ **M.A.M:** $2GR(x)+2GR(y)+2GR(z)=12+15+19$

$$2(GR(x)+GR(y)+GR(z))=46$$

$$GR(x)+GR(y)+GR(z)=23$$

$\boxed{\text{Grado Absoluto de M (x, y, z)} = 23}$ ***Rpta. d***



7. Si se cumple: $ax^{a+b}y^{a-b}+ax^9y^{a-b}=cx^{a+b}y^3$. Calcular: abc

a) 18 b) 12 c) 36 d) 144 e) 216

Resolución:

• En primer lugar, debe cumplirse que:

$[(a+b)+(a-b)]=[9+(a-b)]=[(a+b)+3]$ ➧ **Grado de Homogeneidad de cada monomio.**

$$2a=a-b+9=a+b+3$$

(① relaciona $2a$ con $a+b+3$; ② relaciona $a-b+9$ con $a+b+3$)

De la expresión ②: $a-b+9=a+b+3 \Rightarrow 6=2b \Rightarrow \therefore \boxed{b=3}$

De la expresión ①: $2a=a+b+3 \Rightarrow a=b+3 \Rightarrow a=3+3 \Rightarrow \therefore \boxed{a=6}$

• En segundo lugar, reemplazamos los valores de a y b en la expresión inicial, obteniendo:

$$6x^{6+3}y^{6-3} + 6x^{9}y^{6-3} = cx^{6+3}y^{3}$$
$$6x^{9}y^{3} + 6x^{9}y^{3} = 12x^{9}y^{3}$$

Por comparación: $c = 12$

Luego, hallamos el valor de: abc.

$\therefore$ $abc = 6.3.12 = 216$ ***Rpta. e***

3.2. Operaciones con monomios:

3.2.1. Adición de monomios:

La suma de dos o más monomios se halla sumando los monomios semejantes, cuyo coeficiente es la suma de sus coeficientes de los sumandos y como parte literal la misma de los sumandos.

Ejemplo 1: Sumar: $3x$ y $5x$

Resolución:

$$3x + 5x = (3 + 5)x = 8x$$

Ejemplo 2: $6xy^2$ y $2xy^2$

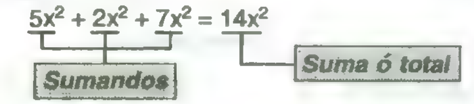
Resolución:

$$6xy^2 + 2xy^2 = (6 + 2)xy^2 = 8xy^2$$

Términos de una Adición:

a) En toda adición existen dos o más sumandos.
b) El resultado de la adición se llama suma o total.

Ejemplo: $5x^2 + 2x^2 + 7x^2 = 14x^2$



- Para sumar dos o más términos se requiere que los términos sean semejantes **por ejemplo:** $4xy + 2xy = 6xy$

- Si han de sumarse dos o más términos que no son semejantes, se indica la suma de ellos. **Por ejemplo:** Sumar: $3x$ con $5y = 3x + 5y$.

- Ahora veamos algunos ejemplos de **Adición de Monomios.**

Ejemplo 1: Sumar los siguientes monomios: $4x$; $7x$ y $3x$

Resolución:

$$4x + 7x + 3x = (4 + 7 + 3)x = 14x$$

Ejemplo 2: Sumar los siguientes monomios: $3ax^3$; ax^3 y $5ax^3$

Resolución:

$$3ax^3 + ax^3 + 5ax^3 = (3 + 1 + 5)ax^3 = \boxed{9ax^3}$$

Ejemplo 3: Sumar los siguientes monomios: $8xy^2$; $-5xy^2$; $3xy^2$

Resolución:

$$8xy^2 + (-5xy^2) + 3xy^2 = 8xy^2 - 5xy^2 + 3xy^2$$

$$= (8 - 5 + 3)\,xy^2 = \boxed{6xy^2}$$

Ejemplo 4: Sumar los siguientes monomios: $-7x^3y$; $-3x^3y$; $-2x^3y$

Resolución:

$$(-7x^3y) + (-3x^3y) + (-2x^3y) = -7x^3y - 3x^3y - 2x^3y$$

$$= (-7 - 3 - 2)x^3y = \boxed{-12x^3y}$$

3.2.2. Sustracción de Monomios:

La diferencia de dos monomios semejantes, es un tercer monomio que tiene como coeficiente a la suma del coeficiente del monomio minuendo; más el opuesto del coeficiente del sustraendo, y como parte literal la misma de los monomios dados.

Ejemplo 1: Halla la diferencia de:

$$-7x^2y^3 \text{ y } 4x^2y^3$$

Resolución:

$= (-7x^2y^3) +$ **opuesto**$(4x^2y^3)$

$= -7x^2y^3 + (-4x^2y^3)$

$= -7x^2y^3 - 4x^2y^3$

$= \boxed{-11x^2y^3}$

Ejemplo 2: Halla la diferencia de:

$$11x^2y^4 \text{ y } -6x^2y^4$$

Resolución:

$= 11x^2y^4 +$ **opuesto**$(-6x^2y^4)$

$= 11x^2y^4 + (+6x^2y^4)$

$= 11x^2y^4 + 6x^2y^4$

$= \boxed{17x^2y^4}$

Términos de una sustracción: Toda sustracción consta de tres términos.

a) **El minuendo**, del cual se resta una cantidad
b) **El sustraendo**, que es la cantidad que ha de restarse, y
c) **La diferencia**, que es el resultado de la operación.

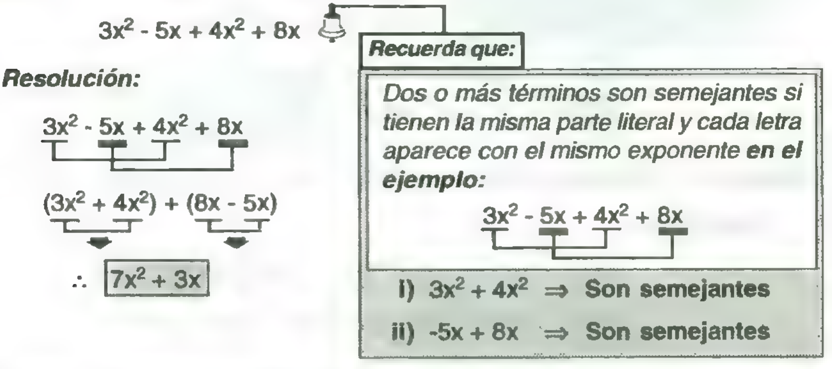
Osea: $8xy^3 - 5xy^3 = 3xy^3$

- $3xy^3$ — **Diferencia**
- $5xy^3$ — **Sustraendo**
- $8xy^3$ — **Minuendo**

3.2.3. Reducción de Términos Semejantes:

Se llama reducción o simplificación de términos semejantes a la adición y sustración directa de los términos semejantes que hubieran en un polinomio dado.

Ejemplo 1: Reducir los términos semejantes:



$$3x^2 - 5x + 4x^2 + 8x$$

Resolución:

$$3x^2 - 5x + 4x^2 + 8x$$

$$(3x^2 + 4x^2) + (8x - 5x)$$

$$\therefore \boxed{7x^2 + 3x}$$

Recuerda que:

Dos o más términos son semejantes si tienen la misma parte literal y cada letra aparece con el mismo exponente ***en el ejemplo:***

$$3x^2 - 5x + 4x^2 + 8x$$

i) $3x^2 + 4x^2 \Rightarrow$ **Son semejantes**

ii) $-5x + 8x \Rightarrow$ **Son semejantes**

Ejemplo 2: Simplificar el polinomio: $6x - 5y - 3x + 8y - x + 3y$

Resolución:

- Agrupamos los términos de la manera siguiente:

$$6x - 5y - 3x + 8y - x + 3y = (6x - 3x - x) + (8y + 3y - 5y)$$

$$= \boxed{2x + 6y}$$

Ejemplo 3: Simplifica el polinomio: $6{,}3ax - 5bx^2 + 2ax - 2{,}4bx^2$

Resolución:

- Agrupamos los términos de la manera siguiente:

$$6{,}3ax - 5bx^2 + 2ax - 2{,}4bx^2 = (6{,}3ax + 2ax) - 5bx^2 - 2{,}4bx^2$$

$$= (6{,}3 + 2)ax - (5 + 2{,}4)bx^2$$

$$= \boxed{8{,}3ax - 7{,}4bx^2}$$

Ejemplo 4: Simplificar el polinomio:

$$\frac{2}{3}x^2 - 5ax^3 + 4x^2 + \frac{3}{4}ax^3 + 8y^2 + 2ax^3 + 3x^2 - 2y^2$$

Resolución:

- Agrupamos los términos de la manera siguiente:

$$\frac{2}{3}x^2 - 5ax^3 + 4x^2 + \frac{3}{4}ax^3 + 8y^2 + 2ax^3 + 3x^2 - 2y^2$$

$$\left(\frac{2}{3}x^2 + 4x^2 + 3x^2\right) + \left(\frac{3}{4}ax^3 + 2ax^3 - 5ax^3\right) + (8y^2 - 2y^2)$$

$$\left(\frac{2}{3} + 4 + 3\right)x^2 + \left(\frac{3}{4} + 2 - 5\right)ax^3 + (8-2)y^2$$

$$\left(\frac{23}{3}\right)x^2 + \left(-\frac{9}{4}\right)ax^3 + 6y^2 = \boxed{\frac{23}{3}x^2 - \frac{9}{4}ax^3 + 6y^2}$$

Ejemplo 5: Simplificar el polinomio: $-7x^ny^3 + 3y^nx^3 + 6x^ny^3 - 5y^nx^3 + 4x^ny^3 - y^nx^3$

Resolución:

$$-7x^ny^3 + 3y^nx^3 + 6x^ny^3 - 5y^nx^3 + 4x^ny^3 - y^nx^3$$

$$(-7x^ny^3 + 6x^ny^3 + 4x^ny^3) + (3y^nx^3 - 5y^nx^3 - y^nx^3)$$

$$(-7 + 6 + 4)x^ny^3 + (3 - 5 - 1)y^nx^3$$

$$(3)x^ny^3 + (-3)y^nx^3 = \boxed{3x^ny^3 - 3y^nx^3}$$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 20

1. Halla el resultado de las siguientes operaciones con monomios.

a) $7x^2 + 3x^2 =$	d) $8ax^2 + 5ax^2 =$	g) $6x^2 - 10x^2 =$	j) $-8x^5 - (3/5)x^5 =$
b) $9xy + 6xy =$	e) $-9y^3 - 2y^3 =$	h) $(5/6)x^3 - (3/2)x^3 =$	k) $6ax^2 - 9{,}8ax^2 =$
c) $3xy^2 + 8xy^2 =$	f) $18x^4y^2 - 7x^4y^2 =$	i) $3xy^2 - (1/4)xy^2 =$	l) $6{,}2xy - (1/3)xy =$

2. Escribe en cada espacio libre el monomio que falta:

a) $5x + \square = 8x$	e) $-6x^3 - \square = -9x^3$	i) $-\frac{3}{8}x - \square = 2x$
b) $6y^2 + \square = 13y^2$	f) $\square - 5x^2 = -8x^2$	j) $\square + 0{,}8x^2 = 2{,}6x^2$
c) $\square + 3z^4 = 16z^4$	g) $-13x^4 - \square = 0$	k) $\frac{1}{2}xy^2 + \square = -3xy^2$
d) $\square - 7x^n = 8x^n$	h) $18xy^n - \square = 3xy^n$	l) $-4{,}3x^3 - \square = -6x^3$

3. Decir que terna de monomios (términos), son semejantes. Identificarlos y halla la suma de cada terna.

a) $3xy$	c) xyz^2	e) $6x^2y$	g) $-3x^2y$	i) $\frac{3}{5}xy$	k) $0{,}5xyz^2$
b) $5x^2y$	d) $\frac{1}{3}x^3y^2$	f) $-xy$	h) $-6xyz^2$	j) $\frac{2}{3}x^2y$	l) $-2x^2y$

Ejemplo: La terna: **(a)**, **(f)**, y **(i)** son semejantes por tener la misma parte literal.

4. Simplificar cada uno de los siguientes polinomios:

a) $6x^2 - 4x + 7x^2 - 11x =$

b) $9x^3 - y + 3y^2 - 2y^2 - 4y - x^3 =$

c) $3x + 6y - x - 3y + 7x =$

d) $4x^3 + 9x^2y - 2x^3 - 6x^2y =$

e) $6ax^2 - 2a^2x + 8a^2x - 5a^2x - ax^2 =$

f) $8xy - 3z^2 + 6xy - 2z^2 - 9xy =$

g) $10x^{m+1} - x^{m+2} - 5x^{m+1} - 3x^{m+2} =$

h) $\sqrt{5}x^4 - 6xy^3 - 2x^4 - xy^3 + 8xy^3 =$

i) $\frac{4}{5}x^6 - \frac{1}{3}x^5 + 7x^2 - x^6 + 2x^5 - x^2 =$

j) $0{,}7x^5 - 4{,}6x^4 + 2x^2 + 3x^5 - x^2 + 2{,}4x^4 =$

k) $2yz^3 - 0{,}9z^4 + 6z^4 - 0{,}4yz^3 =$

l) $\frac{5}{8}x^3y - \frac{1}{4}xy^2 + 6xy^2 - 6xy^2 + \frac{2}{3}x^3y =$

m) $15x^2 - 7y^2 + 8x^2 + 16xy - xy - 12y^2 - 10xy + 8y^2 =$

n) $-xy^2 + 40x^3y^2 - 16xy^2 + 11x^3y^2 + 8xy^2 - 19x^3y^2 =$

ñ) $8y^n - 5x^n - 10z^n + 15x^n + 20z^n - 16y^n - 15z^n + 48x^n - 14x^n + 12y^n =$

o) $16b^2y^3 - 24a^2x^3 + 40a^2x^3 + 30b^2y^3 - 25a^2x^3 - 18ab - 12a^2x^3 + 15ab - 46b^2y^3 =$

p) $10y^3 + 8x^3 - 7yx^2 + 15y^2x + 15y^2x - 18y^2x + 13y^3 + 20yx^2 - 30x^3 + 3y^2x =$

q) $\frac{2}{9}x^6 - \frac{1}{4}x^4 + 3x^2 - x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 3x^6 - \frac{2}{5}x^4 + 6x^2 - \frac{1}{9}x^6 =$

RESPUESTAS TALLER

(4)

a) $13x^2 - 15x$	f) $5xy - 5z^2$	k) $1{,}6yz^6 + 5{,}1z^4$
b) $8x^3 + y^2 - 5y$	g) $5x^{m+1} - 4x^{m+2}$	l) $-\frac{1}{24}x^2y + \frac{23}{4}xy^2$
c) $9x + 3y$	h) $(\sqrt{5} - 2)x^4 + xy^3$	m) $23x^2 - 11y^2 + 5xy$
d) $2x^3 + 3x^2y$	i) $-\frac{1}{5}x^6 + \frac{5}{3}x^5 + 6x^2$	n) $32x^3y^2 - 9xy^2$
e) $5ax^2 + a^2x$	j) $3{,}7x^5 - 2{,}2x^4 + x^2$	ñ) $4y^n + 44x^n - 5z^n$

o) $-21a^2x^3 - 3ab$ p) $23y^3 - 22x^3 + 13yx^2 + 15y^2x$

q) $\frac{28}{9}x^6 - \frac{29}{20}x^4 + \frac{17}{2}x^2$

3.2.4. Multiplicación de Monomios:

El Producto de dos monomios es otro monomio cuyo coeficiente es el producto de sus coeficientes y la parte literal es el producto de sus partes literales; y si los monomios tienen la misma parte literal es la letra común con un exponente igual a la suma de los exponentes de las letras.

Ejemplo 1: Hallar el producto de:

$4x^2$ por $3y$

Resolución:

$4x^2.3y = 4.3(x^2.y)$

$= \boxed{12x^2y}$

Nota:

Los monomios:

$4x^2$; $3y$ no tienen la misma parte literal.

Ejemplo 2: Hallar el producto de:

$5x^3$ por $2x^6$

Resolución:

$5x^3.2x^6 = 5.2(x^3.x^6)$

$= 10(x^{3+6})$

$= \boxed{10x^9}$

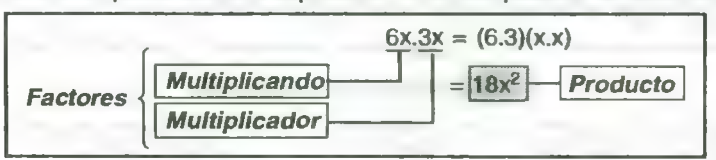
Nota: *Los monomios:*

$5x^3$; $2x^6$ tienen la misma parte literal.

Términos de la Multiplicación: Toda multiplicación consta de los siguientes términos:

a) Multiplicando, término que ha de multiplicarse
b) Multiplicador, término por el cual se multiplica
c) Producto, es el resultado de la multiplicación.

Todo término que hace de multiplicando o de multiplicador se llama factor.



Leyes de los Signos:

En una multiplicación de dos términos con signos iguales sean los dos positivos o los dos negativos, el producto es positivo. Al multiplicar dos términos con signos diferentes, uno positivo y el otro negativo el producto es negativo; osea:

$(+).(+) = +$
$(-).(-) = +$ } (El producto de dos términos de signos iguales es **positivo**)

$(+).(-) = -$
$(-).(+) = -$ } (El producto de dos términos de signos diferentes es **negativo**)

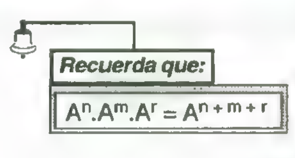
Ejemplos:

a) $2x.3x^2 = (2.3).(x.x^2)$ $= 6(x^{1+2})$ $= \boxed{6x^3}$	c) $5x.(-3) = 5(-3).(x.x^4)$ $= -15x^{1+4}$ $= \boxed{-15x^5}$
b) $(-4x)(-5x^2) = (-4)(-5).(x.x^2)$ $= 20x^{1+2}$ $= \boxed{20x^3}$	d) $(-4x^2)(3x^3) = (-4)(3).(x^2.x^3)$ $= -12x^{2+3}$ $= \boxed{-12x^5}$

e) Hallar el producto de: $5x^2$ por $2x^4$ por $3x^3$

Resolución:

$$(5x^2).(2x^4).(3x^3) = (5.2.3).(x^2.x^4.x^3)$$
$$= 30.x^{2+4+3}$$
$$= \boxed{30x^9}$$



f) Hallar el produto de: $2x^4y$ por $-3x^5y^2$ por $-6x^2y^3$

Resolución:

$$(2x^4y).(-3x^5y^2).(-6x^2y^3) = (2)(-3)(-6).(x^4.x^5.x^2).(y.y^2.y^3)$$
$$= 36\ x^{4+5+2}.\ y^{1+2+3}$$
$$= \boxed{36x^{11}.y^6}$$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 21

- Halla el resultado de la cada operación:

a) $(7x)\ (3x\ ) =$	g) $3y^2z\ (-2x^3y)\ (-4xyz^3)\ (6xy^3z) =$
b) $(4x^2)\ (3x^5) =$	h) $-5x^6y^2z\ (-2xy^4z^3)\ (3xz^2)\ (-x^2yz^4) =$

c)	$(-2x^3)(-5x) =$	i)	$2x^3.5x^2y.x^2y.x^3y^4(-3x^2y) =$
d)	$(-7x^4)(-8x^2) =$	j)	$4ax^2.(-6a^2x)(9bx^3)(-2b^2x^2) =$
e)	$(-3xy^2)(7xy^4) =$	k)	$6x^n(-9a^2x^3)(-12x^n)(8a^3x^2) =$
f)	$x^5(3x^2y)(4x^3y^2) =$	l)	$5ax^2(-3xb^4)(-2a^3bx)(8xb^2) =$

3.2.5 Potencia de Monomios:

La potencia de monomios es un caso particular de la multiplicación de monomios. Es una multiplicación de factores monomios iguales.

Ejemplo 1: Efectuar: $(5x^3)^2$

Resolución:

$$(5x^3)^2 = (5x^3)(5x^3) = (5.5)(x^3.x^3) = 25x^{3+3} = 25x^6$$

Ejemplo 2: Efectuar: $(2ax^2)^3$

Resolución:

$$(2ax^2)^3 = (2ax^2)(2ax^2)(2ax^2) = 2.2.2\,(a.a.a)(x^2.x^2.x^2) = 8a^3x^6$$

* Para determinar la potencia de un monomio se aplica las siguientes leyes.

 **El Producto de bases iguales:** En este caso se suman los exponentes.

$$a^m.a^n = a^{m+n}$$

Donde: $a \in \mathbb{R}$; m y $n \in \mathbb{N}$

Ejemplo 1: Efectuar: $x^4.x^6$

Resolución:

$$x^4.x^6 = x^{4+6} = x^{10}$$

Ejemplo 2: Efectuar: $x^3.x^2.x$

Resolución:

$$x^3.x^2.x = x^{3+2+1} = x^6$$

 **Potencia de Potencia:** En este caso se multiplican los exponentes.

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$$

Donde: $a \in \mathbb{R}$; m y $n \in \mathbb{N}$

Ejemplo 1: Efectuar: $(x^2)^5$

Resolución:

$$(x^2)^5 = x^{2.5} = x^{10}$$

Ejemplo 2: Efectuar: $[(x^3)^2]^4$

Resolución:

$$[(x^3)^2]^4 = x^{3.2.4} = x^{24}$$

 **Producto de Potencias iguales de bases diferentes:** Es igual al producto de dichas bases elevadas a la potencia común.

$a^n.b^n = (a.b)^n$ **Donde:** $\begin{cases} a \text{ y } b \in \mathbb{R} \\ m \text{ y } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Ejemplo 1: Efectuar: $a^3.b^3$

Resolución:

$a^3.b^3 = (a.b)^3$

Ejemplo 2: Efectuar: $x^2.y^2.z^2$

Resolución:

$x^2.y^2.z^2 = (x.y.z)^2$

 **Exponentes interrelacionados o exponentes en cadena:** En este caso se efectúan las potencias a partir de los exponentes de la parte superior a la parte inferior. $a^{m^{n^{r}}}$

Ejemplo 1: Efectuar:

$a^{2^{2^{2}}}$

Resolución:

$a^{2^{(2^2)}} = a^{2^{4}} = a^{16}$

Ejemplo 1: Efectuar:

$a^{3^{2^{2}}}$

Resolución:

$a^{3^{(2^2)}} = a^{3^{4}} = a^{81}$

* Ahora, veamos algunos ejemplos sobre potencia de monomios.

Ejemplo 1: Efectuar: $(3xy^2)^2$

Resolución:

$(3xy^2)^2 = 3^2.x^2.(y^2)^2 = 9x^2.y^4$

Ejemplo 2: Efectuar: $(-6x^4y^2z^3)^2$

Resolución:

$(-6x^4y^2z^3)^2 = (-6)^2.(x^4)^2.(y^2)^2.(z^3)^2$

$= 36.x^8.y^4.z^6$

Ejemplo 2: Efectuar: $(-5x^2y^3)^3$

Resolución:

$(-5x^2y^3)^3 = (-5)^3.(x^2)^3.(y^3)^3$

$= -125.x^6.y^9$

* $(-5)^3 = \underbrace{(-5)(-5)}(-5)$

$= (25)(-5) = -125$

** $(-6)^2 = \underbrace{(-6)(-6)}$

$= +36 = 36$

Observaciones:

- $(\text{-Cantidad})^{\text{Exponente par}} = \begin{pmatrix}\textbf{Cantidad} \\ \textbf{positiva}\end{pmatrix}$
- $(\text{-Cantidad})^{\text{Exponente impar}} = \begin{pmatrix}\textbf{Cantidad} \\ \textbf{negativa}\end{pmatrix}$

Ejemplo 1: Efectuar: $(-7)^2 = +7 = 49$

Ejemplo 2: Efectuar: $(-2)^3 = -2^3 = -8$

Ejemplo 4: Efectuar: $(-3xy^3z^2)^3$

Resolución:

$$(-3xy^3z^2)^3 = (-3)^3.(x^3).(y^3)^3.(z^2)^3$$
$$= -3^3.x^3.y^9.z^6$$
$$= \boxed{-27x^3y^9z^6}$$

Ejemplo 5: Efectuar: $[(-3x)^2]^2$

Resolución:

$$[(-3x)^2]^2 = [(-3)^2.x^2]^2 = (3^2.x^2)^2$$
$$= (9x^2)^2 = 9^2.(x^2)^2$$
$$= \boxed{81x^4}$$

Ejemplo 6 : Efectuar: $(-3x^4)^2 . (-2x^3y^2)^2$

Resolución: $(-3x^4)^2 . (-2x^3y^2)^2 = [(-3)^2 . (x^4)^2] . [(-2)^2 . (x^3)^2 . (y^2)^2] = [9x^8] . [4x^6y^4]$

$$= 36x^{14}y^4$$

Ejemplo 7 : Efectuar: $(-2x^2y^3)^3 . (-x^3y)^5$

Resolución: $(-2x^2y^3)^3 . (-x^3y)^5 = (-2)^3 (x^2)^3 (y^3)^3 . (-x^3)^5 . (y^5)$

$$= -8x^6y^9 . (-x^{15})y^5$$
$$= +8y^{21}y^{14}$$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 22

- Halla el resultado de:

a) $(x^3)^4 =$	i) $7x^2(2x^3y^2)^3 =$	q) $(-7xy)^2.(-2y^2z)^4 =$
b) $(x^2y)^3 =$	j) $2xy^2(-2x^2y) =$	r) $(-xy^2)^3.(-yz^3)^4 =$
c) $(2x^3y^2z)^2 =$	k) $(x^3)^5.(3x^6)^2 =$	s) $(-6axy^2)^3.(-5xy^3)^2$
d) $(-8xy^3)^2 =$	l) $3x^2(5x^3y^4)^2y^6 =$	t) $(-axy)^4.(-3yz^2)^2.(2a^2b)^3 =$
e) $(5x^3y)^3 =$	m) $(-4x^5)^2(-3xy^3)^2 =$	u) $[(-3x)^2(x^3)]^3 =$
f) $(-4xy^2)^3 =$	n) $(-5xy^2)^3(-2x^3y)^3 =$	v) $[(-2x)^2]^3.[(2x)^3]^2 =$
g) $(-2x^3y^2z^4)^4 =$	o) $8x^3y^6(2x^2y^3)^5 =$	w) $[(3a^3bx)^2(x^2y)]^2 =$
h) $(-6x^2y^2z)^3 =$	p) $x^7(-3xy^3)^3(-2y)^3 =$	x) $[(-2a^2b^4x)^2(-xy^2)]^3 =$

3.2.6. División de Monomios:

El cociente de dos monomios es otro monomio (caso de división exacta); cuyo coeficiente es el cociente de sus coeficientes y la parte literal es el

cociente de sus partes literales, y si los monomios tienen la misma parte literal es la letra común con un exponente igual a la diferencia del exponente del dividendo menos el exponente del divisor.

Ejemplo 1: Hallar el cociente al dividir:	**_Ejemplo 2:_** Hallar el cociente al dividir:
$12x^6$ entre $3x^2$	$-20x^8y^4$ entre $5x^5y^2$
Resolución:	**_Resolución:_**
$\frac{12x^6}{3x^2} = \left(\frac{12}{3}\right)\left(\frac{x^6}{x^2}\right)$	$\frac{-20x^8y^4}{5x^5y^2} = \left(\frac{-20}{5}\right)\left(\frac{x^8}{x^5}\right)\left(\frac{y^4}{y^2}\right)$
$= 4x^{6-2} = \boxed{4x^4}$	$= -4x^{8-5} \cdot y^{4-2} = \boxed{-4x^3y^2}$

Términos de una división exacta: En la división exacta entran los siguientes términos:

a) **Dividendo**; que es la cantidad que se ha de dividir (18x)
b) **Divisor**; es el término por el cual se efectua la división (6)
c) **Cociente**; que es el resultado de la división (3x)

Osea:

Dividendo	:	**Divisor**	=	**Cociente**
18x	:	6	=	3x

Leyes de los Signos:

En la división de dos términos hay que tener presente la siguiente Regla de los Signos: Dividiendo dos términos entre si, que tienen signos iguales, los dos positivos o los dos negativos, resulta un cociente positivo, y dividiendo dos términos que tienen signos diferentes; uno positivo y otro negativo, resulta un cociente negativo; lo cual se resume de la siguiente forma:

(+) : (+) = +
(-) : (-) = +
} (El cociente de dos términos de signos iguales es **positivo**)

(-) : (+) = -
(+) : (-) = -
} (El cociente de dos términos de signos diferentes es **negativo**)

Ejemplos:

a) $\frac{15x^2}{3x} = 5x^{2-1} = 5x$

b) $\frac{-30x^3}{-3x} = 10x^{3-1} = 10x^2$

c) $\frac{-10x^8}{5x^3} = -2x^{8-3} = -2x^5$

d) $\frac{12x^7}{-3x^4} = -4x^{7-4} = -4x^3$

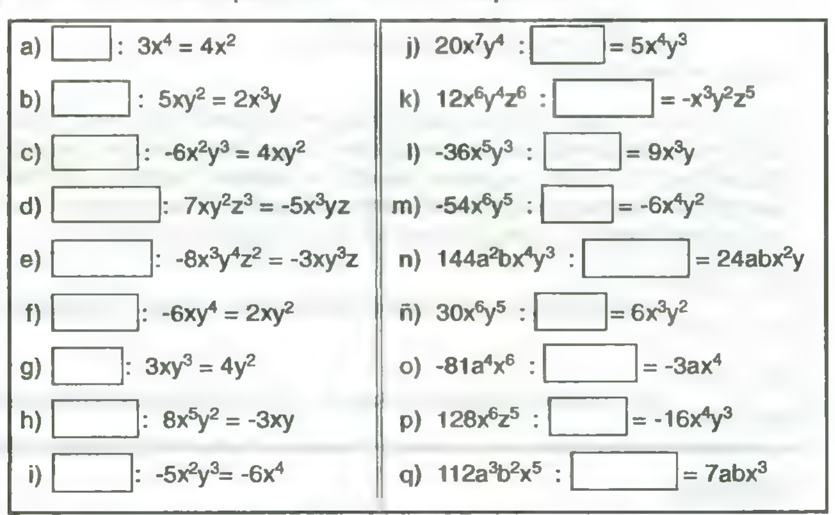


TALLER DE EJERCICIOS Nº 23

1 Halla el resultado de las siguientes operaciones:

a) $\dfrac{12x^6y^3}{4x^4y^2}$	e) $\dfrac{30x^8y^2z^3}{-5x^3yz^2}$	i) $\dfrac{112x^3y^5}{7x^3y^2}$	m) $\dfrac{-72x^{m+3}y^{n+2}}{-6x^my^2}$
b) $\dfrac{36x^8y^4}{-9x^3y^3}$	f) $\dfrac{-48x^6y^7z^{2n}}{-6x^2y^3z}$	j) $\dfrac{108x^6y^9}{9x^4y^7}$	n) $\dfrac{128x^{m+5}y^{n+2}}{64x^4y^n}$
c) $\dfrac{144x^6y^4}{72xy^2}$	g) $\dfrac{-56x^6y^6z^4}{-7xy^2z}$	k) $\dfrac{84x^4y^7}{-6xy^6}$	ñ) $\dfrac{-126x^{n+1}y^{n+4}}{6x^ny^{n+3}}$
d) $\dfrac{-42x^3y^4z^2}{7x^2y^2z}$	h) $\dfrac{117x^7y^4z^3}{9x^3y^2z}$	l) $\dfrac{55a^6b^9x^4y^9}{-5a^4b^7xy^6}$	

2. Escribe en cada espacio libre el monomio que falta:



a) $\square : 3x^4 = 4x^2$	j) $20x^7y^4 : \square = 5x^4y^3$
b) $\square : 5xy^2 = 2x^3y$	k) $12x^6y^4z^6 : \square = -x^3y^2z^5$
c) $\square : -6x^2y^3 = 4xy^2$	l) $-36x^5y^3 : \square = 9x^3y$
d) $\square : 7xy^2z^3 = -5x^3yz$	m) $-54x^6y^5 : \square = -6x^4y^2$
e) $\square : -8x^3y^4z^2 = -3xy^3z$	n) $144a^2bx^4y^3 : \square = 24abx^2y$
f) $\square : -6xy^4 = 2xy^2$	ñ) $30x^6y^5 : \square = 6x^3y^2$
g) $\square : 3xy^3 = 4y^2$	o) $-81a^4x^6 : \square = -3ax^4$
h) $\square : 8x^5y^2 = -3xy$	p) $128x^6z^5 : \square = -16x^4y^3$
i) $\square : -5x^2y^3 = -6x^4$	q) $112a^3b^2x^5 : \square = 7abx^3$

3.2.7. Radiación de Monomios:

En este caso sólo vamos a considerar la radicación de monomios.

Sea: $\boxed{\sqrt[n]{A} = x}$; se cumple que: $\boxed{A = x^n}$

Para extraer la raiz enésima de un monomio, se extrae la raiz del coeficiente y de la parte literal de dicho monomio, empleando **exponente fraccionario**, osea:

$$\sqrt[n]{A^m}=A^{\frac{m}{n}}$$

Ejemplo 1: Efectuar:

$$\sqrt[3]{64x^{12}y^{24}}$$

Resolución:

$$\sqrt[3]{64x^{12}y^{24}}=\sqrt[3]{64}.\sqrt[3]{x^{12}}.\sqrt[3]{y^{24}}$$

$$=\sqrt[3]{4^3}.x^{12/3}.y^{24/3}$$

$$=\boxed{4.x^4.y^8}$$ ***Rpta.***

Ejemplo 2: Efectuar:

$$\sqrt{100x^8y^{20}}$$

Resolución:

$$\sqrt{100x^8y^{20}}=\sqrt{100}.\sqrt{x^8}.\sqrt{y^{20}}$$

$$=10.x^{8/2}.y^{20/2}$$

$$=\boxed{10.x^4.y^{10}}$$

Ejemplo 3: Efectuar:

$$\sqrt[5]{\sqrt{x^{30}\cdot y^{20}\cdot z^{60}}}$$

Resolución:

$$\sqrt[5]{\sqrt{x^{30}.y^{20}.z^{60}}}=\sqrt[10]{x^{30}.y^{20}.z^{60}}$$

$$=\sqrt[10]{x^{30}}.\sqrt[10]{y^{20}}.\sqrt[10]{z^{60}}$$

$$=x^{30/10}.y^{20/10}.z^{60/10}$$

$$=\boxed{x^3.y^2.z^6}$$ ***Rpta.***

Recuerda que:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{A^p}}=\sqrt[n.m]{A^p}$$

Ejemplo 4: Efectuar:

$$\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{x^{48}.y^{24}.z^{36}}}}$$

Resolución:

$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{\sqrt[2]{x^{48}.y^{24}.z^{36}}}}=\sqrt[12]{x^{48}.y^{24}.z^{36}}$$

$$=\sqrt[12]{x^{48}}.\sqrt[12]{y^{24}}.\sqrt[12]{z^{36}}$$

$$=x^{48/12}.y^{24/12}.z^{36/12}$$

$$=\boxed{x^4.y^2.z^3}$$ ***Rpta.***



TALLER DE EJERCICIOS Nº  24

• Halla el resultado de las siguientes operaciones:

a) $\sqrt{16x^{18}}$	d) $\sqrt[5]{-32x^{20}z^{60}}$	g) $\sqrt[3]{-216x^6y^9z^{12}}$	j) $\sqrt{225x^4y^6z^{16}}$
b) $\sqrt[3]{-8x^6y^{12}}$	e) $\sqrt{121x^{10}z^4}$	h) $\sqrt{144x^4y^{16}z^{14}}$	n) $\sqrt[3]{\sqrt{x^6y^{12}}}$
c) $\sqrt[4]{81x^4y^{20}}$	f) $\sqrt[6]{64x^{12}z^{30}}$	i) $\sqrt[5]{-243x^{20}y^5z^{15}}$	ñ) $\sqrt{\sqrt[3]{x^{24}y^{36}}}$

m) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{-512x^9z^{18}}}$	ñ) $\sqrt{x^2\sqrt[3]{x^6y^{12}}}$	p) $\sqrt[3]{xy^2\sqrt[4]{x^8y^{16}}}$
n) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x^{20}y^8z^{16}}}}$	o) $\sqrt[5]{x^{16}\sqrt{x^8y^{20}}}$	q) $\sqrt{\sqrt{x^6y^3\sqrt[3]{x^6\sqrt[4]{y^{12}}}}}$

3.3. Operaciones Con Polinomios:

3.3.1. Adición de Polinomios:

Para sumar varios polinomios que contienen términos de diversas clases, se indica cada clase con marcas y se reduce separadamente cada una de ellas.

Ejemplo 1: Hallar la suma de: $8x - 5y + 9$ con $2y - 3x + 4$

Resolución:

$$(8x - 5y + 9) + (2y - 3x + 4) = \underbrace{8x - 3x} - \underbrace{5y + 2y} + \underbrace{9 + 4}$$

$$= \boxed{5x - 3y + 13}$$

Ejemplo 2: Hallar la suma de: $A(x) = 5x^3 - 7x + 4$ con $B(x) = 2x^2 + 6x + 1$

Resolución:

$$A(x) + B(x) = (5x^3 - 7x + 4) + (2x^2 + 6x + 1)$$

$$= \underbrace{5x^3} + \underbrace{2x^2} - \underbrace{7x + 6x} + \underbrace{4 + 1}$$

$$= \boxed{5x^3 + 2x^2 - x + 5}$$

* En la práctica se escriben los polinomios sumandos completos y ordenados unos debajo de otro, de modo que correspondan los términos semejantes; procediendo luego a sumar los términos semejantes.

$$A(x) = 5x^3 - 7x + 4 \quad \text{con} \quad B(x) = 2x^2 + 6x + 1$$

Resolución:

$$\left.\begin{array}{lll} A(x) = 5x^3 - 7x + 4 & \Rightarrow & A(x) = 5x^3 + 0x^2 - 7x + 4 \\ B(x) = 2x^2 + 6x + 1 & \Rightarrow & B(x) = \qquad\quad 2x^2 + 6x + 1 \end{array}\right\} +$$

$$\underbrace{A(x) + B(x)} = 5x^3 + 2x^2 - x + 5$$

$$\therefore \boxed{S(x) = 5x^3 + 2x^2 - x + 5} \quad \textbf{Rpta.}$$

Ejemplo 3: Sumar los polinomios siguientes:

$$P(x) = 3x^3 + 5x^2 - x + 2 \quad \text{con} \quad Q(x) = 2x + 6 - 5x^3 - x^2$$

Resolución:

$$P(x) = 3x^3 + 5x^2 - x + 2 \Rightarrow P(x) = 3x^3 + 5x^2 - x + 2$$
$$Q(x) = 2x + 6 - 5x^3 - x^2 \Rightarrow Q(x) = -5x^3 - x^2 + 2x + 6$$
(sumando: +)

$$\underbrace{P(x) + Q(x)}_{} = -2x^3 + 4x^2 + x + 8$$

$$\therefore \boxed{S(x) = -2x^3 + 4x^2 + x + 8}$$ ***Rpta.***

Ejemplo 4: Sumar los polinomios siguientes:

$$M(x\,;\,y) = 3x^2 - 2xy + 5y^2 \text{ con } N(x\,;\,y) = x^2 + 3xy - 2y^2$$

Resolución:

$$M(x, y) = 3x^2 - 2xy + 5y^2$$
$$N(x, y) = \quad x^2 + 3xy - 2y^2$$
(sumando: +) $\therefore \boxed{S(x\,;\,y) = 4x^2 + xy + 3y^2}$ ***Rpta.***

$$\underbrace{M(x\,;\,y) + N(x\,;\,y)}_{S(x\,;\,y)} = 4x^2 + xy + 3y^2$$

Ejemplo 5: Sumar los polinomios siguientes:

$$P(x\,;\,y) = 4x^3 + 6xy^2 - 3y^3\,;\ Q(x\,;\,y) = 5x^3 + 2x^2y + 6xy^2 - 2y^3$$

$$R(x\,;\,y) = -6x^2y + 5y^3$$

Resolución:

$$P(x\,;\,y) = 4x^3 + 0x^2y + 6xy^2 - 3y^3$$
$$Q(x\,;\,y) = 5x^3 + 2x^2y + 6xy^2 - 2y^3$$
$$R(x\,;\,y) = \quad - 6x^2y + 0xy^2 + 5y^3$$
(sumando: +) $\therefore \boxed{S(x\,;\,y) = 9x^3 - 4x^2y + 12xy^2}$ ***Rpta.***

$$S(x\,;\,y) = 9x^3 - 4x^2y + 12xy^2 + 0$$

Ejemplo 6: Sumar los polinomios siguientes:

$$A(x) = 7x^2 + 8x - \frac{2}{3} \text{ con } B(x) = 5x^3 + 3x^2 + \frac{5}{6}$$

Resolución:

$$A(x) = 7x^2 + 8x - \frac{2}{3} \Rightarrow A(x) = \quad 7x^2 + 8x - \frac{2}{3}$$
$$B(x) = 5x^3 + 3x^2 + \frac{5}{6} \Rightarrow B(x) = 5x^3 + 3x^2 + 0x + \frac{5}{6}$$
(sumando: +)

$$= 5x^3 + 10x^2 + 8x \underbrace{- \frac{2}{3} + \frac{5}{6}}$$

$\therefore$ $\boxed{S(x) = 5x^3 + 10x^2 + 8x + \frac{1}{6}}$ ***Rpta.***

Ejemplo 7: Sumar los polinomios siguientes:

$$A(x\,;y\,;z) = 2x^2 + y^2 - 3z^2 + 2xy - 3zx$$
$$B(x\,;y\,;z) = 4y^2 + z^2 - 3x^2 + 5xy - 2zx$$
$$C(x\,;y\,;z) = z^2 + 2x^2 - y^2 + 2zx - 3xy$$

Resolución:

$$\left.\begin{array}{l} A(x\,;y\,;z) = \;\;2x^2 + y^2 - 3z^2 + 2xy - 3zx \\ B(x\,;y\,;z) = -3x^2 + 4y^2 + z^2 + 5xy - 2zx \\ C(x\,;y\,;z) = \;\;2x^2 - y^2 + z^2 - 3xy + 2zx \end{array}\right\} +$$
$$= \quad x^2 + 4y^2 - z^2 + 4xy - 3zx$$

$\therefore$ $\boxed{S(x\,;y\,;z) = x^2 + 4y^2 - z^2 + 4xy - 3zx}$ ***Rpta.***

Ejemplo 8: Sumar los polinomios siguientes:

$$M(x) = \frac{1}{3}x^4 - 3x^3 + 2x + 6\;;\; N(x) = 2x^4 + 6x^2 - x - 2$$

$$P(x) = \frac{1}{2}x^4 + 5x + 1$$

Resolución:

$$M(x) = \frac{1}{3}x^4 - 3x^3 + 2x + 6 \Rightarrow M(x) = \frac{1}{3}x^4 - 3x^3 + 0x^2 + 2x + 6$$
$$N(x) = 2x^4 + 6x^2 - x - 2 \Rightarrow N(x) = 2x^4 + 0x^3 + 6x^2 - x - 2$$
$$P(x) = \frac{1}{2}x^4 + 5x + 1 \Rightarrow P(x) = \frac{1}{2}x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 5x + 1$$
$$= \left(\frac{1}{3} + 2 + \frac{1}{2}\right) x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 6x + 5$$

$\therefore$ $\boxed{S(x) = \frac{17}{6}x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 6x + 5}$ ***Rpta.***

Ejemplo 9: Sumar los polinomios siguientes:

$$P(x) = 0{,}3x^2 - 0{,}8x + 2{,}8x^3 \text{ con } Q(x) = 5{,}4x^2 + 3{,}2x^3 - 0{,}3\,x$$

Resolución:

$$P(x) = 0{,}3x^2 - 0{,}8x + 2{,}8x^3 \Rightarrow P(x) = 2{,}8x^3 + 0{,}3x^2 - 0{,}8x$$
$$Q(x) = 5{,}4x^2 + 3{,}2x^3 - 0{,}3x \Rightarrow Q(x) = 3{,}2x^3 + 5{,}4x^2 - 0{,}3x \quad +$$
$$= 6{,}0x^3 + 5{,}7x^2 - 1{,}1x$$

$$\therefore \boxed{S(x) = 6{,}0x^3 + 5{,}7x^2 - 1{,}1x} \ \textit{Rpta.}$$

• **Inverso Aditivo u opuesto de un polinomio:**

Se llama inverso aditivo u opuesto de un polinomio $A(x)$ cualquiera al que tiene los mismos coeficientes cambiados de signo y la misma parte literal. Lo representamos por: $-A(x)$.

Se verifica que: $\boxed{A(x) + [-A(x)] = 0}$

Ejemplo 1: Dado: $A(x) = 3x^2 - 7x + 8$; su opuesto es $-A(x) = -3x^2 + 7x - 8$ ya que al sumarlo se obtiene el elemento neutro.

$$(3x^2 - 7x + 8) + (-3x^2 + 7x - 8) = 0x^2 + 0x + 0 = 0$$

Ejemplo 2: El inverso Aditivo u opuesto de: $2x^3 - 5x^2 + 3x - 6$; es el polinomio: $-(2x^3 - 5x^2 + 3x - 6)$; osea: $-2x^3 + 5x^2 - 3x + 6$.

Ejemplo 3: El inverso aditivo u opuesto de: $-x^2 + 3x - 5$; es el polinomio: $x^2 - 3x + 5$.

3.3.2. Sustracción de Polinomios:

La existencia del inverso aditivo u opuesto en la adición permite asegurar la existencia de la sustracción de dos polinomios cualesquiera.

> *Se llama diferencia de dos polinomios al polinomio que se obtiene al sumar al minuendo el opuesto del sustraendo.*

Ejemplo 1: Efectuar la diferencia indicada: $(5x^2 - 6xy + 2y^2) - (4xy + 2x^2 - 3y^2)$

Resolución:

$$= (\underline{5x^2} - \underline{6xy} + \underline{2y^2}) + (\underline{-4xy} - \underline{2x^2} + \underline{3y^2})$$
$$= (5x^2 - 2x^2) + (-6xy - 4xy) + (2y^2 + 3y^2)$$
$$= (3x^2) + (-10xy) + (5y^2) = \boxed{3x^2 - 10xy + 5y^2} \ \textit{Rpta.}$$

Ejemplo 2: **Restar:** $4x^3 - 2x^2 + 7x - 3$ de $7x^3 - 4x^2 + 5x - 6$

Resolución:

El polinomio **minuendo** es: $7x^3 - 4x^2 + 5x - 6$

El opuesto del **sustraendo** es: $-4x^3 + 2x^2 - 7x + 3$ (+)

La diferencia es: $\boxed{3x^3 - 2x^2 - 2x - 3}$

Recuerda que:

• Después de la palabra **De**, encontramos al **Minuendo** y después de la palabra **Restar** encontramos al **Sustraendo**.

Ejemplo 3: De: $3x - 5x^2 + 8$ Restar $9x^2 - 4x - 2$

Resolución:

El polinomio **minuendo** es: $-5x^2 + 3x + 8$

El opuesto del **sustraendo** es: $-9x^2 + 4x + 2$ (+)

La diferencia es: $\boxed{-14x^2 + 7x + 10}$

Ejemplo 4: Dados los polinomios:

$$A(x) = 5x^4 - \frac{2}{5}x^3 - 3x^2 - 6 \;\; y \;\; B(x) = 4x^3 + \frac{2}{3}x^2 - 7x + \frac{1}{4} \;;$$

Hallar: $A(x) - B(x)$

Resolución:

Se disponen los polinomios como en el caso de la suma; así:

El polinomio **minuendo** es: $A(x) = 5x^4 - \frac{2}{5}x^3 - 3x^2 + 0x - 6$

El opuesto del **sustraendo** es: $-B(x) = \quad - 4x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 7x - \frac{1}{4}$

$$A(x) - B(x) = 5x^4 + (-\frac{2}{5} - 4)x^3 + (-3 - \frac{2}{3})x^2 + 7x + (-6 - \frac{1}{4})$$

$$= 5x^4 + (-\frac{22}{5})x^3 + (-\frac{11}{3})x^2 + 7x + (-\frac{25}{4})$$

$$\therefore \boxed{A(x) - B(x) = 5x^4 - \frac{22}{5}x^3 - \frac{11}{3}x^2 + 7x - \frac{25}{4}} \;\; \textbf{Rpta.}$$

Ejemplo 5: Hallar el polinomio diferencia de los polinomios:

$$P(x) = 3x^2 - 7x + 12 \;\; ; \;\; Q(x) = 3x^3 - 5x + 8$$

Resolución:

El polinomio **minuendo** es: $P(x) = \quad 3x^2 - 7x + 12$

El opuesto del **sustraendo** es: $Q(x) = -3x^3 \quad + 5x - 8$ (+)

$$P(x) - Q(x) = -3x^3 + 3x^2 - 2x + 4$$

$\therefore$ El polinomio diferencia es: $-3x^3 + 3x^2 - 2x + 4$

- **Signos de Agrupación o Colección:**

Los signos de Agrupación o Colección son:

Paréntesis: **( )** ; Corchetes: **[ ]** ; Llaves : **{ }** ; Barra ó Vínculo: ———

* Los signos de colección se emplean para indicar que las cantidades encerradas en ellas deben considerarse como un todo, esto es, como **una sola cantidad**; así:

$x + (y - z)$; indica que a "x" debemos sumar la diferencia "y - z"

$3x - (8y + 5z)$; indica que a "3x" debemos restar la suma "8y + 5z"

• **Supresión de Signos de Agrupación:**

Se tiene la siguiente Regla General:

> Para suprimir Signos de Agrupación precedidos del signo + se escribe todos los términos que están dentro de ellos con sus propios signos.

Ejemplos:

a) $3x + (4y - 5z + w) = 3x + 4y - 5z + w$

b) $5x + y + (3z - 4w - 5t) = 5x + y + 3z - 4w - 5t$

> Para suprimir Signos de Agrupación precedidos del signo - se cambia de signo a cada uno de los términos que están dentro de ellos.

Ejemplos:

a) $5x - (3y - 2z + 4q) = 5x - 3y + 2z - 4q$

b) $2x - (4y + 3z - 2w) = 2x - 4y - 3z + 2w$

* ***Veamos otros ejemplos:***

Ejemplo 1: Suprimir los signos de Agrupación en la expresión:

$$3x^2 + (y - 2z) - [5x^2 - 3y]$$

Resolución:

Como el paréntesis está precedido del signo +, los términos no cambian de signo, mientras el corchete está precedido del signo - ; los términos si cambian de signo; veamos:

$$3x^2 + (y - 2z) - [5x^2 - 3y] = \underline{3x^2} + \underline{y} - \underline{2z} - \underline{5x^2} + \underline{3y}$$

$$= (3x^2 - 5x^2) + (y + 3y) - 2z$$

$$= \boxed{-2x^2 + 4y - 2z} \ \textit{Rpta.}$$

Ejemplo 2: Suprimir los signos de Agrupación y reducir los términos semejantes en la expresión:

$$7x - \{3x - [4x - (5x - 2x)]\}$$

Resolución:

$= 7x - \{3x - [4x - (5x - 2x)]\}$ ***Eliminamos los paréntesis.***

$= 7x - \{3x - [4x - 5x + 2x]\}$ ***Eliminamos los corchetes.***

$= 7x - \{3x - 4x + 5x - 2x\}$ ***Eliminamos las llaves.***

$= 7x - 3x + 4x - 5x + 2x = \boxed{5x}$ ***Rpta.***

- Si los **Signos de Agrupación** están unos dentro de otros; para suprimirlos se comienza suprimiendo lo más interiores.
- Con frecuencia se usan **las barras o vínculos** en lugar de los paréntesis por ejemplo:

$$x + (5y - 2z) + 2x - (3y + 4z) = x + \overline{5y - 2z} + 2x - \overline{3y + 4z}$$

Ejemplo 3: Suprimir los signos de agrupación y reducir los términos semejantes en la expresión:

$$5x - \{-4y - [7z - (3x - 2y)]\}$$

Resolución:

Suprimimos los signos de agrupación comenzando por el paréntesis; luego el corchete y por último la llave.

$= 5x - \{-4y - [7z - (3x - 2y)]\} \Rightarrow$ **Eliminamos ( )**

$= 5x - \{-4y - [7z - 3x + 2y]\} \Rightarrow$ **Eliminamos [ ]**

$= 5x - \{-4y - 7z + 3x - 2y\} \Rightarrow$ **Eliminamos { }**

$= \underline{5x} + \underline{4y} + \underline{7z} - \underline{3x} + \underline{2y}$

$= (5x - 3x) + (4y + 2y) + 7z = \boxed{2x + 6y + 7z}$ ***Rpta.***

Ejemplo 4: Suprimir los signos de agrupación y reducir los términos semejantes en la expresión:

$$-\{-5x - [-5y + (-3y - \overline{8x + 5z}) - (-3y - \overline{4z - 2x}) - 2x] + 4x\}$$

Resolución:

$-\{-5x - [-5y + (-3y - \overline{8x + 5z}) - (-3y - \overline{4z - 2x}) - 2x] + 4x\}$

Eliminamos

$-\{-5x - [-5y + (-3y - 8x - 5z) - (-3y - 4z + 2x) - 2x] + 4x\}$

Eliminamos

$-\{-5x - [\underline{-5y} - \cancel{3y} - \underline{8x} - \underline{5z} + \cancel{3y} + \underline{4z} - \underline{2x} - \underline{2x}] + 4x\}$

$-\{-5x - [-5y - 12x - z] + 4x\} \Rightarrow$ **Eliminamos [ ]**

$-\{-5x + 5y + 12x + z + 4x\} \Rightarrow$ **Eliminamos { }**

$5x - 5y - 12x - z - 4x = \boxed{-11x - 5y - z}$ ***Rpta.***

Ejemplo 5: Suprimir los signos de agrupación y reducir los términos semejantes en la expresión E.

$$E = -\{x - 2y + z - \overline{2x - 2w + z} + [-(w - 2z) + x - \overline{z - 2y} - w - 2z]\}$$

Resolución:

$$E = -\{x - 2y + z - 2x + 2w - z + [-w + 2z + x - z + 2y - w - 2z]\}$$

$$E = -\{x - 2y + z - 2x + 2w - z + [-2w + x - z + 2y]\}$$

$$E = -\{x - 2y - 2x + 2w - 2w + x - z + 2y\} = -\{-z\}$$

$\therefore$ $\boxed{E = z}$ ***Rpta.***

Ejemplo 6: Simplificar la expresión "S": $S = -[-2x - \overline{- - x + 2y - 3z - (y - x + 2z)}]$

Resolución:

$$S = -[-2x - \overline{- - x + 2y - 3z - y + x - 2z}]$$

$$S = -[-2x - \overline{- y - 5z}] = -[-2x - \overline{- y + 5z}]$$

$$S = -[-2x + y - 5z] = \boxed{2x - y + 5z}$$ ***Rpta.***

- **Introducción de Términos en Signos de Agrupación:**

> Para identificar términos dentro de un Signo de Agrupación precedido del signo +, se escribe estos términos con sus propios signos dentro de los signos indicados.

Ejemplo: Introducir los dos últimos términos de la expresión: $3x^2 - 5x + 2$ en un paréntesis precedido del signo +.

Resolución:

Cada término se deja con su propio signo:

$$3x^2 - 5x + 2 = 3x^2 + (-5x + 2)$$

> Para introducir términos dentro de un Signo de Agrupación precedido del signo - , se escribe cada término con signo cambiado.

Ejemplo: Introducir los tres últimos términos de la expresión:

$5xy^3 + \frac{3}{2}x^2y^2 - 6x^3y + 0,6x^4 - 2,3$; en un paréntesis precedido del signo -.

Resolución:

Cambiando de signo a cada uno de los tres últimos términos se tiene:

$$5xy^3 + \frac{3}{2}x^2y^2 - \underbrace{6x^3y + 0,6x^4 - 2,3} = 5xy^3 + \frac{3}{2}x^2y^2 - (\underbrace{6x^3y - 0,6x^4 + 2,3})$$

Problemas sobre Adición y Sustracción de Expresiones Algebraicas

Problema 1: Se han hecho cuatro compras; la segunda ha gastado "m" soles más que la primera; la tercera "n" soles más que la segunda; la cuarta "p" soles menos que la tercera. ¿Cuánto se ha gastado en total, si en la primera compra gastó "x" soles?

Resolución:

- En la primera compra se gastó: "x" soles
- En la segunda compra se gastó: (x + m) soles
- En la tercera compra se gastó: [(x + m) + n] soles
- En la cuarta compra se gastó: {[(x + m) + n] - p} soles.

Luego; el gasto total será:

$$\text{Gasto total} = x + (x + m) + [(x + m) + n] + \{[(x + m) + n] - p\}$$

$$= x + (x + m) + (x + m + n) + (x + m + n - p)$$

$$= x + x + m + x + m + n + x + m + n - p = \boxed{4x + 3m + 2n - p}$$

Problema 2: En cuánto excede $3a^2b^3 - 5bx + 16$ a $2a^2b^3 + 3bx - 12$

Resolución:

$$\text{Exceso} = (3a^2b^3 - 5bx + 16) - (2a^2b^3 + 3bx - 12)$$

$$= \underline{3a^2b^3} - \underline{5bx} + 16 - \underline{2a^2b^3} - \underline{3bx} + 12$$

$$= \boxed{a^2b^3 - 8bx + 28}$$

Problema 3: Arturo tiene $\frac{x}{3}$ bolas en la mano derecha y $(\frac{1}{5}x - 2)$en la mano izquierda. Si pasa 5 bolas de la mano derecha a la izquierda, cuál es la expresión para:

a) Lo que tiene en cada mano **b)** Lo que tiene en ambas manos.

Resolución:

- Número de bolas que tiene en la mano derecha = $\boxed{\frac{x}{3}}$

Pasa 5 bolas

- Número de bolas que tiene en la mano izquierda = $\boxed{(\frac{1}{5}x - 2)}$

Al pasar las 5 bolas de la mano derecha a la izquierda, el número de bolas que tendrá en cada mano sería:

- Número de bolas en la mano derecha = $(\frac{x}{3} - 5)$
- Número de bolas en la mano izquierda = $(\frac{1}{5}x - 2) + 5 = (\frac{1}{5}x + 3)$

Luego:

a) Lo que tiene en cada mano es:

$$\boxed{\text{En la derecha} = (\frac{x}{3} - 5) \text{ y en la izquierda} = (\frac{1}{5}x + 3)}$$ ***Rpta.***

b) Lo que tiene en ambas manos es:

$$(\frac{x}{3} - 5) + (\frac{1}{5}x + 3) = (\frac{x}{3} + \frac{1}{5}x - 2) = \boxed{\frac{8}{15}x - 2}$$ ***Rpta.***

Problema 4: De un juego de naipes de 52 cartas, se sacan x y 3 más; luego el doble de lo anterior y 4 más y finalmente la tercera parte de los restantes. ¿Cuántas cartas quedan al final?

Resolución:

- Número de naipes en total = 52 cartas

  * En la primera se sacan: $(x + 3)$

    Quedando = $52 - (x + 3) = \boxed{49 - x}$

  * La segunda vez se sacan el doble de lo que sacó anteriormente y 4 más, osea:

    $$\boxed{[2(x + 3) + 4]}$$

    Quedando ahora o restantes $= (49 - x) - [2(x + 3) + 4]$

    $= (49 - x) - [2x + 6 + 4] = \boxed{39 - 3x}$

  * Finalmente se sacan la tercera parte de los restantes

    $$= \frac{1}{3}(39 - 3x) = \frac{39 - 3x}{3} = \frac{39}{3} - \frac{3x}{3} = \boxed{(13 - x)}$$

  Quedando al final = $(39 - 3x) - (13 - x) = \boxed{26 - 2x}$

∴ El número de cartas que quedan al final son: $26 - 2x$ **Rpta.**



TALLER DE EJERCICIOS Nº 25

1. Sumar los siguientes polinomios:

a) $7x - 3y$; $4x + 6y$; $5x - 8$; $4x - 3y + 5$; $6x - y + 2$
b) $14x - 5$; $-3x + 6x^2$; $-5x^2 - 10x + 6$; $23x - 4 + 3x^2$
c) $2x^3 + 7x^2 - 3x + 1$; $3x^3 - 5x^2 + 6x - 4$; $x^2 - 5x + 7$
d) $3x^2y - 8x^3y^2 - x^4y^3$; $9x^3y^2 + 2x^4y^3 - 4x^2y$; $3x^3y^2 - x^2y$
e) $2x^2y^3 + 4xy^2 + 10x^2y - 3x^2y^2$; $-xy^2 + 6x^2y^3 - 8x^2y + 2x^2y^2$
f) $-3x^2 + 5x^4 - x^6$; $4x^5 - 2x^4 + 3x^6$; $12x^2 + x^6 - 3x^5$

2. Sumar los siguientes polinomios:

a) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}xy + \frac{2}{5}y^2$; $\frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{5}xy - \frac{1}{4}y^2$
b) $\frac{3}{7}ax - bx + \frac{1}{3}cx$; $-\frac{1}{3}ax + \frac{2}{5}bx - \frac{1}{2}cx$
c) $\frac{9}{20}xy^2 - \frac{5}{9}xz^2 + ax$; $-\frac{6}{10}xy^2 + \frac{1}{4}xz^2 - \frac{5}{8}ax$
d) $\frac{3}{4}x^2y^2 - \frac{5}{6}x^3y^2 + \frac{1}{2}$; $-\frac{2}{5} + \frac{1}{2}x^3y^3 - \frac{1}{3}x^2y^2$
e) $\frac{1}{5}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 2x^4 + 6x$; $2x^2 - 3x^3 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{2}x$

3. Sumar los siguientes polinomios:

a) $0{,}3x^2 - 0{,}8y^2 + 0{,}2z^2$; $0{,}9x^2 + 0{,}2y^2 - 0{,}8z^2$; $x^2 - 2z^2 + 3y^2$
b) $0{,}2x^3yz - 0{,}7xy^2 + 1{,}5z^2 + 1{,}2xy^3$; $0{,}7\,x^3yz + 2{,}3\,xy^2 - 2{,}6z^2 + 0{,}6\,xy^3$
c) $\frac{2}{3}xy^2 - \frac{1}{4}xy^3 - \frac{5}{7}xz$; $-\frac{3}{4}xy^3 + \frac{2}{5}xz - xy^2$; $xz - \frac{3}{4}xy^3 + \frac{1}{2}xy^2$
d) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2$; $\frac{2}{5}x^2 - \frac{3}{4}xy - \frac{1}{5}y^2$; $\frac{8}{9}x^2 - \frac{1}{3}xy - \frac{3}{7}y^2$
e) $0{,}5x^4 - 0{,}4x^3y + x^5 - 3x^2$; $3x^5 + 0{,}6x^2 - \frac{2}{5}x^3y + \frac{1}{3}x^4$

4. Sumar los siguientes polinomios:

a) $3y^n - 8y^x + y^2$; $-y^x + 2y^2 + 4y^n$; $-5y^2 - 6y^n + y^x$
b) $8x^n - 3x^{n+1} + 5x^{n+2}$; $4x^{n+1} - 3x^n - 3x^{n+2}$; $-8x^{n+2} + 6x^n - x^{n+1}$
c) $x^{n+3} - 6x^{n+2} + 2x^{n+1}$; $-3x^{n+1} + 8x^{n+2} - 2x^{n+3}$; $x^{n+2} - x^{n+3} + 5x^{n+1}$
d) $3x^n - 2x^{n-1} + x^{n-2}$; $4x^{n-1} - 2x^{n-2} + 4x^n$; $6x^{n-2} + x^n - 8x^{n-1}$

5. Si: $A(x,y) = 7x^2y - \frac{3}{2}xy^2 + y^3$; $B(x,y) = \frac{4}{7}y^3 - x^2y - \frac{3}{5}xy^2$

$C(x,y) = 3xy^2 - 5x^2y + 2y^3$; Hallar:

a) $A(x,y) + B(x,y)$	b) $B(x,y) + C(x,y)$
c) $A(x,y) + C(x,y)$	d) $A(x,y) + B(x,y) + C(x,y)$

6. Si: $P(x,y) = -12x^2y^4 - \frac{1}{3}x^2y^2 + \frac{3}{5}xy^3$; $Q(x,y) = -x^2y^2 + 3x^2y^4 + \frac{2}{5}xy^3$

$R(x,y) = 5x^2y^4 + \frac{17}{3}x^2y^2 + 6xy^3$; Hallar:

a) $P(x,y) + Q(x,y)$	b) $Q(x,y) + R(x,y)$
c) $P(x,y) + R(x,y)$	d) $P(x,y) + Q(x,y) + R(x,y)$

7. Efectuar la resta de los siguientes polinomios:

a) De: $3x^2 - 8xy + 6y^2$ Restar: $2x^2 + 3xy + 5y^2$

b) De: $6x^3 + 3x^2 - x$ Restar: $-4x^2 - 3x + 5x^3$

c) De: $-8x^2y - y^2 + 3$ Restar: $3y^2 - 12 + 5x^2y$

d) De: $\frac{1}{2}xy + \frac{1}{3}xz + x^2$ Restar: $\frac{5}{8}xy - \frac{2}{5}xz + \frac{5}{7}x^2$

e) De: $0{,}13x^2 - 0{,}5x^3 + x^4$ Restar: $0{,}9x^2 + 1{,}2x^3 + 0{,}4x^4$

f) De: $-1{,}5xy + 0{,}8x^2y + 0{,}1y^2$ Restar: $0{,}2y^2 - 0{,}5x^2y - 1{,}4xy$

g) De: $-x^2y - \frac{3}{8}xy - \frac{1}{5}y^2$ Restar: $\frac{4}{9}x^2y - \frac{1}{2}xy - \frac{8}{15}y^2$

8. Efectuar la resta de los siguientes polinomios:

a) Restar: $5x^2 + 3xy - 2y^2$ de: $8x^2 - 5xy + 3y^2$

b) Restar: $-x^2y - xy^2 + 2y^3$ de: $5x^2y - 4xy^2 - y^3$

c) Restar: $12xy^2 - 9x^2y + xz$ de: $-9xy^2 - 2xz + 10x^2y$

d) Restar: $\frac{3}{7}x^3 + \frac{2}{9}x^2 + \frac{1}{2}x$ de: $\frac{5}{14}x^3 - \frac{1}{18}x^2 - \frac{2}{3}x$

e) Restar: $-\frac{1}{6}xy - \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{7}y^2$ de: $xy - \frac{5}{12}x^2 - \frac{2}{9}y^2$

f) Restar : $0{,}1xy - 0{,}5x^2y^2 + 0{,}9x^3y^3$ de: $-0{,}7xy - 0{,}8x^2y^2 + 0{,}12x^3y^3$

g) Restar: $-1,8x^2 + 1,3y^2 - 2,5z^2$ de: $0,6x^2 + 0,9y^2 - 1,2z^2$

h) Restar: $3x^n - 5x^{2n} + 8x^{3n}$ de: $2x^n - 6x^{2n} + 5x^{3n}$

i) Restar: $12x^{n-1} + 9x^{n+1} - 5x^{n+2}$ de: $15x^{n-1} + 11x^{n+1} + 8x^{n+2}$

j) Restar: $0,1xy^{n+3} - 0,5\,x^2y + 0,9x^{n+1}$ de: $-0,9xy^{n+3} + 0,75x^2y + x^{n+1}$

9. Si: $A = 3x^2 - 2xy + y^2 - 5$; $B = -8x^2 + xy - 5y^2 + 6$;

$C = 0,9x^2 - 0,5x\,y + 0,2y^2 - 1,2$; Hallar:

a) $(A + B) - C$ b) $A - (B + C)$ c) $(A + C) - B$ d) $(B + C) - A$

10. En cuanto excede:

a) $3xy - 4x^2 - 1$ **a** $19xy + 10x^2 + 18$

b) $14x^3 - 3x^2 + 6x + 4$ **a** $5x^2 - 8x + 7x^3 - 6$

c) $8x^5y - 6x^3y^3 - 9x^4y^2 - 3y^3$ **a** $-3x^4y^2 + 2y^3 - 4x^3y^3 - 5x^5y$

d) $0,5x^2 + 1,2y^2 - 0,8z^2$ **a** $0,9x^2 - 0,7y^2 + 0,3z^2$

e) $\frac{7}{9}ax - \frac{9}{12}bx^3 + \frac{1}{3}x^2$ **a** $\frac{1}{2}bx^3 - ax - \frac{5}{9}x^2$

11. Efectuar las siguientes operaciones:

a) De: $3a^2x$ resta la suma: $(2a + 5bx - a^2x)$ con : $(a - 2bx - 3a^2x)$

b) De: $\frac{5}{9}$ restar la diferencia que hay entre: $(\frac{1}{2}a + 3x)$ y $(\frac{5}{8}a - 2x)$

c) De: $-6x^3$ restar la suma: $(3x - 5x^2 - 8x^3)$ con: $(2x + 4x^2 - 7x^3)$

d) De: $0,3ax$ restar la diferencia que hay entre: $(0,8x^2 - 0,5ax)$ y $0,3x^2 + 0,1ax$

12. Introducir dentro del paréntesis positivo el 2º, 3º y 4º términos de los siguientes polinomios:

a) $2x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 6x - 3$

b) $-8ax^2 - 4ax^3 + 3ax^4 + ax^4 + ax^5$

c) $\frac{2}{3}a^4x - \frac{1}{2}a^3x^2 - \frac{5}{8}a^2x^3 - \frac{3}{7}ax^4 - x^5$

d) $xy^2 - 3x^3y^3 + \frac{5}{2}x^3y^4 - 2x^4y^5 + 6$

e) $4x^3 - 5x^2 - xy + x^3y^2 - 8x^4y + 17x^5y^3 - 19$

13. Introducir dentro del paréntesis negativo los últimos términos de los siguientes polinomios:

a) $9x^5 + 3x^4 - 2x^3 - x^2 - 5x + 10$	d) $7x^6 - 3x^4 + x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
b) $-3x^2 + 2xy^2 - 6y^2 + 12$	e) $-ax^6 + bx^3 - ax - 6x^4 - 3x - 8$
c) $\frac{4}{9}x - \frac{5}{8}x^2 + \frac{2}{3}x^3 - x^4 + \frac{1}{2}x^5$	f) $xy^3 - axy^2 + 5xy^4 - 2x^3y - 16xy^4$

14. Suprimir los signos de agrupación y reducir los términos semejantes en las expresiones siguientes:

a) $5x - \{4y - (3x - 2y)\}$	b) $4x - \{-2y - [6z - (3x - 7y)]\}$
c) $-6x - [-2x - (3y + x)]\}$	d) $-9x - \{-x - y - [3y - x - (3y - x)]\}$

e) $-\{-11x + [-7y - (8x - 10y) - (4x - \overline{2x - 3y})]\}$

f) $2x - \{3y - (2y - z) - 4z + (2x - (3y - z - 2y))]\}$

g) $-\{-[13x - (6x - \overline{8y - 7x}) - 6y - (8x - \overline{11x - 7y}) - 9x] - 4y\}$

h) $(x - 1) - \{x - 2 - [x - \overline{3 - (x - 4)}] + 2\,[x - \overline{2x - y} + (3y - x)]\}$

i) $-\overline{-2x - y} - \{-\overline{x + 2z} - [-x - \overline{-\overline{-x - y + 2z - (y - x)}} - (x - 3y)]\}$

j) **Si:** $A = x + y$; $B = -x - y$; $C = x - y$; $D = -x + y$

Calcular: **I)** $-\{(A - B) + (C - D)\}$ **II)** $-\{(B + C) - 2\,(C + D)\}$

15. En una clase de matemática de "m" alumnos; "n" duermen, "p" cuentan chistes y el resto escuchan clase. ¿Cuál es el exceso de los que duermen y cuentan chistes sobre los que escuchan clase?

a) $2(n + p) - m$	b) $2n + p - m$	c) $2\,(n - p) + m$
d) $2(n + p) + m$	e) $2m + 2p - m$	

16. La edad de Manuel es de "x" años; la de su hermano César es de "y" años menos y la de su hermana Olga es "z" años menos que la de César. ¿Cuánto suman las tres edades?

a) $3x - y + 2z$	b) $3x - 2y - 3z$	c) $3x - 2y - z$
d) $3x + y + 2z$	e) $3x + 2y - z$	

17. Raúl es "x" cm más alto que José y este "y" cm más bajo que Arturo. Si la medida de este es de "z" cm. ¿Cuánto miden los tres?

a) $3z - y + 2x$	b) $3z - 2y + x$	c) $3z + 2y - x$
d) $2z - 3y - x$	e) $2x - 3z + y$	

18 María tiene "a" soles menos que Sandra, y esta tiene "b" soles menos que Nataly, si entre los tres tienen: $(3x + 2a - b)$ soles. ¿Cuántos soles tiene Nataly?

a) $3x + a - 2b$	b) $3x + a - b$	c) $2x - a + b$
d) $3x - a + b$	e) $3x + 2a - b$	

RESPUESTAS TALLER

4.
a) $y^n - 8y^x - 2y^2$
b) $11x^n - 6x^{n+2}$
c) $4x^{n+1} + 3x^{n+2} - 2x^{n+3}$
d) $8x^n - 6x^{n-1} + 5x^{n-2}$

5.
a) $6x^2y - \frac{21}{10}xy^2 + \frac{11}{7}y^3$
b) $\frac{18}{7}y^3 + \frac{12}{5}xy^2 - 6x^2y$
c) $2x^2y + \frac{3}{2}xy^2 + 3y^3$
d) $\frac{25}{7}y^3 + x^2y + \frac{9}{10}xy^2$

6.
a) $-9x^2y^4 - \frac{4}{3}x^2y^2 + xy^3$
b) $8x^2y^4 + \frac{14}{3}x^2y^2 + \frac{32}{5}xy^3$
c) $-7x^2y^4 + \frac{16}{3}x^2y^2 + \frac{33}{5}xy^3$
d) $-4x^2y^4 + \frac{13}{3}x^2y^2 + 7xy^3$

7.
a) $x^2 - 11xy + y^2$
b) $x^3 + 7x^2 + 2x$
c) $-13x^2y - 4y^2 + 15$
d) $-\frac{1}{8}xy + \frac{11}{15}xz + \frac{2}{7}x^2$
e) $-0,77x^2 - 1,7x^3 + 0,6x^4$
f) $0,3y^2 - 0,1xy + 1,3x^2y$
g) $-\frac{13}{9}x^2y + \frac{1}{8}xy + \frac{1}{3}y^2$

8.
a) $3x^2 - 8xy + 5y^2$
b) $6x^2y - 3xy^2 - 3y^3$
c) $-21xy^2 + 19x^2y - 3xz$
d) $-\frac{1}{14}x^3 - \frac{5}{18}x^2 - \frac{7}{6}x$
e) $\frac{7}{6}xy - \frac{1}{24}x^2 - \frac{59}{63}y^2$
f) $-0,8xy - 0,3x^2y^2 - 0,78x^3y^3$
g) $2,4x^2 - 0,4y^2 + 1,3z^2$
h) $-x^n - x^{2n} - 3x^{3n}$ i) $3x^{n-1} + 2x^{n+1} + 13x^{n+2}$ j) $xy^{n+3} + 1,25x^2y + 0,1x^{n+1}$

9.
a) $-5,9x^2 - 0,5xy - 4,2y^2 + 13$
b) $10,1x^2 - 2,5xy + 5,8y^2 - 9,89$
c) $11,9x^2 - 3,5xy + 6,2y^2 - 12,2$
d) $-10,1x^2 + 2,5xy - 5,8y^2 + 9,8$

(10)
a) $-16xy - 14x^2 - 19$
b) $7x^3 - 8x^2 + 14x + 10$
c) $13x^5y - 6x^4y^2 - 2x^3y^3 - 5y^3$
d) $-0{,}4x^2 + 1{,}9y^2 - 1{,}1z^2$
e) $-\frac{5}{4}bx^3 + \frac{8}{9}x^2 - \frac{16}{9}ax$

(11)
a) $8a^2x - 3a - 3bx$
b) $\frac{5}{9} + \frac{9a}{8} - x$
c) $9x^3 + x^2 - 5x$
d) $0{,}7ax - 11x^2$

(10)
a) $8x - 6y$
b) $x + 9y + 6z$
c) $-3x + 3y$
d) $-8x + y$
e) $21x$
f) $2z$
g) $-6x - y$
h) $6x - 8y$
i) $x + 2y + 4z$
j) I) $-4x$ II) $2y - 4x$

 a
 c
 b
 b

3.3.3. Multiplicación de Expresiones Algebraicas

Ley de los Signos: Se distinguen dos casos:

1. **Signo del Producto de los Factores:** En una multiplicación de dos términos (factores) con signos iguales sean los dos positivos o los dos negativos, el producto es positivo. Al multiplicar dos términos con signos diferentes, uno positivo y otro negativo el producto es negativo. Osea:

$(+).(+) = +$ $(-).(-) = +$	(El producto de dos términos (factores) de signos iguales es **positivo**)
$(-).(+) = -$ $(+).(-) = -$	(El producto de dos términos (factores) de signos diferentes es **negativo**)

Ejemplos:

a) $4y.3 = 12y$
b) $(-3y).(-4) = 12y$
→ **Productos Positivos**

c) $(2y).(-3) = -6y$
d) $(-2y).(3) = -6y$
→ **Productos Negativos**

2. **Signo del Producto de más de dos factores:** El signo del producto de varios factores es positivo **(+)**, si tiene un número **par** de factores negativos o todos son positivos.

Ejemplos:

a) $(-4x)(-5y)z = 20xyz$	c) $3x.5y.(-3z)(-2) = 90xyz$
b) $3x.2y.z = 6xyz$	d) $(-4x)(-6y)(-3)(-5) = 360xy$

- El signo del producto de varios factores es negativo **(-)**, cuando tiene un número **impar** de factores negativos.

a) $(-2x)y.(-z)(-w) = -2xyzw$	c) $(-5x)(-2)(-3y)(z)(w) = -30xyzw$
b) $(-x)(y)(2z)(8w) = -16xyzw$	d) $(-x)(-y)(-z)(-2)(-5)w = -10xyzw$

- **Leyes de los Exponentes:**

Para multiplicar potencias de la misma base se escribe la misma base y se pone por exponente la suma de los exponentes de los factores.

Ejemplos:

a) $x^3.x^4 = x^{3+4} = \boxed{x^7}$	b) $y^2.y^6.y^{-5} = y^{2+6+(-5)} = y^{8-5} = \boxed{y^3}$

- **Ley de los coeficientes:**

El coeficiente del producto de dos factores es el producto de los coeficientes de los factores.

Ejemplos:

a) $(3x)(5y) = 3.5xy = \boxed{15xy}$	b) $(-8x)(2y) = -8.2xy = \boxed{-16xy}$

3.3.3.1. Multiplicación de un Polinomio por un Monomio:

Para multiplicar un polinomio por un monomio se multiplica cada término del polinomio por el monomio como en la multiplicación de monomios.

Ejemplos:

a) $8x^2(3x^4 + 5y^2 + 2) = 8x^2(3x^4) + 8x^2(5y^2) + 8x^2(2)$

$= \boxed{24x^6 + 40x^2y^2 + 16x^2}$ ***Rpta.***

b) $6x^2y^3(x^2y^2 - 3x^2y + 5xy) = 6x^2y^3(x^2y^2) + 6x^2y^3(-3x^2y) + 6x^2y^3(5xy)$

$= \boxed{6x^4y^5 - 18x^4y^4 + 30x^3y^4}$ ***Rpta.***

c) $-4x^2yz(3x^3 - \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{8}y^2) = -4x^2yz(3x^3) - 4x^2yz(-\frac{1}{2}xy^2) - 4x^2yz(\frac{1}{8}y^2)$

$= \boxed{-12x^5yz - 2x^3y^3z + \frac{1}{2}x^2y^3z}$ ***Rpta.***

d) $0,2xy^2(0,3x^3 - 0,5xy + 0,7y^3) = 0,2xy^2(0,3x^3) + 0,2xy^2(-0,5xy) + 0,2xy^2(0,7y^3)$

$$= \boxed{0{,}06x^4y^2 - 0{,}1x^2y^3 + 0{,}14xy^5} \quad \textbf{Rpta.}$$

e) $\left(\frac{2}{3}x^{m+1} - \frac{2}{5}x^{m} - \frac{3}{7}x^{m-1}\right).\left(\frac{3}{4}x^{2m}\right) = \frac{6}{12}x^{3m+1} - \frac{6}{20}x^{3m} - \frac{9}{28}x^{3m-1}$

$$= \boxed{\frac{1}{2}x^{3m+1} - \frac{3}{10}x^{3m} - \frac{9}{28}x^{3m-1}} \quad \textbf{Rpta.}$$

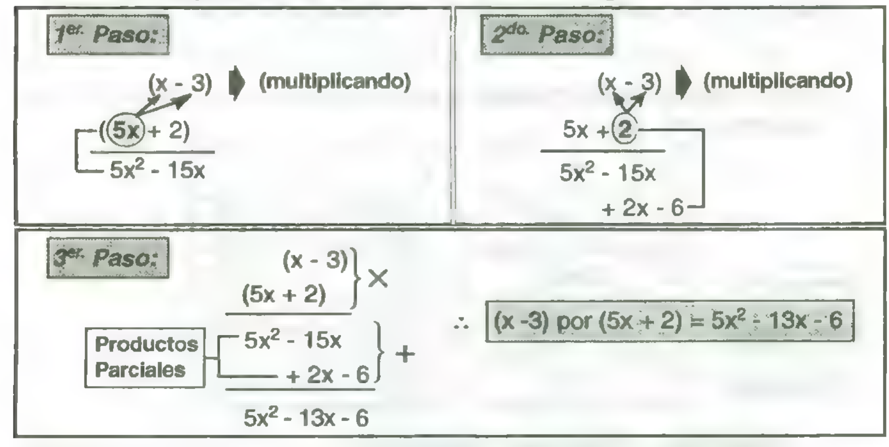
3.3.3.2. Multiplicación de Polinomios:

Para multiplicar un polinomio por otro, se multiplica cada término del primer polinomio por cada uno de los términos del segundo polinomio. Si en los productos parciales hay términos semejantes se les ordena para reducirlos.

Ejemplo 1: Multiplicar: $(x - 3)$ por $(2 + 5x)$

Resolución:

Para facilitar la operación ordenamos los dos binomios con respecto a la letra "x", disponiendo los factores de la manera siguiente:



Ejemplo 2: Efectuar el producto de: $A(x) = 7x^3 - 5x + 2$ y $B(x) = 2x^2 + 5x - 1$

Resolución: En este caso es conveniente escribir los polinomios completos y ordenados, y en orden decreciente.

1er. Paso:

$A(x) = 7x^3 + 0x^2 - 5x + 2$

$B(x) = 2x^2 + 5x - 1$

$14x^5 + 0x^4 - 10x^3 + 4x^2$

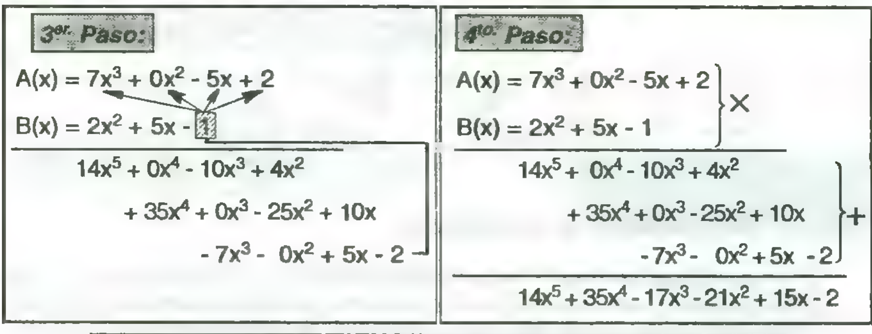
2do. Paso:

$A(x) = 7x^3 + 0x^2 - 5x + 2$

$B(x) = 2x^2 + 5x - 1$

$14x^5 + 0x^4 - 10x^3 + 4x^2$

$+ 35x^4 + 0x^3 - 25x^2 + 10x$



$\therefore$ $7x^3 - 5x + 2$ por $2x^2 + 5x - 1 = 14x^5 + 35x^4 - 17x^3 - 21x^2 + 15x - 2$

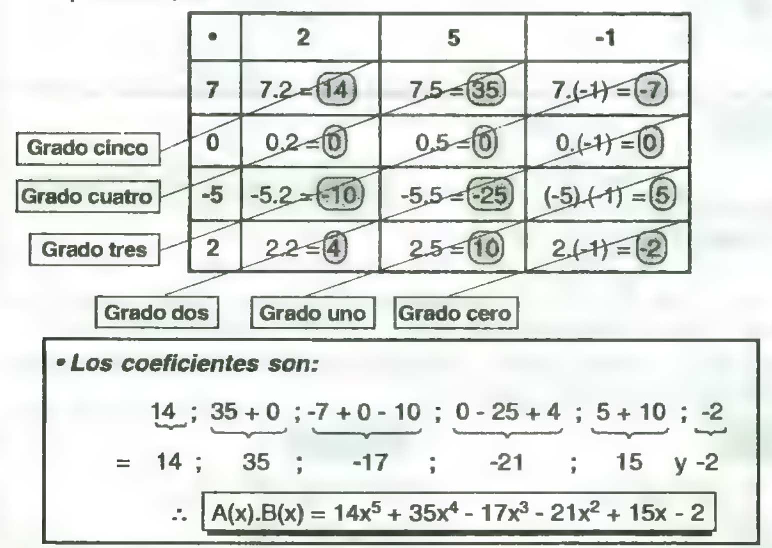
* También se puede disponer el producto mediante una **Tabla de Doble Entrada** como sigue:

Multiplicar: $A(x) = 7x^3 - 5x + 2$ por $B(x) = 2x^2 + 5x - 1$

Escribimos los polinomios completos y ordenados en orden decreciente.

Así: $A(x) = \mathbf{7x^3 + 0x^2 - 5x + 2}$ por $B(x) = \mathbf{2x^2 + 5x - 1}$

- En la Tabla de **Doble Entrada** solo colocamos los coeficientes de cada polinomio; así:



•	2	5	-1
7	7.2 = 14	7.5 = 35	7.(-1) = -7
0	0.2 = 0	0.5 = 0	0.(-1) = 0
-5	-5.2 = -10	-5.5 = -25	(-5).(-1) = 5
2	2.2 = 4	2.5 = 10	2.(-1) = -2

• Los coeficientes son:

$\underbrace{14}$; $\underbrace{35 + 0}$; $\underbrace{-7 + 0 - 10}$; $\underbrace{0 - 25 + 4}$; $\underbrace{5 + 10}$; $\underbrace{-2}$

= 14 ; 35 ; -17 ; -21 ; 15 y -2

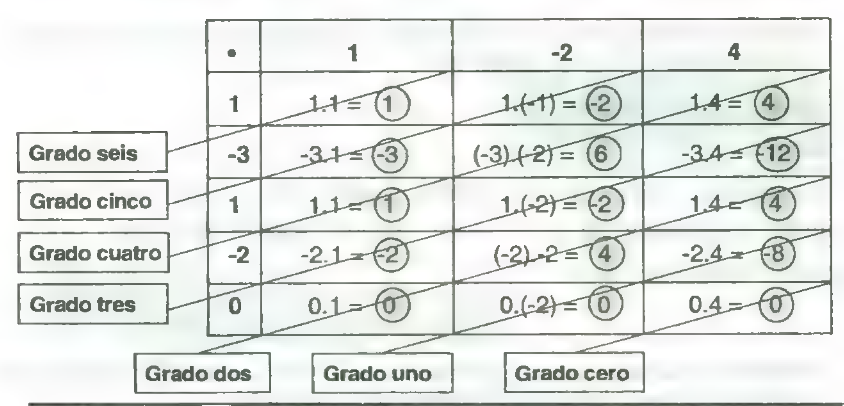
$\therefore$ $A(x).B(x) = 14x^5 + 35x^4 - 17x^3 - 21x^2 + 15x - 2$

Ejemplo 3: Hallar el producto mediante la tabla de Doble Entrada de los polinomios siguientes:

$$z^4 - 3z^3 - 2z + z^2 \text{ por } z^2 - 2z + 4$$

Resolución:

Ordenamos los polinomios dados: $\mathbf{1z^4 - 3z^3 + 1z^2 - 2z + 0}$ por $\mathbf{1z^2 - 2z + 4}$



•	1	-2	4
1	1.1 = (1)	1.(-1) = (-2)	1.4 = (4)
-3	-3.1 = (-3)	(-3).(-2) = (6)	-3.4 = (-12)
1	1.1 = (1)	1.(-2) = (-2)	1.4 = (4)
-2	-2.1 = (-2)	(-2).-2 = (4)	-2.4 = (-8)
0	0.1 = (0)	0.(-2) = (0)	0.4 = (0)

• ***Los coeficientes son:***

$$\underbrace{1}\ ;\ \underbrace{-2-3}\ ;\ \underbrace{4+6+1}\ ;\ \underbrace{-12-2-2}\ ;\ \underbrace{4+4+0}\ ;\ \underbrace{-8+0}\ ;\ \underbrace{0}$$

$$= 1\ ;\ -5\ ;\ 11\ ;\ -16\ ;\ 8\ ;\ -8\ ;\ 0$$

$$\therefore\ \boxed{\begin{aligned} z^4 - 3z^3 - 2z + z^2 \text{ por } z^2 - 2z + 4 &= 1z^6 - 5z^5 + 11z^4 - 16z^3 + 8z^2 - 8z + 0 \\ &= z^6 - 5z^5 + 11z^4 - 16z^3 + 8z^2 - 8z \end{aligned}}$$

Ejemplo 4: Multiplicar: $\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}x^2$ por $\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{5} + \frac{1}{10}x$

Resolución: En primer lugar ordenamos los polinomios:

$$\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \quad \text{por} \quad \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{10}x - \frac{1}{5}$$

Luego, multiplicamos dichos polinomios:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{10}x - \frac{1}{5} \end{array}\right\} \times$$

$$\left.\begin{array}{lrrrrrr} \frac{3}{2}x^2(\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}) = & \frac{3}{8}x^5 & + \frac{1}{2}x^4 & - \frac{3}{8}x^3 & + \frac{3}{4}x^2 & & \\ \frac{1}{10}x(\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}) = & & + \frac{1}{40}x^4 & + \frac{1}{30}x^3 & - \frac{1}{40}x^2 & + \frac{1}{20}x & \\ -\frac{1}{5}(\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}) = & & & - \frac{1}{20}x^3 & - \frac{1}{15}x^2 & + \frac{1}{20}x & - \frac{1}{10} \end{array}\right\} +$$

$$\boxed{\frac{3}{8}x^5 + \frac{21}{40}x^4 - \frac{47}{120}x^3 + \frac{79}{120}x^2 + \frac{1}{10}x - \frac{1}{10}}$$

Ejemplo 5: Multiplicar: $0,6x^2 - x + 3$ por $0,5x^3 + 2,4x^2 - 4$

Resolución:

Aplicando la propiedad que dice: El orden de los factores no altera el producto; los polinomios se puede escribir así:

$$\left.\begin{array}{l} 0,5x^3 + 2,4x^2 + 0x - 4 \\ 0,6x^2 - x + 3 \end{array}\right\} \times$$

$$\left.\begin{array}{rl} 0,6x^2(0,5x^3 + 2,4x^2 + 0x - 4) = & 0,3x^5 + 1,44x^4 + 0x^3 - 2,4x^2 \\ -x(0,5x^3 + 2,4x^2 + 0x - 4) = & - 0,5x^4 - 2,4x^3 - 0x^2 + 4x \\ 3(0,5x^3 + 2,4x^2 + 0x - 4) = & + 1,5x^3 + 7,2x^2 + 0x - 12 \end{array}\right\} +$$

$$\boxed{0,3x^5 + 0,94x^4 - 0,9x^3 + 4,8x^2 + 4x - 12}$$

- **Producto de más de dos polinomios:** Se halla el producto de los dos primeros y luego el de este resultado con el tercero.

Ejemplo 1: Hallar: $(x + 5)(x - 3)(2x + 1)$

Resolución: $(x + 5)(x - 3)(2x + 1) = (x^2 + 2x - 15)(2x + 1)$

$$\left.\begin{array}{l} (x + 5) \\ (x - 3) \end{array}\right\} \times$$

$$\left.\begin{array}{rl} x(x + 5) = & x^2 + 5x \\ -3(x + 5) = & - 3x - 15 \end{array}\right\} +$$

$$(x^2 + 2x - 15)$$

$$\left.\begin{array}{l} (x^2 + 2x - 15) \\ (2x + 1) \end{array}\right\} \times$$

$$\left.\begin{array}{rl} 2x(x^2 + 2x - 15) = & 2x^3 + 4x^2 - 30x \\ 1(x^2 + 2x - 15) = & + x^2 + 2x - 15 \end{array}\right\} +$$

$$(2x^3 + 5x^2 - 28x - 15)$$

$$\therefore \boxed{(x + 5)(x - 3)(2x + 1) = 2x^3 + 5x^2 - 28x - 15}$$

Ejemplo 2: Hallar: $(3x - 5)(2x + 1)(x^2 + 3x + 1)$

Resolución: $(3x - 5)(2x + 1)(x^2 + 3x + 1) = (6x^2 - 7x - 5)(x^2 + 3x + 1)$

$$\left.\begin{array}{l} (3x - 5) \\ (2x + 1) \end{array}\right\} \times$$

$$\left.\begin{array}{rl} 2x(3x - 5) = & 6x^2 - 10x \\ 1(3x - 5) = & + 3x - 5 \end{array}\right\} +$$

$$(6x^2 - 7x - 5)$$

$$\left.\begin{array}{l} (6x^2 - 7x - 5) \\ (x^2 + 3x + 1) \end{array}\right\} \times$$

$$\left.\begin{array}{r} 6x^4 - 7x^3 - 5x^2 \\ + 18x^3 - 21x^2 - 15x \\ + 6x^2 - 7x - 5 \end{array}\right\} +$$

$$6x^4 + 11x^3 - 20x^2 - 22x - 5$$

$\therefore$ $\boxed{(3x - 5)(2x + 1)(x^2 + 3x + 1) = 6x^4 + 11x^3 - 20x^2 - 22x - 5}$

- **Multiplicación Combinada con Adición y Sustracción:** Se efectuan primero los productos y luego las sumas y restas indicadas.

Ejemplo 1: Hallar: $(3x - 1)(x + 2) + 3(x + 1)(2x - 1)$

Resolución:

En primer lugar, hallamos los productos indicados; osea:

$$\begin{array}{r} (3x - 1) \\ (x + 2) \\ \hline 3x^2 - x \quad\quad \\ + 6x - 2 \\ \hline (3x^2 + 5x - 2) \end{array} \qquad \begin{array}{r} (x + 1) \\ (2x - 1) \\ \hline 2x^2 + 2x \quad\quad \\ - x - 1 \\ \hline (2x^2 + x - 1) \end{array}$$

Luego: $(3x - 1)(x + 2) + 3(x + 1)(2x - 1) = (3x^2 + 5x - 2) + 3(2x^2 + x - 1)$

$= 3x^2 + 5x - 2 + 6x^2 + 3x - 3$

$= \boxed{9x^2 + 8x - 5}$ ***Rpta.***

Ejemplo 2: Hallar: $(2x^2 - 3x + 1)(3x - 1) + (2x + 1)(\frac{1}{2}x - 3)$

Resolución: En primer lugar, hallamos los productos indicados, osea:

$$\begin{array}{r} (2x^2 - 3x + 1) \\ (3x - 1) \\ \hline 6x^3 - 9x^2 + 3x \quad\quad \\ - 2x^2 + 3x - 1 \\ \hline (6x^3 - 11x^2 + 6x - 1) \end{array} \qquad \begin{array}{r} (2x + 1) \\ (\frac{1}{2}x - 3) \\ \hline x^2 + \frac{1}{2}x \quad\quad \\ - 6x - 3 \\ \hline (x^2 - \frac{11}{2}x - 3) \end{array}$$

Luego:

$(2x^2 - 3x + 1)(3x - 1) + (2x + 1)(\frac{1}{2}x - 3) = (6x^3 - 11x^2 + 6x - 1) + (x^2 - \frac{11}{2}x - 3)$

$= 6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 + x^2 - \frac{11}{2}x - 3$

$= \boxed{6x^3 - 10x^2 + \frac{1}{2}x - 4}$

- **Supresión de Signos de Agrupación con Productos Indicados:**

Un coeficiente colocado junto a un signo de Agrupación nos indica que debemos multiplicarlo por cada uno de los términos encerrados en dicho signo.

Ejemplo 1: Simplificar: $5x - (x - 3y) - 4(x - y) + 2[-(x + y) - 3(-x - 2y)]$

Resolución:

$$= 5x - (x - 3y) - 4(x - y) + 2[-(x + y) - 3(-x - 2y)]$$

Eliminamos ( ) **Eliminamos ( )**

$$= 5x - (x - 3y) - 4(x - y) + 2[-x - y + 3x + 6y]$$

$$= 5x - x + 3y - 4x + 4y + 2[2x + 5y]$$

$$= 7y + 4x + 10y = \boxed{4x + 17y}$$

Ejemplo 2: Simplificar: $-4(x - 3y) + 5\{-4[-3x - 2(x + 2y)]\} - \{-[-(x + 3y)]\}$

Eliminamos ( ) **Eliminamos ( )**

Resolución:

$$= -4(x - 3y) + 5\{-4[-3x - 2x - 4y]\} - \{-[-x - 3y]\}$$

Eliminamos [ ] **Eliminamos [ ]**

$$= -4(x - 3y) + 5\{12x + 8x + 16y\} - \{x + 3y\}$$

$$= -4x + 12y + 60x + 40x + 80y - x - 3y = \boxed{95x + 89y}$$

- **Multiplicación de Polinomios Aplicando el Método de los coeficientes separados.**

En el esquema de la multiplicación de polinomios se escriben sólo los coeficientes de los términos y se procede de la misma manera como en los casos anteriores ya estudiados.

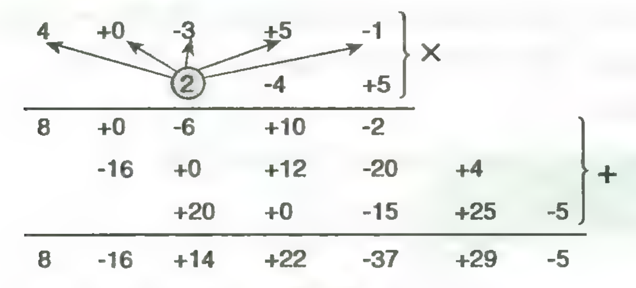
Ejemplo 1: Multiplicar: $4x^4 - 3x^2 + 5x - 1$ por $2x^2 - 4x + 5$

Resolución:

- En primer lugar, ordenamos y completamos los polinomios dados, osea:

$$4x^{④} + 0x^3 - 3x^2 + 5x - 1 \text{ por } 2x^{②} - 4x + 5$$

- Ahora, tomamos en cuenta sólo los coeficientes de dichos polinomios. Asi:



- El grado del producto es: ④ + ② = 6

Luego: *El producto total será:* $8x^6 - 16x^5 + 14x^4 + 22x^3 - 37x^2 + 29x - 5$

Propiedades:

1ro). El grado del producto es igual a la suma de los grados de los factores.

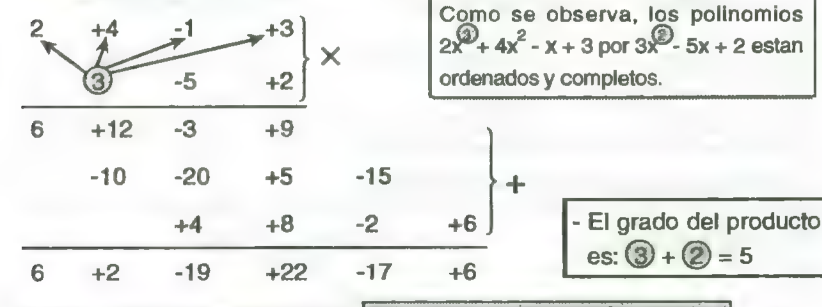
2da). El término independiente del producto es igual al producto de los términos independientes de los factores.

3ra). El producto de los polinomios homogéneos es un polinomio homogéneo.

Ejemplo 2: Multiplicar: $2x^3 + 4x^2 - x + 3$ por $3x^2 - 5x + 2$

Resolución:

Aplicando el método de los coeficientes separados, se tiene que:



Como se observa, los polinomios $2x^3 + 4x^2 - x + 3$ por $3x^2 - 5x + 2$ estan ordenados y completos.

- El grado del producto es: ③ + ② = 5

Luego: *El producto total será:* $6x^5 + 2x^4 - 19x^3 + 22x^2 - 17x + 6$

Observaciones:

1). En operaciones sencillas podemos efectuar del siguiente modo:

$$(3x + 4)(2x - 3) = 6x^2 - 9x + 8x - 12 = 6x^2 - x - 12$$

$$(5x - 3)(3x + 2) = 15x^2 + 10x - 9x - 6 = 15x^2 + x - 6$$

2). En multiplicación de exponentes literales procedemos de este modo:

Multiplicar: $(3x^{m+2} - 4x^{m} + 2x^{m+1})$ por $(x - 1)$

Resolución:

- En primer lugar, ordenamos el primer polinomio, así:

$$\begin{array}{rrrrr} 3x^{m+3} & +2x^{m+2} & -4x^{m+1} & & \\ & -3x^{m+2} & -2x^{m+1} & +4x^{m} & \\ \hline 3x^{m+3} & -x^{m+2} & -6x^{m+1} & +4x^{m} & \end{array}$$

donde el primer polinomio ordenado $3x^{m+2} + 2x^{m+1} - 4x^{m}$ se multiplica por $x - 1$ (×).



TALLER DE EJERCICIOS Nº 26

1. Efectuar las siguientes multiplicaciones:

a) $5x^3.4x^2 =$

b) $3x^2y.6x =$

c) $-3ax.6ax =$

d) $-6xz.3z^2 =$

e) $(-8x^2y).(-5x^2) =$

f) $\frac{3}{4}x^2y.(-\frac{5}{8}xy) =$

g) $(-\frac{4}{7}x^3y^2).(-\frac{8}{9}y^3) =$

h) $(-\frac{1}{5}x).(-x^4y) =$

i) $(\frac{5}{3}x^5y^3).(-3x^3y) =$

j) $(0,5x^2y^2).(-0,3xz) =$

k) $(-0,8xy^5)(-2,4ay^2) =$

l) $(-15xy^2)(0,8xy) =$

m) $0,6ax^2.(-3x^3) =$

n) $(-5x^{a+2})(-2x^{3-a}) =$

ñ) $(3x^{n+1}).(-x^{n+2}) =$

2. Efectuar las siguientes multiplicaciones:

a) $3a.5a^2x.(-a^2bx^2) =$

b) $(-13axy^2)(-2xy^2)(3x^2) =$

c) $(-a^2b)(-9ax)(-5ax^2y) =$

d) $(-10x^2y)(-bx)(-2ax^2y^3) =$

e) $\frac{2}{5}x^2(-\frac{5}{8}xy)(\frac{4}{9}x^3y^2) =$

f) $-\frac{1}{2}x^2y.\frac{4}{5}xb.\frac{15}{2}a^2bx^2 =$

g) $18a^5b^3xy.5a^4b^4z^4.(-\frac{2}{9}a^3by^3) =$

h) $-12x^3y^4z^5.\frac{3}{4}xy^2.5x^5y^5z =$

i) $20a^2b^2c(0,25a^3c^3)(-0,5b^2x^4) =$

j) $32y^5x^3\ (-0,4abx^3)\ (-32a^3b^4x^5) =$

3. Efectuar las siguientes multiplicaciones:

a) $3x^2(2x - 3x^2y + x^3y^2)$
b) $-5xy(-3x^3 + 5x^2y - xy^2)$
c) $-6ax^2(x + 2y - 5)$
d) $3a^2x(2x - 5b + 2a)$
e) $(9x^3 - 5x^2 + 6x - 4)(4x^2)$
f) $(3x^2 - 5y + 6)(-2x^2y)$
g) $(-5x^3y + 8x^5y^2 - xy)(3xy^3)$
h) $-x^2y^2(x^4y^3 - 5x^3y^2 + 10x^2y)$

4. Efectuar las siguientes multiplicaciones:

a) $\frac{2}{3}x^2(\frac{3}{4}x^3 - \frac{5}{9}x^2 - \frac{1}{2}x) =$
b) $-\frac{3}{4}xy^2(-\frac{5}{8}x^3 + \frac{1}{3}xy^2 + \frac{2}{5}xy^3) =$
c) $-\frac{1}{2}a^2xy(\frac{1}{6}ax - \frac{1}{4}a^2x^2 - \frac{1}{5}a^3x^3) =$
d) $(\frac{5}{8}x - \frac{1}{5}x^2 - \frac{3}{4}x^3)(\frac{3}{5}x^3) =$
e) $(-\frac{3}{4}y^3 + \frac{5}{6}y^4 - \frac{1}{2}y^5)(-\frac{1}{2}x^2y) =$
f) $(\frac{3}{5}xy - \frac{4}{9}x^2 - \frac{1}{3}y^2)(-\frac{1}{4}x^2y) =$

5. Efectuar las siguientes multiplicaciones:

a) $(0{,}3x^3 - 0{,}8x^4 + 0{,}1x^5)(0{,}95x^2) =$
b) $(0{,}5ab^2 + 0{,}9a^2b - 0{,}8a^2b^2)(-0{,}7ab^2) =$
c) $(-1{,}5bx^3 - 0{,}9xb^2 + 0{,}3bx)(-0{,}5bx) =$
d) $0{,}75x^3(0{,}5x - 0{,}8x^2 - 0{,}3x^3) =$
e) $5a^2(3a^x - 5a^{x+1} + 8a^{x+2}) =$
f) $-2x^{a+1}(8x^{a+1} - 6x^{a+2} + 3x^{a+3}) =$
g) $3x^{a-2}(12x^{a-4} - x^{a-3} + 9x^{a-2}) =$
h) $-4b^{x-1}(-b^{2x+1} + 3b^{2x+2} + 5b^{2x}) =$

6. Efectuar la multiplicación de los polinomios:

a) $(3x + y)(4x - 5y) =$
b) $(2x^3 + 4y^2)(4x^3 - 2y^2) =$
c) $(-3x^2 - 5y)(2x^2 + 3y) =$
d) $(2 + 2x^2y)(2 + 3x^2y) =$
e) $(x^2 + 4x)(3x - 6) =$
f) $(\frac{2}{3}x + \frac{3}{5}y)(x - \frac{1}{4}y) =$
g) $(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{8}y^2)(\frac{5}{6}x^2 - \frac{2}{5}y^2) =$
h) $(x^2y - \frac{1}{3}y)(\frac{2}{3}x^2y - \frac{3}{2}y) =$

7. Efectuar la multiplicación de los polinomios:

a) $(x^2 - 4x + 2)(x - 1) =$
b) $(x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 5)(x - 5) =$
c) $(x^4 - 8x^3 + 4x^2 + 5x - 6)(4x - 3) =$
d) $(x^4 - 4x^3y + 2x^2y^2 - 8xy^3)(x + 2y) =$
e) $(x + 2y - z)(2z - y + 3z) =$
h) $(5x^2 - 4x + 8)(4x^2 - 5x - 3) =$
i) $(3x^2 - 4)(x - 1)(2x^2 + 3) =$
j) $(x + 6)(2x - 1)(x^2 - 5) =$
k) $(3x + 2)(4x - 3)(5x + 4) =$
l) $(x^3 + x^2 + x + 3)(2x^3 - 3x^2 + x - 1)(x^2 - 3) =$
f) $(-3xy^4 + 2x^2y^3 - 5x^3y^2 + x^4y - 6x^5)(3x - 5y) =$
g) $(12x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 2x)(2x^4 - 3x^3 + x^2) =$

8. Efectuar las multiplicaciones indicadas:

a) $(0,3x - 0,4y)(0,6x - 0,8y) =$

b) $(0,5x^2 - xy + 0,9y^2)(0,2x - 0,6y) =$

c) $(0,8x^3 - 3x^2y + 0,2xy^2 - 0,5)(0,3x - 0,4y) =$

d) $(2a^x - 3a^{x+1} - 5a^{x+2})(3a^{x+1} - 5a^x) =$

e) $(-5b^{x-1} + 3b^{x-2} - 4b^{x-3})(-3b^2 + 3b) =$

f) $(3x^{2a-4} - 5x^{2a-3} - x^{2a-2})(-x + 2x^2) =$

9. En los siguientes ejercicios reducir los términos semejantes:

a) $2x - 3[x + (2x - 3y) - 5(x - 2y)] =$

b) $x - 2\{x - 4[a - x + 5(a - x) - 4(a + x)]\}$

c) $6a^2 + 4\{x^2 - [a^2 + 2a^2 - 3x^2 - a(3a - 8) + x(-2x + 2)]\} =$

d) $x - y - 3\{x + y - 2[-x + y - 4(-x - y) + 2(-x + y) - x] - y\} =$

e) $-\{2x + [3y - 5(x - y)]\} - \{3y + [4x - 2(-3x + 2y)]\} =$

f) $2[x - 3(x - 2y)] + [3(2x - 5y) - 2(4x - 5y)] =$

g) $\{[6(x - y) - 2(y - x)] + [2(2y - 3x) + 3(y + x)]\} - (x - y) =$

h) $x^2 + y^2 - \{2x^2 + 3y^2 + 3[x^2 - y^2 + 3(2x^2 - y^2) - 2(-y^2 - x^2) + y^2] - x^2\} =$

i) $[-2x(\frac{3}{2}x^2 + 4y^2) - x^3] - [-\frac{1}{2}x^2 + 3x(-\frac{5}{2}x - \frac{1}{2}y^2)] =$

j) $(x - 3x^3 + 2)(x - 2x^2 + 1) - (1 - 2x + 4x^2)(3 - x + 2x^2) =$

k) $(x + 1)(2 + x)(x + 3) - (x - 1)(x + 5)(x + 2) =$

l) $(x + y + z)(x + y - z) - (x + z - y)(y + z - x) =$

RESPUESTAS TALLER

6.

a) $12x^2 - 11xy - 5y^2$

b) $8x^6 + 12x^3y^2 - 8y^4$

c) $-6x^4 - 19x^2y - 15y^2$

d) $6x^4y^2 + 10x^2y + 4$

e) $3x^3 + 6x^2 - 24x$

f) $\frac{2}{3}x^2 + \frac{13}{20}xy - \frac{3}{20}y^2$

g) $\frac{5}{12}x^4 - \frac{41}{80}x^2y^2 + \frac{3}{20}y^4$

h) $\frac{2}{3}x^4y^2 + \frac{31}{18}x^2y^2 + \frac{1}{2}xy^2$

7.

a) $x^3 - 5x^2 + 6x - 2$

b) $x^5 - 8x^4 + 17x^3 - 10x^2 + 5x - 25$

c) $4x^5 - 35x^4 + 40x^3 + 8x^2 - 39x + 18$

d) $x^5 - 2x^4y - 6x^3y^2 - 4x^2y^3 - 16xy^4$

e) $2x^2 + 3xy + xz - 2y^2 + 7yz - 3z^2$

f) $15xy^5 - 19x^2y^4 + 31x^3y^3 - 20x^4y^2 + 35x^5y - 18x^6$

g) $24x^8 - 48x^7 + 2x^6 + 32x^5 - 8x^4 - 2x^3$

h) $20x^4 - 41x^3 + 37x^2 - 28x - 24$

i) $6x^5 - 6x^4 + x^3 - x^2 - 12x + 12$ j) $6x^5 - 9x^4 - 7x^3 + 24x^2 - 6x + 9$

k) $60x^3 + 43x^2 - 34x - 24$

l) $2x^8 - x^7 - 6x^6 + 6x^5 - 9x^4 - 7x^3 + 24x^2 - 6x + 9$

(8.) a) $0{,}18x^2 - 0{,}48xy - 0{,}32y^2$

b) $0{,}1x^3 - 0{,}5x^2y + 0{,}78xy^2 - 0{,}54y^3$

c) $0{,}24x^4 - 1{,}22x^3y + 1{,}8x^2y^2 - 0{,}95xy^3 + 0{,}2y$

d) $-15a^{2x+3} + 16a^{2x+2} + 21a^{2x+1} - 10a^{2x}$

e) $15b^{x+1} - 24b^x + 21b^{x-1} - 12b^{x-2}$

f) $-9x^{2a-1} + 11x^{2a-2} - 3x^{2a-3} - 2x^{2a}$

(9.) a) $8x - 21y$

b) $16a - 81x$

c) $24x^2 - 8x + 6a^2 - 32a$

d) $41y - 2x$

e) $-7x - 7y$

f) $-6x + 7y$

g) $4x$

h) $y^2 - 27x^2$

i) $-4x^3 + 8x^2 - \frac{13}{2}xy^2$

j) $6x^5 - 11x^4 + 3x^3 - 19x^2 + 10x - 1$

k) $8x - 16$

l) $2x^2 + 2y^2 - 2z^2$

3.3.3.3. Potencia de Expresiones Algebraicas:

- **Potencia n-ésima de un monomio:** Es el monomio resultante de tomar "n" veces como factor el monomio dado.

Ejemplos:

a) $(3x^2y^3)^2 = (3x^2y^3)(3x^2y^3) = 3.3.x^2.x^2.y^3.y^3 = \boxed{9x^4y^6}$

b) $(2x^3yz^4)^3 = (2x^3yz^4)(2x^3yz^4)(2x^3yz^4) = \boxed{8x^9y^3z^{12}}$

* De estos ejemplos deducimos que:

- Para elevar al cuadrado un monomio se eleva al cuadrado el coeficiente y el exponente de cada letra y se multiplica por 2.

Ejemplo: $(5x^3y^2z)^2 = 25x^6y^4z^2$

- Para elevar al cubo un monomio se eleva al cubo el coeficiente y el exponente de cada letra y se multiplica por 3.

Ejemplo: $(3x^2y^3z)^3 = 27x^6y^9z^3$

- La potencia n-ésima de un monomio es igual al monomio cuyo coeficiente es la potencia n-ésima del coeficiente del monomio dado y cada letra queda con exponente igual al producto del exponente dado por "n".

Ejemplo: $(x^2y^3z^4)^n = x^{2n}y^{3n}z^{4n}$

- **Cuadrado de un Polinomio:** El cuadrado de un polinomio es igual al producto del polinomio por si mismo.

Ejemplos:

1). $(x + 2y)^2 = (x + 2y)(x + 2y) = x^2 + 2xy + 2xy + 4y^2 = \boxed{x^2 + 4xy + 4y^2}$

2). $(3x - y)^2 = (3x - y)(3x - y) = 9x^2 - 3xy - 3xy + y^2 = \boxed{9x^2 - 6xy + y^2}$

3). $(2x + y - 1)^2 = (2x + y - 1)(2x + y - 1) = 4x^2 + 2xy - 2x + 2xy + y^2 - y - 2x - y + 1$

$= \boxed{4x^2 + y^2 + 4xy - 4x - 2y + 1}$

- **Potencia n-ésima de un polinomio:** Es el polinomio que se obtiene de repetir "n" veces como factor el polinomio dado.

Ejemplo 1: Hallar $(x + y - z)^3$

Resolución:

$(x + y - z)^3 = (x + y - z)(x + y - z)(x + y - z) = (x^2 + 2xy - 2xz + y^2 - 2yz + z^2)(x + y - z)$

$$\begin{array}{r} (x + y - z) \\ (x + y - z) \end{array} \Big\} \times$$

$$\begin{array}{l} x^2 + xy - xz \\ \quad + xy \quad + y^2 - yz \\ \qquad - xz \quad - yz + z^2 \end{array} \Big\} +$$

$$\boxed{x^2 + 2xy - 2xz + y^2 - 2yz + z^2}$$

- ***Luego; multiplicamos:***

$$\begin{array}{l} x^2 + 2xy - 2xz + y^2 - 2yz + z^2 \\ x + y - z \end{array} \Big\} \times$$

$$\begin{array}{l} x^3 + 2x^2y - 2x^2z + xy^2 - 2xyz + xz^2 \\ \quad + x^2y \quad + 2xy^2 - 2xyz \quad + y^3 - 2y^2z + yz^2 \\ \qquad - x^2z \quad - 2xyz + 2xz^2 \quad - y^2z + 2yz^2 - z^3 \\ \hline x^3 + 3x^2y - 3x^2z + 3xy^2 - 6xyz + 3xz^2 + y^3 - 3y^2z + 3yz^2 - z^3 \end{array}$$

$\therefore$ $\boxed{(x + y - z)^3 = x^3 + y^3 - z^3 + 3x^2y - 3x^2z + 3xz^2 - 3y^2z + 3yz^2 + 3xy^2 - 6xyz}$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 
27

1. Efectuar las siguientes potencias realizando los productos.

a) $(5x^3y^2z)^2$	e) $(5x^3y^2z^{-2})^3$	i) $(3x^ny^{2n})^3$
b) $(-7x^2y^3z^4)^2$	f) $(-\frac{3}{4}x^4y^2z^3)^3$	j) $(-5x^{n+1}y^{n+2})^2$
c) $(x^3y^2z^4w^{-2})^2$	g) $(2x^3y^2z)^4$	k) $(\frac{2}{5}x^{n-1}y^{n-2})^4$
d) $(-4x^3y^2z)^3$	h) $(0{,}2x^3y^4z^{-1})^4$	l) $(x^ny^{n+1}z^{n-1})^5$

2. Efectuar las siguientes potencias realizando los productos.

a) $(5x - y)^2$	e) $(x^2 - 3x)^2$	i) $(x^3 + 3x^2 - 2x + 1)^2$
b) $(3x + 2y)^2$	f) $(x^2 - 3)^3$	j) $(x^2 + \frac{2}{3}x + 1)^2$
c) $(x - 3y)^2$	g) $(x - 2y + z)^2$	k) $(3x + y - z)^3$
d) $(2x - y - z)^2$	h) $(x^2 - 2x + 3)^2$	l) $(2x + y + 3z)^3$

3. Efectuar las siguientes potencias realizando los productos.

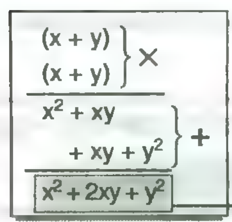
a) $(y - 4x)^2$	e) $(x - 3y)^3$	i) $(x + y - 1)^2$
b) $(3y - 4x)^2$	f) $(2x - y)^3$	j) $(3x - y + 2)^2$
c) $(2x + 3y)^2$	g) $(x^3 - 1)^3$	k) $(2x + y - 3)^3$
d) $(x^2 + 5x)^2$	h) $(3x + 2y)^2$	l) $(x - 2y + 1)^3$

3.4. Productos Notables - Identidades de Legendre.

Hablando de productos se trata de cierta multiplicación que por su conveniencia y empleo adquieren muchísima importancia de aqui viene la denominación de **"Productos Notables"** para las **Identidades de Legendre**.

Dichos productos son aplicables a toda clases de términos; pero para mayor facilidad y claridad de comprensión se usarán los términos más comunes y sencillos. Los **Productos Notables** más comunes son:

3.4.1. Cuadrado de la Suma de Dos Monomios:



Sea: $(x + y)$, la suma de los monomios "x" y "y". Elevar al cuadrado $(x + y)$ equivale a multiplicar el binomio $(x + y)$ por sí mismo. Esto es:

$(x + y)^2 = (x + y)(x + y)$; efectuando el producto se tiene:

$$\therefore \boxed{(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2}$$

Lo que nos dice:

El cuadrado de la suma de dos monomios es igual al cuadrado del primero, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

Ejemplos:

a) $(x + 3)^2 = x^2 + 2(x)(3) + 3^2$

$= \boxed{x^2 + 6x + 9}$

b) $(2x + 5)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(5) + 5^2$

$= \boxed{4x^2 + 20x + 25}$

c) $(x^2 + 2y)^2 = (x^2)^2 + 2x^2.(2y) + (2y)^2$

$= \boxed{x^4 + 4x^2y + 4y^2}$

d) $(\frac{2}{5}x^3y + \frac{3}{2})^2 = (\frac{2}{5}x^3y)^2 + 2(\frac{2}{5}x^3y).(\frac{3}{2}) + (\frac{3}{2})^2$

$= \boxed{\frac{4}{25}x^6y^2 + \frac{6}{5}x^3y + \frac{9}{4}}$

e) $(0{,}3x^4y + 0{,}5z^2)^2 = (0{,}3x^4y)^2 + 2(0{,}3x^4y)\ (0{,}5z^2) + (0{,}5z^2)^2$

$= \boxed{0{,}09x^8y^2 + 0{,}3x^4yz^2 + 0{,}25z^4}$

3.4.2. Cuadrado de la Diferencia de Dos Monomios:

$$\begin{array}{r} (x - y) \\ (x - y) \\ \hline x^2 - xy \quad\quad \\ - xy + y^2 \\ \hline \boxed{x^2 - 2xy + y^2} \end{array}$$

Elevar al cuadrado el binomio $(x - y)$, equivale a multiplicarlo por sí mismo. Esto es:

$(x - y)^2 = (x - y)(\ x - y)$; efectuando el producto se tiene:

$\therefore\ \boxed{(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2}$

Lo que nos dice:

*El cuadrado de la diferencia de dos monomios es igual al cuadrado del primero, **menos** el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.*

Ejemplos:

a) $(5x - 3)^2 = (5x)^2 - 2(5x)(3) + 3^2$

$= \boxed{25x^2 - 30x + 9}$

b) $(3x^2 - 2y)^2 = (3x^2)^2 - 2(3x^2)(2y) + (2y)^2$

$= \boxed{9x^4 - 12x^2y + 4y^2}$

c) $(2xy^3 - 5z^4)^2 = (2xy^3)^2 - 2(2xy^3)(5z^4) + (5z^4)^2$

$= \boxed{4x^2y^6 - 20xy^3z^4 + 25z^8}$

d) $(\frac{2}{3}x^2y - \frac{5}{4}x)^2 = (\frac{2}{3}x^2y)^2 - 2(\frac{2}{3}x^2y)(\frac{5}{4}x) + (\frac{5}{4}x)^2$

$= \boxed{\frac{4}{9}x^4y^2 - \frac{5}{3}x^3y + \frac{25}{16}x^2}$

e) $(0{,}8x^3 - 0{,}3y)^2 = (0{,}8x^3)^2 - 2(0{,}8x^3)(0{,}3y) + (0{,}3y)^2$

$= \boxed{0{,}64x^6 - 0{,}48x^3y + 0{,}09y^2}$

Nota:

A cada término de la forma: $(x^2 + 2xy + y^2)$ *ó* $(x^2 - 2xy + y^2)$*, resultados de los productos notables* $(x + y)^2$ *y* $(x - y)^2$*; respectivamente se le denomina* ***Trinomio Cuadrado Perfecto.***

Demostrar que:

$(-a - b)^2 = (a + b)^2$

Demostración:

La expresión del primer miembro; se puede escribir así:

$[(-a) + (-b)]^2 = (a + b)^2$;

Desarrollando el binomio cuadrado del primer miembro, se obtiene:

$(-a)^2 + 2(-a)(-b) + (-b)^2 = (a + b)^2$

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$\therefore \boxed{(-a - b)^2 = (a + b)^2}$ ***l.q.q.d.***

Demostrar que:

$(a - b)^2 = (b - a)^2$

Demostración:

Desarrollando cada binomio al cuadrado, se obtiene:

$a^2 - 2ab + b^2 = b^2 - 2ab + a^2$;

Ordenamos los términos del segundo miembro:

$a^2 - 2ab + a^2 = b^2 - 2ab + b^2$

$\therefore \boxed{(a - b)^2 = (b - a)^2}$ ***l.q.q.d.***



TALLER DE EJERCICIOS Nº 28

1. Desarrollar los siguientes productos notables:

a) $(x + 3y)^2 =$	e) $(10z + 9x)^2 =$	i) $(11x^5 + 13y^2)^2 =$
b) $(5x + 6y)^2 =$	f) $(15x^3 + 8y)^2 =$	j) $(2x^2 + 14y^3)^2 =$
c) $(4x^2 - y)^2 =$	g) $(x^3 + 15y^2)^2 =$	k) $(20x^2 + 12y)^2 =$
d) $(5x + 8y)^2 =$	h) $(20z^2 + 12y)^2 =$	l) $(13x^6 + 9y^3)^2 =$

2. Desarrollar los siguientes Productos Notables:

- a) $(xy + zw)^2 =$
- b) $(2ax + 5bz)^2 =$
- c) $(6x^2y + 3z^3)^2 =$
- d) $(5a^2x + 8by)^2 =$
- e) $(12x^3y^2 + 6a^2)^2 =$
- f) $(2b^2z + 15x^3y^2)^2 =$
- g) $(x^2yz + 2y)^2 =$
- h) $(3xy + 2abc)^2 =$
- i) $(1 + 5axy^2)^2 =$

3. Desarrollar los siguientes productos notables:

- a) $(\frac{3}{4}x + \frac{5}{9}y)^2 =$
- b) $(\frac{3}{7}xy^2 + \frac{4}{5}xy)^2 =$
- c) $(\frac{8}{13}x^2y + \frac{3}{5}ab)^2 =$
- d) $(0,3x + 0,8y)^2 =$
- e) $(0,9x^2 + 0,5y^2)^2 =$
- f) $(0,2xy + 0,6)^2 =$
- g) $(a^n + b^m)^2 =$
- h) $(x^{2n} + b^{n+1})^2 =$
- i) $(3a^{n+2} + 5b^{n+1})^2 =$

4. Verificar las siguientes igualdades:

- a) $(3x + 4y)^2 = (4y + 3x)^2$
- b) $(\frac{2}{5}x + \frac{3}{4}y)^2 = (\frac{3}{4}y + \frac{2}{5}x)^2$
- c) $(0,5x + 0,8y)^2 = (0,8y + 0,5x)$
- d) $(5x + 2y)^2 = (2y + 5x)^2$
- e) $(0,2x + 0,5y)^2 = (0,5y + 0,2x)^2$
- f) $(\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}y)^2 = (\frac{5}{4}y + \frac{1}{2}x)^2$

5. Efectuar los siguientes productos notables:

- a) $(b - x)^2 =$
- b) $(6x - 4y)^2 =$
- c) $(8y - 3x)^2 =$
- d) $(4z - 2)^2 =$
- e) $(5x^2 - 3y^2)^2 =$
- f) $(12x^2 - 8y^3)^2 =$
- g) $(x^5 - 3y^3)^2 =$
- h) $(18x^2 - 9y^2)^2 =$
- i) $(13z^3 - 8y^2)^2 =$

6. Efectuar los siguientes Productos Notables:

- a) $(ab - xy)^2 =$
- b) $(3xy - 8z)^2 =$
- c) $4a^2b - 3y^3)^2 =$
- d) $(8ab - 6yz)^2 =$
- e) $(15x^3 - 18y^2)^2 =$
- f) $(1 - 9abx)^2 =$
- g) $(2abx^2 - 4y)^2 =$
- h) $(3 - 2xyz)^2 =$
- i) $(14x^2y^2 - 1)^2 =$

7. Desarrollar los siguientes productos notables:

- a) $(\frac{5}{8}x - \frac{3}{4}y)^2 =$
- b) $(\frac{2}{3}x^2 - 8)^2 =$
- c) $(\frac{1}{9} - 3x)^2$
- d) $(0,1x - 0,8y)^2 =$
- e) $(0,7xy - 0,6x^2y)^2 =$
- f) $(0,2x^2 - 0,8)^2 =$
- g) $(3a^{x-1} - 2b^{x+1})^2$
- h) $(8x^{n+1} - x^n)^2 =$
- i) $(6 - 2x^n)^2 =$

8. Verificar las siguientes igualdades:

a) $(-3x-7)^2 = (3x+7)^2$	d) $(2x-3y)^2 = (3y-2x)^2$
b) $(-5xy-2x^2)^2 = (5xy+2x^2)^2$	e) $(5-4x)^2 = (4x-5)^2$
c) $(-12-3x^2y)^2 = (12+3x^2y)^2$	f) $(\frac{x}{3}-\frac{y}{4})^2 = (\frac{y}{4}-\frac{x}{3})^2$

9. Halla el binomio que da origen a cada trinomio cuadrado perfecto.

a) $(\quad)^2 = x^2+12x+36$	g) $(\quad)^2 = x^2+8x+16$
b) $(\quad)^2 = x^2+22x+121$	h) $(\quad)^2 = x^2-36x+324$
c) $(\quad)^2 = x^2-14x+49$	i) $(\quad)^2 = x^2-40x+400$
d) $(\quad)^2 = x^2-26x+169$	j) $(\quad)^2 = x^2+28x+196$
e) $(\quad)^2 = x^2+16x+64$	k) $(\quad)^2 = x^2+30x+225$
f) $(\quad)^2 = x^2+18x+81$	l) $(\quad)^2 = x^2+42x+441$

10. Halla el binomio que da origen a cada binomio cuadrado perfecto.

a) $x^2+20x+100 = (\quad)^2$	g) $x^2-22x+121 = (\quad)^2$
b) $z^2+6z+9 = (\quad)^2$	h) $x^2-26x+169 = (\quad)^2$
c) $x^2+40x+400 = (\quad)^2$	i) $x^2-6x+9 = (\quad)^2$
d) $x^2-30x+225 = (\quad)^2$	j) $x^2+14x+49 = (\quad)^2$
e) $x^2-8x+16 = (\quad)^2$	k) $x^2-12x+36 = (\quad)^2$
f) $x^2-42x+441 = (\quad)^2$	l) $x^2-28x+196 = (\quad)^2$

3.4.3. Producto de la Suma por la diferencia de Dos Monomios:

$$\begin{array}{r} (x+y) \\ (x-y) \end{array} \Big\} \times$$

$$\begin{array}{r} x^2 + \cancel{xy} \\ -\cancel{xy} - y^2 \end{array} \Big\} +$$

$$\boxed{x^2 - y^2}$$

Si: "x" y "y" representan dos monomios cualesquiera, efectuamos el producto $(x+y)(x-y)$ como sigue:

$$\therefore \boxed{(x+y)(x-y) = x^2 - y^2}$$

Lo que nos dice:

El producto de la suma por la diferencia de dos monomios es igual al cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo.

Ejemplos:

a) $(x+2y)(x-2y) = x^2-(2y)^2 = \boxed{x^2-4y^2}$

b) $(x^n+3)(x^n-3) = (x^n)^2-3^2 = \boxed{x^{2n}-9}$

c) $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = x^2 - \sqrt{3}^2 =$ $\boxed{x^2 - 3}$

d) $(2x^2 - 1)(2x^2 + 1) = (2x^2)^2 - 1^2 =$ $\boxed{4x^4 - 1}$

e) $(9 - 3x)(9 + 3x) = 9^2 - (3x)^2 =$ $\boxed{81 - 9x^2}$

f) $(\sqrt{5} - \sqrt{2}x)(\sqrt{5} + \sqrt{2}x) = \sqrt{5}^2 - (\sqrt{2}x)^2 =$ $\boxed{5 - 2x^2}$

g) $(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1) = \sqrt{3}^2 - 1^2 = 3 - 1 =$ $\boxed{2}$

h) $(\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{7} - \sqrt{5}) = \sqrt{7}^2 - \sqrt{5}^2 = 7 - 5 =$ $\boxed{2}$

i) $(3x^2y + 5z)(3x^2y - 5z) = (3x^2y)^2 - (5z)^2 =$ $\boxed{9x^4y^2 - 25z^2}$

j) $(2x^2 + 3y)(2x^2 - 3y) = (2x^2)^2 - (3y)^2 =$ $\boxed{4x^4 - 9y^2}$

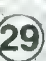
k) $(\frac{2}{5}x^3 - 2)(\frac{2}{5}x^3 + 2) = (\frac{2}{5}x^3)^2 - (2)^2 =$ $\boxed{\frac{4}{25}x^6 - 4}$

l) $(\frac{3}{4}x^m - \frac{5}{2}y^n)(\frac{3}{4}x^m + \frac{5}{2}y^n) = (\frac{3}{4}x^m)^2 - (\frac{5}{2}y^n)^2 =$ $\boxed{\frac{9}{16}x^{2m} - \frac{25}{4}y^{2n}}$

Nota: Cada binomio de la forma: $x^2 - y^2$; obteniendo como consecuencia de la multiplicación de los binomios: $(x + y)(x - y)$, se denomina "Diferencia de Cuadrados".



TALLER DE EJERCICIOS Nº 29



1. Aplica la Regla del producto notable: $(x + y)(x - y)$ y halla el resultado de:

a) $(a + 2x)(a - 2x) =$	b) $(3a + 8y)(3a - 8y) =$
c) $(5xy + 6)(5xy - 6) =$	d) $(x^5 + 1)(x^5 - 1) =$
e) $(2 + x)(x - 2) =$	f) $(6 - x^2)(x^2 + 6) =$
g) $(3x^2 - 4)(3x^2 + 4) =$	h) $(a^x + b^x)(a^x - b^x) =$
i) $(10xy^2 + 6)(10xy^2 - 6) =$	j) $(1 - 2a^{xy})(1 + 2a^{xy}) =$
k) $(3x^n + 5y^m)(3x^n - 5y^m) =$	l) $(2x + \frac{1}{3})(2x - \frac{1}{3}) =$
m) $(x^3y^4 - \frac{5}{8}z)(x^3y^4 + \frac{5}{8}z) =$	n) $(\frac{1}{2}x + b^2)(\frac{1}{2}x - b^2) =$
ñ) $(0,2x^3y + 0,8z^3)(0,2x^3y - 0,8z^3) =$	o) $(0,9y^5 - 0,1x^5)(0,9y^5 + 0,1x^5) =$

- p) $(xy^4 + 0{,}6z)(xy^4 - 0{,}6z) =$
- q) $(3x^{2n-1} + 5y^{n+2})(3x^{2n-1} - 5y^{n+2}) =$
- r) $(\sqrt{5}\,x + \sqrt{2}\,y^n)(\sqrt{5}\,x - \sqrt{2}\,y^n) =$
- s) $\left(\sqrt{3x^n} - \sqrt[4]{9y^n}\right)\left(\sqrt{3x^n} + \sqrt[4]{9y^n}\right) =$
- t) $(2x^4 - \frac{1}{2}xy)(\frac{1}{2}xy + 2x^4) =$
- u) $(x^6 + 3x^ny^n)(x^6 - 3x^ny^n) =$

2. Escribe en forma directa, el resultado de cada una de las siguientes expresiones (No es necesario efectuar la multiplicación).

- a) $(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1) = \square$
- b) $(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = \square$
- c) $(\sqrt{11} - 3)(\sqrt{11} - 3) = \square$
- d) $(5 + \sqrt{2})(5 - \sqrt{2}) = \square$
- e) $(6 + \sqrt{13})(6 - \sqrt{13}) = \square$
- f) $(2 + \sqrt{15})(\sqrt{15} - 2) = \square$
- g) $\frac{3}{4}(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1) = \square$
- h) $(\sqrt[4]{9} + 2)(2 - \sqrt[4]{9}) = \square$
- i) $[(\sqrt{7} + 2)(\sqrt{7} - 2)]^2 = \square$
- j) $[(\sqrt{13} - 3)(\sqrt{13} + 3)]^2 = \square$
- k) $5 - (\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2) = \square$
- l) $(6 - \sqrt{2})(\sqrt{2} + 6) - (3\sqrt{2})^2 = \square$
- m) $(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = \square$
- n) $(\sqrt[4]{7} + 2)(\sqrt[4]{7} - 2) - \sqrt{7} = \square$
- ñ) $\frac{3}{7}(2^3 - 6)(2^3 - 6) - (\sqrt[4]{25})^2 = \square$
- o) $(\sqrt[6]{11} + \sqrt[3]{5})(\sqrt[6]{11} - \sqrt[3]{5}) - \sqrt[3]{25} = \square$

3. En cada ejercicio siguiente, escribe los dos factores cuyo producto es el que se le da:

- a) $(\quad)(\quad) = x^2 - 100$
- b) $(\quad)(\quad) = 25 - x^2$
- c) $(\quad)(\quad) = x^4 - 16$
- d) $(\quad)(\quad) = x^6 - y^4$
- e) $(\quad)(\quad) = 225 - y^4$
- f) $(\quad)(\quad) = 121 - x^8$
- g) $\frac{1}{16} - z^4 = (\quad)(\quad)$
- h) $x^6 - 49 = (\quad)(\quad)$
- i) $0{,}25x^{4n} - 0{,}36 = (\quad)(\quad)$
- j) $(2x)^2 - \sqrt[3]{25} = (\quad)(\quad)$
- k) $\frac{16}{9}z^2 - \frac{1}{4}x^2 = (\quad)(\quad)$
- l) $4x^{2n} - y^{4n}\ (\quad)(\quad)$

3.4.4. Producto de Dos Binomios que tienen un término Común:

1er. Caso: **Cuando los dos factores binomios son sumas, osea:**

$(x + a)(x + b)$: El producto de dos binomios sumas que tienen sus primeros

$$\begin{array}{r} (x+a) \\ (x+b) \end{array} \Big\} \times$$

$$\begin{array}{l} x^2 + ax \\ \quad + bx + ab \end{array} \Big\} +$$

$$\boxed{x^2 + (a+b)x + ab}$$

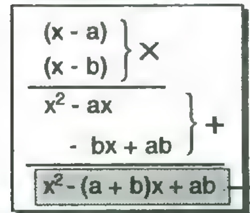
términos iguales, es igual al cuadrado del primer término más el producto del primer término por la suma de los segundos términos y más el producto de los segundos términos. Veamos:

$$\therefore \boxed{(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab}$$

Ejemplos:

a) $(x+3)(x+7) = x^2 + (3+7)x + 3.7$ $= \boxed{x^2 + 10x + 21}$
b) $(x+2)(x+5) = x^2 + (2+5)x + 2\,.\,5$ $= \boxed{x^2 + 7x + 10}$
c) $(2x+1)(2x+3) = (2x)^2 + (1+3)2x + 1.3$ $= \boxed{4x^2 + 8x + 3}$
d) $(x + \frac{1}{3})(x + \frac{1}{2}) = x^2 + (\frac{1}{3} + \frac{1}{2})x + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$ $= \boxed{x^2 + \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}}$
e) $(x + 0{,}5)(x + 0{,}2) = x^2 + (0{,}5 + 0{,}2)x + 0{,}5(0{,}2)$ $= \boxed{x^2 + 0{,}7x + 0{,}1}$
f) $(3x+2)(3x+5) = (3x)^2 + (2+5)3x + 2.5$ $= \boxed{9x^2 + 21x + 10}$

2do. Caso: **Cuando los dos factores binomios son diferencias, osea:**



(x - a)(x - b): El producto de dos binomios diferencias que tienen sus primeros términos iguales, es igual al cuadrado del primer término menos el producto del primer término por la suma de los segundos términos y más el producto de los segundos términos. Veamos:

$$\therefore \boxed{(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab}$$

Ejemplos:

a) $(x-4)(x-3) = x^2 - (4+3)x + 4.3$ $= \boxed{x^2 - 7x + 12}$	b) $(x-6)(x-1) = x^2 - (6+1)x + 6.1$ $= \boxed{x^2 - 7x + 6}$

c) $(2x - 3)(2x - 5) = (2x)^2 - (3 + 5)(2x) + 3.5$ $= \boxed{4x^2 - 16x + 15}$
d) $(3z - 1)(3z - 4) = (3z)^2 - (1 + 4)(3z) + 1.4$ $= \boxed{9z^2 - 15z + 4}$
e) $(x - \frac{1}{4})(x - \frac{1}{3}) = x^2 - (\frac{1}{4} + \frac{1}{3})x + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}$ $= \boxed{x^2 - \frac{7}{12}x + \frac{1}{12}}$
f) $(x - 0{,}3)(x - 0{,}6) = x^2 - (0{,}3 + 0{,}6)x + 0{,}3(0{,}6)$ $= \boxed{x^2 - 0{,}9x + 0{,}18}$

3er. Caso: **Cuando los dos factores binomios son una suma y una diferencia osea:**

$$\begin{array}{r} (x + a) \\ (x - b) \\ \hline x^2 + ax \\ - bx - ab \\ \hline x^2 + (a - b)x - ab \end{array}$$

$(x + a)(x - b)$: El producto de dos binomios de una suma por una diferencia, que tienen el primer término igual; es igual al cuadrado del primer término; más el producto del primer término por la suma de los segundos términos y menos el producto de los segundos términos. Veamos:

$$\therefore \boxed{(x + a)(x - b) = x^2 + (a - b)x - ab}$$

Ejemplos:

a) $(x + 5)(x - 2) = x^2 + [(5) + (-2)]x - 5.2$ $= \boxed{x^2 + 3x - 10}$
b) $(x - 7)(x + 3) = x^2 + [(-7) + (3)]x - 7.3$ $= \boxed{x^2 - 4x - 21}$
c) $(3x + 2)(3x - 5) = (3x)^2 + [(2) + (-5)](3x) - 2.5$ $= \boxed{9x^2 - 9x - 10}$
d) $(\frac{2}{3}x - 6)(\frac{2}{3}x + 3) = (\frac{2}{3}x)^2 - [(-6) + (3)](\frac{2}{3}x) - 6\cdot3$ $= \boxed{\frac{4}{9}x^2 + 2x + 18}$
e) $(0{,}3x + 4)(0{,}3x - 2) = (0{,}3x)^2 + [(4) + (-2)]\,(0{,}3x) - 4.2$ $= \boxed{0{,}09x^2 + 0{,}6x - 8}$

3.4.5. Cuadrado de un Polinomio cualquiera, osea: $(x + y + z)^2$:

El cuadrado de un polinomio cualquiera es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primer término por todos los términos que le siguen a este término más el cuadrado del segundo término más el doble producto del segundo término por todos los términos que siguen al segundo; más el cuadrado del tercer término más el doble producto del tercer término por todos los términos que le siguen al tercero y asi sucesivamente, hasta concluir con el cuadrado del último término.

Ejemplos:

a) $(x + y + z + w)^2 = x^2 + 2xy + 2xz + 2xw + y^2 + 2yz + 2yw + z^2 + 2zw + w^2$

b) $(2x - 3y + z)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(-3y) + 2(2x)z + (-3y)^2 + 2(-3y)z + z^2$

$= \boxed{4x^2 - 12xy + 4xz + 9y^2 - 6yz + z^2}$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 30

1. Hallar el producto de:

a) $(x + 3)(x + 8) =$	f) $(x^2 + 12)(x^2 + 15) =$	k) $(x^2 + 0,5)(x^2 + 0,3) =$
b) $(x^2 + 1)(x^2 + 2) =$	g) $(x^4 + 6)(x^4 + 9) =$	l) $(2x + 1)(2x + 6) =$
c) $(x^3 + 5)(x^3 + 4) =$	h) $(x^3 + 3)(x^3 + 11) =$	m) $(3x + 2)(3x + 4) =$
d) $(x + 10)(x + 5) =$	i) $(x^2 + \frac{1}{2})(x^2 + \frac{1}{3}) =$	n) $(5x + 7)(5x + 3) =$
e) $(x + 9)(x + 8) =$	j) $(x + \frac{2}{5})(x + \frac{3}{4}) =$	ñ) $(7x + \frac{1}{3})(7x + \frac{2}{5}) =$

2. Hallar el producto de:

a) $(x - 8)(x - 10) =$	e) $(x^3 - 7)(x^3 - 6) =$	i) $(x^3 - 0,2)(x^3 - 0,6) =$
b) $(x - 1)(x - 9) =$	f) $(x^4 - 1)(x^4 - 3) =$	j) $(2x - 3)(2x - 5) =$
c) $(x - 10)(x - 20) =$	g) $(x^2 - 0,2)(x^2 - 0,7) =$	k) $(3x^2 - 1)(3x^2 - 2) =$
d) $(x^2 - 3)(x^2 - 8) =$	h) $(x - 0,7)(x - 0,2) =$	l) $(5x + \frac{1}{3})(5x - \frac{1}{2}) =$

3. Halla el producto de:

a) $(x + 15)(x - 3) =$	f) $(x + \frac{4}{3})(x - \frac{3}{2}) =$	k) $(2x + 1)(2x - 3) =$
b) $(x - 12)(x + 7) =$	g) $(x - \frac{1}{2})(x + \frac{2}{5}) =$	l) $(5x + 2)(5x - 6) =$

c) $(x - 5)(x + 4) =$	h) $(x + \frac{2}{3})(x - \frac{5}{4}) =$	m) $(3x^2 + 6)(3x^2 - 1) =$
d) $(x^2 + 9)(x^2 - 2) =$	i) $(x - 0{,}7)(x + 0{,}2) =$	n) $(5x^3 - 2)(5x^3 + 3) =$
e) $(x^3 - 13)(x^3 + 8) =$	j) $(x + 0{,}9)(x - 0{,}7) =$	ñ) $(2x^6 - 1)(2x^6 + 5) =$

4. Desarrollar los siguientes cuadrados:

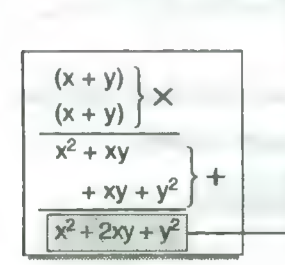
a) $(x + y - z)^2 =$	e) $(2x - y + 2z + 3)^2 =$	i) $(3x - y + 4)^2 =$
b) $(2x + y + 3)^2 =$	f) $(x + y - 3z + w)^2 =$	j) $(x - 2y + 3z)^2 =$
c) $(2x + 1 - 2y)^2 =$	g) $(x + 3y - 1)^2 =$	k) $(x - y + 2z - 3)^2 =$
d) $(1 + 2y + z)^2 =$	h) $(x + y + z + w)^4 =$	l) $(x - y + 2w + z)^4 =$

3.4.6. Cubo de la suma de dos binomios:

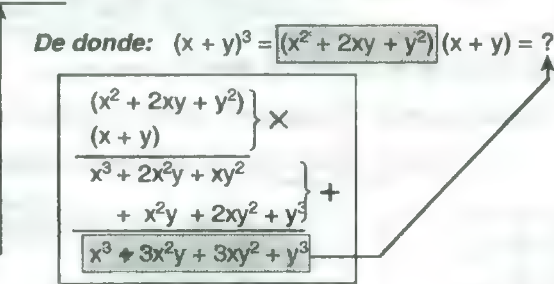
Elevar al cubo el binomio $(x + y)$ equivale a tomar $(x + y)$ tres veces como factor, esto es:

$(x + y)^3 = (x + y)(x + y)(x + y)$; efectuando el producto se tiene:

De donde: $(x + y)^3 = (x^2 + 2xy + y^2)(x + y) = ?$



$$\begin{array}{l} (x + y) \\ (x + y) \quad \times \\ \hline x^2 + xy \\ \quad + xy + y^2 \quad + \\ \hline x^2 + 2xy + y^2 \end{array}$$



$$\begin{array}{l} (x^2 + 2xy + y^2) \\ (x + y) \quad \times \\ \hline x^3 + 2x^2y + xy^2 \\ \quad + x^2y + 2xy^2 + y^3 \quad + \\ \hline x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \end{array}$$

$$\therefore \quad (x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Lo que nos dice:

El cubo de la suma de dos monomios es igual al cubo del primero, más el triple producto del cuadrado del primero por el segundo, más el triple producto del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo.

Ejemplos:

a) $(x + 2)^3 = x^3 + 3x^2(2) + 3x(2)^2 + 2^3$

$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

b) $(3x + 4)^3 = (3x)^3 + 3(3x)^2 (4) + 3(3x)(4)^2 + 4^3$

$= \boxed{27x^3 + 108x + 144x + 64}$

c) $(x + 5)^3 = x^3 + 3x^2(5) + 3x(5)^2 + 5^3$

$= \boxed{x^3 + 15x^2 + 75x + 125}$

d) $(2x + 1)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2(1) + 3(2x)(1)^2 + 1^3$

$= \boxed{8x^3 + 12x^2 + 6x + 1}$

e) $(x^2y + 2z^2)^3 = (x^2y)^3 + 3(x^2y)^2(2z^2) + 3(x^2y)(2z^2)^2 + (2z^2)^3$

$= \boxed{x^6y^3 + 6x^4y^2z^2 + 12x^2yz^4 + 8z^6}$

f) $(\frac{2}{3}x^3y^4 + \frac{1}{2}z)^3 = (\frac{2}{3}x^3y^4)^3 + 3(\frac{2}{3}x^3y^4)^2(\frac{1}{2}z) + 3(\frac{2}{3}x^3y^4)(\frac{1}{2}z)^2 + (\frac{1}{2}z)^3$

$= \boxed{\frac{8}{27}x^9y^{12} + \frac{2}{3}x^6y^8z + \frac{1}{2}x^3y^4z^2 + \frac{1}{8}z^3}$

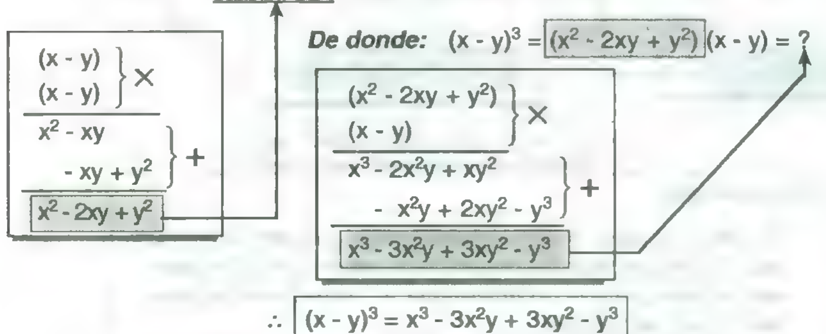
g) $(0{,}3xz^2 + 0{,}5y)^3 = (0{,}3xz^2)^3 + 3(0{,}3xz^2)^2(0{,}5y) + 3(0{,}3xz^2)(0{,}5y)^2 + (0{,}5y)^3$

$= \boxed{0{,}027x^3z^6 + 0{,}135x^2z^4y + 0{,}225xz^2y^2 + 0{,}125y^3}$

3.4.7. Cubo de la diferencia de dos monomios:

Elevar a cubo $(x - y)$ equivale a tomar $(x - y)$ tres veces como factor. Esto es:

$(x - y)^3 = (x - y)(x - y)(x - y)$; efectuando el producto; se tiene:



$\therefore \boxed{(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}$

Lo que nos dice:

*El cubo de la **diferencia** de dos monomios es igual al cubo del primero, **menos** el triple producto del cuadrado del primero por el segundo, **más** el triple producto del primero por el cuadrado del segundo, **menos** el cubo del segundo.*

Ejemplos:

a) $(x - 4)^3 = x^3 - 3x^2(4) + 3x(4)^2 - 4^3$

$= \boxed{x^3 - 12x^2 + 48x - 64}$

b) $(2x - 3)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2(3) + 3\,(2x)(3)^2 - 3^3$

$= \boxed{8x^3 - 36x^2 + 54x - 27}$

c) $(x^2 - y^3)^3 = (x^2)^3 - 3(x^2)^2y^3 + 3\,(x^2)(y^3)^2 - (y^3)^3$

$= \boxed{x^6 - 3x^4y^3 + 3x^2y^6 - y^9}$

d) $(x - y^2)^3 = x^3 - 3x^2(y^2) + 3x(y^2)^2 - (y^2)^3$

$= \boxed{x^3 - 3x^2y^2 + 3xy^4 - y^6}$

e) $(\frac{3}{2}x^2y - \frac{1}{3}z)^3 = (\frac{3}{2}x^2y)^3 - 3(\frac{3}{2}x^2y)^2(\frac{1}{3}z) + 3(\frac{3}{2}x^2y)(\frac{1}{3}z)^2 - (\frac{1}{3}z)^3$

$= \boxed{\frac{27}{8}x^6y^3 - \frac{9}{4}x^4y^2z + \frac{1}{2}x^2yz^2 - \frac{1}{27}z^3}$

f) $(0{,}4x^3 - 0{,}2y^2z^4)^3 = (0{,}4x^3)^3 - 3(0{,}4x^3)^2(0{,}2y^2z^4) + 3(0{,}4x^3)(0{,}2y^2z^4)^2 - (0{,}2y^2z^4)^3$

$= \boxed{0{,}064x^9 - 0{,}096x^6y^2z^4 + 0{,}048x^3y^4z^8 - 0{,}008y^6z^{12}}$

Demostrar que: $(-x - y)^3 = -(x + y)^3$

Demostración:

- La expresión del primer miembro, se puede escribir así:

$[-(x + y)]^3 = -(x + y)^3$

$[-1(x + y)]^3 = -(x + y)^3$; ***Por propiedad:*** $\boxed{(A.B)^n = A^n.B^n}$

$(-1)^3.(x + y)^3 = -(x + y)^3$

$-1(x + y)^3 = -(x + y)^3 \Rightarrow -(x + y)^3 = -(x + y)^3$

$\therefore \boxed{(-x - y)^3 = -(x + y)^3}$ ***l.q.q.d.***



TALLER DE EJERCICIOS Nº 31

1. Halla, aplicando las Reglas de los productos notables, el resultado de:

a) $(x + y)^3 =$	f) $(x^2 + 4)^3 =$	k) $(x^6 + 3)^3 =$
b) $(2x + 3)^3 =$	g) $(2x + 5)^3 =$	l) $(2x^4 + 3)^3 =$

c) $(3x + y)^3 =$	h) $(2x^2 + 1)^3 =$	m) $(x^5 + \frac{1}{2})^3 =$
d) $(ax + y)^3 =$	i) $(x^2 + y^2)^3 =$	n) $(a^2y^3 + 3y^4)^3 =$
e) $(3x + 2by)^3 =$	j) $(2ax^2 + 3b^2)^3 =$	ñ) $(x^6 + 2y^5)^3 =$

2. Halla, aplicando las reglas de los productos notables, el resultado de:

a) $(\frac{1}{2} + x)^3 =$	e) $(0{,}4x^2 + 0{,}2y)^3 =$	i) $(x^{n+1} + b)^3 =$
b) $(\frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{2}y^2)^3 =$	f) $(0{,}1x^2 + 0{,}3y)^3 =$	j) $(x^3 - a^n)^3 =$
c) $(\frac{2}{5} + 2x)^3 =$	g) $(a^x + 2b^x)^3 =$	k) $(0{,}6x^n + 0{,}2)^3 =$
d) $(0{,}5x + 0{,}3)^3 =$	h) $(3x^n + 2y)^3 =$	l) $(xy^2 + 0{,}8)^3 =$

3. Halla, aplicando las Reglas de los productos notables, el resultado de:

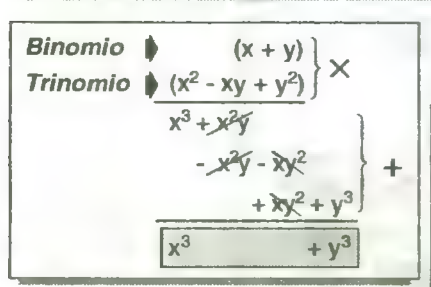
a) $(x - 5)^3 =$	f) $(x^2 - y^3)^3 =$	k) $(-3z - 4y)^3 =$
b) $(3 - x)^3 =$	g) $(2ay^2 - 3b^2)^3 =$	l) $(x^4 - 2y^2)^3 =$
c) $(2x - 3y)^3 =$	h) $(x^2y^2 - 3b)^3 =$	m) $(2x^6 - 3)^3 =$
d) $(ax - b)^3 =$	i) $(-x - 3y)^3 =$	n) $(x^3 - \frac{1}{3})^3 =$
e) $(3b - 2ay)^3 =$	j) $(-2x - y)^3 =$	ñ) $(2x^2 - \frac{1}{2}y)^3 =$

4. Halla, aplicando las Reglas de los productos notables, el resultado de:

a) $(\frac{2}{3} - x)^3 =$	e) $(0{,}1x^2 - 0{,}2y)^3 =$	i) $(x^n - y^n)^3 =$
b) $(x - \frac{1}{2}y)^3 =$	f) $(0{,}3x - 0{,}4y)^3 =$	j) $(2a^x - 3y)^3 =$
c) $(3x^2 - \frac{2}{5}y)^3 =$	g) $(0{,}5y^2 - 0{,}2)^3 =$	k) $(3x^2 - 2y^n)^3 =$
d) $(\frac{xy}{3} - \frac{2}{a})^3 =$	h) $(0{,}6x^2y - 0{,}4)^3 =$	l) $(2\frac{x^n}{3} - ay^n)^3 =$

3.4.8. Suma de cubos de dos monomios:

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$$



De donde:

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

Lo que nos dice:

La suma de cubos de dos monomios, es igual a la suma de los dos monomios, multiplicado por el cuadrado del primer monomio menos el producto de los dos monomios más el cuadrado del segundo monomio.

Ejemplos:

a) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) = x^3 + 2^3$
$= \boxed{x^3 + 8}$

b) $(2x + 3)(4x^2 - 6x + 9) = (2x)^3 + (3)^3$
$= \boxed{8x^3 + 27}$
$4x^2 \to (2x)^2$; $6x \to (2x)(3)$; $9 \to 3^2$

c) $(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) = (x^2)^3 + (1)^3$
$= \boxed{x^6 + 1}$
$x^4 \to (x^2)^2$; $x^2 \to (x^2)(1)$; $1 \to 1^2$

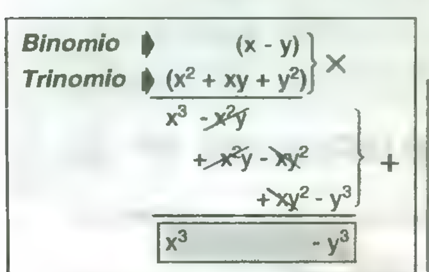
d) $(\sqrt[3]{5} + 2)(\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{40} + 4) = (\sqrt[3]{5})^3 + (2)^3$
$= 5 + 8 = \boxed{13}$
$\sqrt[3]{25} \to (\sqrt[3]{5})^2$; $\sqrt[3]{40} \to (\sqrt[3]{5})(2)$; $4 \to 2^2$

e) $(3x^4 + 2)(9x^8 - 6x^4 + 4) = (3x^4)^3 + 2^3$
$= \boxed{27x^{12} + 8}$
$9x^8 \to (3x^4)^2$; $6x^4 \to (3x^4)(2)$; $4 \to 2^2$

f) $(3xy^2 + 4)(9x^2y^4 - 12xy^2 + 16) = (3xy^2)^3 + 4^3$
$= \boxed{27x^3y^6 + 64}$
$9x^2y^4 \to (3xy^2)^2$; $12xy^2 \to (3xy^2)(4)$; $16 \to 4^2$

3.4.9. Diferencia de Cubos de dos Monomios:

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$$



De donde:

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

Lo que nos dice:

La diferencia de cubos de dos monomios, es igual a la diferencia de los dos monomios. Multiplicado por el cuadrado del primer monomio más el producto de los dos monomios más el cuadrado del segundo monomio.

Ejemplos:

a) $(x - 5)(x^2 + 5x + 25) = x^3 - 5^3$
$= \boxed{x^3 - 125}$

b) $(x^2 - y)(x^4 + x^2y + y^2) = (x^2)^3 - (y)^3$

$= \boxed{x^6 - y^3}$

$\boxed{(x^2)^2}$ $\boxed{(x^2)(y)}$ $\boxed{(y)^2}$

c) $(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}) = (\sqrt[3]{5})^3 - (\sqrt[3]{2})^3$

$= 5 - 2 = \boxed{3}$

$\boxed{(\sqrt[3]{5})^2}$ $\boxed{(\sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{2})}$ $\boxed{(\sqrt[3]{2})^2}$

d) $(x^2 - \frac{1}{2})(x^4 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}) = (x^2)^3 - (\frac{1}{2})^3$

$= \boxed{x^6 - \frac{1}{8}}$

$\boxed{(x^2)^2}$ $\boxed{(x^2)(\frac{1}{2})}$ $\boxed{(\frac{1}{2})^2}$

e) $(2x^4 - 3y)(4x^8 - 6x^4y + 9y^2) = (2x^4)^3 - (3y)^3$

$= \boxed{8x^{12} - 27y^3}$

$\boxed{(2x^4)^2}$ $\boxed{(2x^4)(3y)}$ $\boxed{(3y)^2}$

CUADRO DE PRODUCTOS NOTABLES

1. $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$	*7.* $(x + a)(x - b) = x^2 + (a - b)x - ab$
2. $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$	*8.* $(x - a)(x + b) = x^2 - (a - b)x - ab$
3. $(x - y)^2 = (y - x)^2 = x^2 - 2xy + y^2$	*9.* $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
4. $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$	*10.* $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
5. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$	*11.* $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$
6. $(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$	*12.* $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$



TALLER DE EJERCICIOS Nº  32

1. Halla, aplicando las Reglas de los productos notables, el resultado de:

a) $(x + 8)(x^2 - 8x + 64) =$

b) $(x + 6)(x^2 - 6x + 36) =$

c) $(2x + 3)(4x^2 - 6x + 9) =$

d) $(3x + 1)(9x^2 - 3x + 1) =$

e) $(5x^2 + 2)(25x^4 - 10x^2 + 4) =$

f) $(2x^3 + y^2)(4x^6 - 2x^3y^2 + y^4) =$

g) $(2xy^2 + 3)(4x^2y^4 - 6xy^2 + 9) =$	i) $(3x^n + 4)(9x^{2n} - 12x^n + 16) =$
h) $(7 + 5x)(49 - 35x + 25x^2) =$	j) $(3x^4 + 5y^2)(9x^8 - 15x^4y^2 + 25y^4) =$
k) $(13x^6 + 1)(169x^{12} - 13x^6 + 1) =$	ñ) $(2 + \sqrt[3]{7})(4 - \sqrt[3]{56} + \sqrt[3]{49}) =$
l) $(\sqrt[3]{11} + \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{121} - \sqrt[3]{22} + \sqrt[3]{4}) =$	o) $(6x + 3y^n)(36x^2 - 18xy^n + 9y^{2n}) =$
m) $(\sqrt[3]{5} + 3)(\sqrt[3]{25} - 3\sqrt[3]{5} + 9) =$	p) $(x^2 + \frac{2}{3}y)(x^4 - \frac{2}{3}x^2y + \frac{4}{9}y^2) =$
n) $(5x^{2n} + 2)(25x^{4n} - 10x^{2n} + 4) =$	q) $(\frac{x^3}{2} + 0,5)(\frac{x^6}{4} - \frac{x^3}{4} + 0,25) =$

2. Halla, aplicando las Reglas de los Productos Notables, el resultado de:

a) $(x - 4)(x^2 + 4x + 16) =$	b) $(x - 9)(x^2 + 9x + 81) =$
c) $(3x - 1)(9x^2 + 3x + 1) =$	d) $(2x^2 - 5)(4x^4 + 10x^2 + 25) =$
e) $(6x - \frac{1}{2})(36x^2 + 3x + \frac{1}{4}) =$	f) $(8x^2 - \frac{3}{4})(64x^4 + 6x^2 + \frac{9}{16}) =$
g) $(2x^n - 5)(4x^{2n} + 10x^n + 25) =$	h) $(5xy^3 - 2z)(25x^2y^6 + 10xy^3z + 4z^2) =$
i) $(3x^ny - \frac{1}{6})(9x^{2n}y^2 + \frac{x^ny}{2} + \frac{1}{36}) =$	j) $(\sqrt[3]{7} - 3)(\sqrt[3]{49} + 3\sqrt[3]{7} + 9) =$
k) $(\sqrt[3]{13} - \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{169} + \sqrt[3]{52} + \sqrt[3]{16}) =$	l) $(x^6 - y^4)(x^{12} + x^6y^4 + y^8) =$
m) $(0,2\,x^3 - 5)(0,04x^6 + x^3 + 25) =$	n) $(5x^3y^4 - 2)(25x^6y^8 + 10x^3y^4 + 4) =$
ñ) $(\sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{6})(\sqrt[3]{100} + \sqrt[3]{60} + \sqrt[3]{36}) =$	o) $(2\sqrt[3]{5} - 3)(4\sqrt[3]{25} + 6\sqrt[3]{5} + 9) =$
p) $(\frac{1}{2}\sqrt[3]{4} - 1)(\sqrt[3]{\frac{1}{4}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}} + 1) =$	q) $(\frac{1}{3}\sqrt[3]{9} - 1)(\sqrt[3]{\frac{1}{9}} + \sqrt[3]{\frac{8}{3}} + 4) =$



EJERCICIOS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA
Organizados por las Academías:
César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa.

1. Reducir: $A = -(-2[-\{-(-\overline{x + 2y} - x) - y\} - x] - 2y)$

a) $-6x$ **b)** $2x$ **c)** $2y$ **d)** $-2y$ **e)** $2x + 2y$

Resolución: $A = -(-2[-\{-(-\overline{x + 2y} - x) - y\} - x] - 2y)$

Eliminamos la barra

$A = -(-2[-\{-(-x - 2y - x) - y\} - x] - 2y)$

Eliminamos los parentesis

$A = -(-2[-\{x + 2y + x - y\} - x] - 2y)$

Eliminamos las llaves

$A = -(-2[-x - 2y - x + y - x] - 2y)$

Eliminamos los cochetes

$A = -(2x + 4y + 2x - 2y + 2x - 2y) = -(6x) \Rightarrow \therefore \boxed{A = -6x}$

Rpta. a

2. Reducir:

$$A = \left(\frac{2}{a+b}\right)^{-2} - \left(\frac{2}{a-b}\right)^{-2}$$

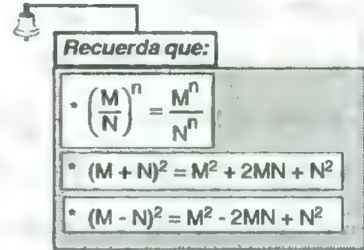
a) 1 b) ab c) a^2b^2

d) a/b e) 2ab

Resolución:

Aplicando la propiedad: $\left(\frac{M}{N}\right)^{-n} = \left(\frac{N}{M}\right)^{n}$

La expresión dada se puede escribir así:



$$A = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$A = \frac{(a+b)^2}{2^2} - \frac{(a-b)^2}{2^2} = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}$$

$$A = \frac{(a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2)}{4} = \frac{4ab}{4} \Rightarrow \therefore \boxed{A = ab}$$ ***Rpta. b***

3. Reducir: $(x + 2)(x + 4)(x + 7)(x + 5) - (x^2 + 9x + 17)^2$

a) 0 b) 9 c) 18 d) -5 e) -9

Resolución:

Agrupamos los factores del primer término de la manera siguiente:

$(x + 2)(x + 7)(x + 4)(x + 5) - (x^2 + 9x + 17)^2$

$(x^2 + 9x + 14)(x^2 + 9x + 20) - (x^2 + 9x + 17)^2$; ***hacemos:*** $\boxed{x^2 + 9x = a}$

$(a + 14)(a + 20) - (a + 17)^2$

$(a^2 + 34a + 280) - (a^2 + 34a + 289) = \boxed{-9}$ ***Rpta. e***

4. Indicar el valor del producto:

$$\sqrt[2n]{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4n]{7-4\sqrt{3}}$$

a) 1 b) 2 c) $\sqrt[n]{2}$

d) $\sqrt[4n]{3}$ e) 1/2

Resolución:

Aplicando la propiedad: $\sqrt[p]{A^q}=\sqrt[p.r]{A^{q.r}}$

En el primer factor de dicha expresión, obtenemos:

$$\sqrt[2n.2]{(2+\sqrt{3})^2}\cdot\sqrt[4n]{(7-4\sqrt{3})}$$

$$\sqrt[4n]{(7+4\sqrt{3})^2}\cdot\sqrt[4n]{(7-4\sqrt{3})}$$

Observación:

$$(2+\sqrt{3})^2=2^2+2(2)(\sqrt{3})+\sqrt{3}^2$$
$$=4+4(\sqrt{3})+3$$
$$(2+\sqrt{3})^2=(7+4\sqrt{3})$$

Aplicando la propiedad:

$$\sqrt[p]{A}\cdot\sqrt[p]{B}=\sqrt[p]{A.B}$$

Obtenemos:

$$\sqrt[4n]{(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})}=\sqrt[4n]{7^2-(4\sqrt{3})^2}$$

$$=\sqrt[4n]{49-48}=\sqrt[4n]{1}=\boxed{1}$$ ***Rpta. a***

5. Reducir:

$$A=\sqrt[16]{1+80(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)}$$

A) 1 B) 0 C) 2

D) 3 E) 9

Resolución:

La expresión dada, se puede escribir de la manera siguiente:

$$A=\sqrt[16]{1+(3^4-1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)}$$

- $80=(3^4-1)$

$$A=\sqrt[16]{1+(3^8-1)(3^8+1)(3^{16}+1)}$$

Recuerda que:

- $(A^n-B)(A^n+B)=(A^n)^2-B^2$

$$A=\sqrt[16]{1+(3^{16}-1)(3^{16}+1)}$$

$$A=\sqrt[16]{1+(3^{32}-1)}=\sqrt[16]{3^{32}}\Rightarrow\therefore\ \boxed{A=9}$$ ***Rpta. e***

6. Efectuar:

$$\sqrt[3]{2x+\sqrt{4(x^2-54)}}\cdot\sqrt[3]{2x-2\sqrt{x^2-54}}$$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 5 E) 6

Resolución:

$$A = \sqrt[3]{2x + \sqrt{4(x^2-54)}}\cdot\sqrt[3]{2x - 2\sqrt{x^2-54}}$$

$$2\sqrt{(x^2-54)} = \sqrt{2^2(x^2-54)} = \sqrt{4(x^2-54)}$$

$$A = \sqrt[3]{2x + \sqrt{4(x^2-54)}}\cdot\sqrt[3]{2x - \sqrt{4(x^2-54)}}$$

$$A = \sqrt[3]{\left(2x + \sqrt{4(x^2-54)}\right)\left(2x - \sqrt{4(x^2-54)}\right)}$$

$$A = \sqrt[3]{(2x)^2 - \left(\sqrt{4(x^2-54)}\right)^2} = \sqrt[3]{4x^2 - 4x^2 + 54.4} = \sqrt[3]{(27.2)(4)}$$

$$A = \sqrt[3]{27.8} = 3.2 = 6 \Rightarrow \therefore \boxed{A = 6}$$ ***Rpta. e***

7. Al ejecutar: $(6x^2+2x+9)(-6x^2+4x-1)$ Se obtiene como término de segundo grado a:

a) $-50x^2$ b) $-51x^2$ c) $-52x^2$ d) $-53x^2$ e) $-54x^2$

Resolución:

La expresión dada, se puede escribir así:

$$\begin{array}{r} 6x^2 + 2x + 9 \\ -6x^2 + 4x - 1 \\ \hline -36x^4 - 12x^3 - 54x^2 \qquad\qquad \\ +24x^3 + 8x^2 + 36x \quad \\ -6x^2 - 2x - 9 \\ \hline -36x^4 + 12x^3 - \underline{52x^2} + 34x - 9 \end{array}$$

• ***Otra forma:***

$$(6x^2 + 2x + 9)(-6x^2 + 4x - 1)$$

$\boxed{-54x^2}$, $\boxed{+8x^2}$, $\boxed{-6x^2}$

Donde:

$$-54x^2 + 8x^2 - 6x^2 = \boxed{-52x^2}$$

$\therefore$ El término de segundo grado es: $-52x^2$ ***Rpta. c***

8. Si: $A = (m+n-p)^2 - (m-n+p)^2$ y $B = (n-m-p)^2 - (p-m-n)^2$

Calcular: A + B

A) $m^2+n^2+p^2$ B) $2(m+n+p)$ C) $2m+n+p$

D) 0 E) $m+n-p$

Resolución:

Los términos de las expresiones A y B; se agrupan de la manera siguiente:

$A = [m + (n - p)]^2 - [m - (n - p)]^2$ y $B = [(n - p) - m]^2 - [- (n - p) - m]^2$

Hacemos que: $(n - p) = a$

$A = [m + a]^2 - [m - a]^2$ y $B = [a - m]^2 - [-a - m]^2$ ⟶ $[a + m]^2$

Luego:

$A + B = [m + a]^2 - [m - a]^2 + [a - m]^2 - [a + m]^2$ ⟶ $[a - m]^2 = [m - a]^2$

$A + B = -[m - a]^2 + [m - a]^2 = 0 \Rightarrow \therefore$ $A + B = 0$ ***Rpta. d***

9. Uno de los términos del polinomio producto al efectuar:

$$xy(x + y + xy)(-x - y)(x - y) \text{ ; es:}$$

a) x^2y^2 b) x^2y c) xy^2 d) x^2y^4 e) $-x^2y^4$

Resolución:

La expresión dada, se puede escribir así:

$xy(x + y + xy)[-(x + y)](x - y)$

$xy(x + y + xy)[-(x^2 - y^2)] = xy(x + y + xy)(y^2 - x^2)$

$= (x^2y + xy^2 + x^2y^2)(y^2 - x^2)$

Luego:

$$\begin{array}{r} (x^2y + xy^2 + x^2y^2) \\ (y^2 - x^2) \quad \times \\ \hline x^2y^3 + xy^4 + x^2y^4 \qquad\qquad \\ - x^4y - x^3y^2 - x^4y^2 \quad + \\ \hline x^2y^3 + xy^4 + \underline{x^2y^4} - x^4y - x^3y^2 - x^4y^2 \end{array}$$

∴ Uno de los términos del polinomio producto es: x^2y^4

Rpta. d

10. Al efectuar: $(a - b)(a + b - c) + (b - c)(b + c - a) + (c - a)(c + a - b)$
Se obtiene:

a) 0 b) 1 c) $a + b + c$

d) $a^2 + b^2 + c^2$ e) $ab + ac + bc$

Resolución:

$(a - b)(a + b - c) + (b - c)(b + c - a) + (c - a)(c + a - b)$

$\underline{(a-b)(a+b)}-(a-b)c+\underline{(b-c)(b+c)}+(b-c)(-a)+\underline{(c-a)(c+a)}+(c-a)(-b)$

$a^2-b^2-ac+bc+b^2-c^2-ab+ac+c^2-a^2-bc+ab=\boxed{0}$ ***Rpta. a***

11. Efectuar: E×M ; Si:

$$E=\sqrt[2^x]{m^{2^x}+\sqrt{m^{2^{x+1}}-n^{2^x}}}\quad;\quad M=\sqrt[2^x]{m^{2^x}-\sqrt{m^{2^{x+1}}-n^{2^x}}}$$

a) 1 b) n^2 c) m^2 d) m e) n

Resolución:

$$E\times M=\sqrt[2^x]{m^{2^x}+\sqrt{m^{2^{x+1}}-n^{2^x}}}\cdot\sqrt[2^x]{m^{2^x}-\sqrt{m^{2^{x+1}}-n^{2^x}}}$$

Aplicando la propiedad: $\boxed{\sqrt[n]{A}\cdot\sqrt[n]{B}=\sqrt[n]{A.B}}$; obtenemos:

$$E\times M=\sqrt[2^x]{\left(m^{2^x}+\sqrt{m^{2^{x+1}}-n^{2^x}}\right)\left(m^{2^x}+\sqrt{m^{2^{x+1}}-n^{2^x}}\right)}$$

$$E\times M=\sqrt[2^x]{\left(m^{2^x}\right)^2-\left(\sqrt{m^{2^{x+1}}-n^{2^x}}\right)^2}$$

$$E\times M=\sqrt[2^x]{m^{2.2^x}-m^{2^{x+1}}+n^{2^x}}=\sqrt[2^x]{m^{2^{x+1}}-m^{2^{x+1}}+n^{2^x}}$$

$$E\times M=\sqrt[2^x]{n^{2^x}}=n\ \Rightarrow\ \therefore\ \boxed{E\times M=n}$$ ***Rpta. e***

12. Reducir: $(x+1)^2(x^2+2x-1)-(x^2-2x)^2$

a) $4x^3+1$ b) $8x^3-1$ c) $8x^3+1$ d) $4x^3-1$ e) $16x^3$

Resolución:

$(x+1)^2(x^2+2x-1)-(x^2-2x)^2$

$(x^2+2x+1)(x^2+2x-1)-(x^2-2x)^2$

$[(x^2+2x)^2-1^2]-(x^2-2x)^2=[(x^2)^2+2x^2.(2x)+(2x)^2-1]-[(x^2)^2-2x^2(2x)+(2x)^2]$

$=x^4+4x^3+4x^2-1-x^4+4x^3-4x^2=\boxed{8x^3-1}$ ***Rpta. b***

13. Simplificar: $E=\dfrac{1}{mn}(a+b)^{mn}-\dfrac{1}{mn}(a-b)^{mn}$

Conociendo que: $m=\sqrt{3}+1$; $n=\sqrt{3}-1$

a) $2(a^2 + b^2)$ b) $a^2 + b^2$ c) $4ab$ d) $2ab$ e) ab

Resolución:

• En primer lugar, hallamos el valor de: m.n = ?

$m.n = (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1) \Rightarrow m.n = \sqrt{3}^2 - 1^2 \Rightarrow \therefore \boxed{m.n = 2}$

• Reemplazamos el valor hallado, en la expresión E.

$$E = \frac{1}{2}(a+b)^2 - \frac{1}{2}(a-b)^2 = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{2}$$

$$E = \frac{(\cancel{a^2} + 2ab + \cancel{b^2}) - (\cancel{a^2} - 2ab + \cancel{b^2})}{2} = \frac{4ab}{2} \Rightarrow \therefore \boxed{E = 2ab}$$ ***Rpta. d***

3.5. División de Expresiones Algebraicas:

3.5.1. División de un polinomio entre un monomio:

Para dividir un polinomio entre un monimio, se divide cada uno de los términos del polinomio separadamente entre el monomio divisor y se suman algebraicamente cada uno de estos resultados.

Ejemplo 1: Dividir: $\dfrac{42x^6y^5 - 21x^3y^7 + 35x^5y^2}{7xy^2}$

Resolución:

- Procedemos a dividir cada término entre el divisor.

$$\frac{42x^6y^5 - 21x^3y^7 + 35x^5y^2}{7xy^2} = \frac{42x^6y^5}{7xy^2} - \frac{21x^3y^7}{7xy^2} + \frac{35x^5y^2}{7xy^2}$$

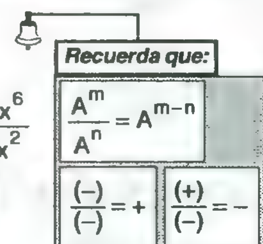
$$= \boxed{6x^5y^3 - 3x^2y^5 + 5x^4}$$

Ejemplo 2: Dividir: $\dfrac{-0{,}8x^2y^2 + 1{,}2x^4y - 0{,}6x^6}{-2x^2}$

Resolución:

$$\frac{-0{,}8x^2y^2 + 1{,}2x^4y - 0{,}6x^6}{-2x^2} = \frac{-0{,}8x^2y^2}{-2x^2} + \frac{1{,}2x^4y}{-2x^2} - \frac{0{,}6x^6}{-2x^2}$$

$$= \boxed{0{,}4y^2 - 0{,}6x^2y + 0{,}3x^4}$$



Ejemplo 3: Dividir: $\dfrac{x^2y^4 - 2xy^3 + 4y^2}{\frac{3}{2}y^2}$

Resolución:

$$\frac{x^2y^4-2xy^3+4y^2}{\frac{3}{2}y^2}=\frac{x^2y^4}{\frac{3}{2}y^2}-\frac{2xy^3}{\frac{3}{2}y^2}+\frac{4y^2}{\frac{3}{2}y^2}$$

$$=\boxed{\frac{2}{3}x^2y^2-\frac{4}{3}xy+\frac{8}{3}}$$

Ejemplo 4: Dividir: $(30x^2y^3 - 42x^3y^4 - 10x)$ entre: $6y^2$

Resolución:

$$\frac{30x^2y^3-42x^3y^4-10x}{6y^2}=\frac{30x^2y^3}{6y^2}-\frac{42x^3y^4}{6y^2}-\frac{10x}{6y^2}$$

$$=\boxed{5x^2y-7x^3y^2-\frac{5x}{3y^2}}$$

Ejemplo 5: Dividir: $(2ax^2 - 6a^2x^3 - 5by + y^2)$ entre: $2ax$

Resolución:

$$\frac{2ax^2-6a^2x^3-5by+y^2}{2ax}=\frac{2ax^2}{2ax}-\frac{6a^2x^3}{2ax}-\frac{5by}{2ax}+\frac{y^2}{2ax}$$

$$=\boxed{x-3ax^2-\frac{5by}{2ax}+\frac{y^2}{2ax}}$$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 33

1. Desarrollar las siguientes divisiones:

a) $\dfrac{8x^2-24yx}{8x}=$

b) $\dfrac{5x^2-10x}{5x}=$

c) $\dfrac{3xy^3-5x^2y^2+4x^2y^3z}{-xy^2}=$

d) $\dfrac{-6x^3y^2+9x^4y^4z-12x^2yz^3}{-3xy}=$

e) $\dfrac{15x^6y^2-10x^4y^3z^5-20x^2y^5z^6}{5x^2y^2}=$

f) $\dfrac{\frac{5}{7}x^4y^3z-\frac{2}{9}x^3y^4z-\frac{3}{4}x^2y^5}{-\frac{2}{3}x^2y^2}=$

g) $\dfrac{\frac{3}{8}x^4y+x^3y^3-\frac{1}{2}x^2y^5z}{\frac{3}{4}x^2y}=$

h) $\dfrac{-z^nw^n+2z^{n+1}w^{n+1}}{-z^nw^n}=$

i) $\dfrac{0{,}9x^2y^2 + 0{,}65x^3y^3 - 0{,}15x^4y^4}{-0{,}05xy} =$

j) $\dfrac{45x^{n-3} - 15x^{n-2} - 25x^{n-1}}{-5x^{n-3}} =$

k) $\dfrac{-30x^{3n} + 18x^{n-1} - 42x^{3n-2}}{6x^{2n-1}} =$

l) $\dfrac{1{,}5xy^5z - 2{,}4x^2y^4 - 3{,}6x^3y^3}{-0{,}1xy^3} =$

2. Desarrollar las divisiones indicadas:

a) $(z^2x + zx + x) : -z =$

b) $(3xy^2 - 2x^2y^2 + 5x^3y - 7x^4) : 2xy =$

c) $(-4x^2y + 6xy^2 - 10y^3) : -2x =$

d) $(12x^3y^3 - 15x^2y^2 + 18x) : - 3xy =$

e) $(-8x^3 + 16x^2y^2 - 32xy^3) : 4xy =$

f) $(4x^2y - 6x^3y^2 + 10xy^4) : -2xy$

g) $(-6x^3y^2z^4 + 9x^2y^3z^2 - 3xy^2z^3) : -3xy^2z^2 =$

h) $(18x^4y^3z^2 - 24x^2y^2z^3 + 36x^3y^3z^2) : 6x^2y^2z^2 =$

i) $(-15x^6y^3z + 20x^4y^4z^3 - 10x^5y^2z^2) : -5x^4y^2z =$

j) $(20x^{n+1}y^n - 16x^{n+2}y^{n+1}) : 4x^ny^n =$

3.5.2. División de dos Polinomios:

Para dividir dos polinomios tenemos la siguiente regla práctica.

1) Se ordenan el dividendo y el divisor, según una misma letra, dejando espacios para los términos que faltan.

2) Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor para obtener el primer término del cociente.

3) Se multiplica el primer término obtenido del cociente por todo el divisor y el producto se resta del dividendo. Para ello se coloca cada término de este producto debajo de su semejante cambiándole de signo. Luego se suman algebraicamente.

4) Se divide el primer término del residuo, entre el primer término del divisor, para obtener el segundo término del cociente.

5) Este segundo término se multiplica por todo el divisor y este producto se resta del residuo anterior.

6) Se divide el primer término del segundo residuo entre el primer término del divisor y se efectúan las operaciones como en los pasos anteriores, continuando hasta que el residuo sea un polinomio de grado menor que el del divisor.

Ejemplo 1: Dividir: $7x - 3 + 2x^4 - x^3$ entre $2x + 3$

Resolución:

Ordenamos el primer polinomio con respecto a la letra "x" y en sentido decreciente. $2x^4 - x^3 + 0x^2 + 7x - 3$ entre $2x + 3$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & -x^3 & +0x^2 & +7x & -3 & 2x+3 \\ \cline{6-6}
-2x^4 & -3x^3 & & & & x^3-2x^2+3x-1 \\ \cline{1-2}
 & -4x^3 & +0x^2 & & & \\
 & +4x^3 & +6x^2 & & & \\ \cline{2-3}
 & & +6x^2 & +7x & & \\
 & & -6x^2 & -9x & & \\ \cline{3-4}
 & & & -2x & -3 & \\
 & & & +2x & +3 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 0 &
\end{array}$$

∴ El cociente buscado es: $x^3 - 2x^2 + 3x - 1$; con cero de residuo.

Ejemplo 2: Dividir: $4x + 4x^2 + 4x^4 + 3x^3 + 4x^5 - 1$ entre $3x^2 + x + 2x^3 - 1$

Resolución:

Ordenando ambos polinomios con respecto a la letra "x" y en sentido decreciente, tenemos:

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
4x^5 & +4x^4 & +3x^3 & +4x^2 & +4x & -1 & 2x^3+3x^2+x-1 \\ \cline{7-7}
-4x^5 & -6x^4 & -2x^3 & +2x^2 & & & 2x^2-x+2 \\ \cline{1-4}
 & -2x^4 & +x^3 & +6x^2 & +4x & & \\
 & +2x^4 & +3x^3 & +x^2 & -x & & \\ \cline{2-5}
 & & +4x^3 & +7x^2 & +3x & -1 & \\
 & & -4x^3 & -6x^2 & -2x & +2 & \\ \cline{3-6}
 & & & x^2 & +x & +1 &
\end{array}$$

∴ ***Cociente*** $Q_{(x)} = 2x^2 - x + 2$

Residuo $R_{(x)} = x^2 + x + 1$

Otra forma de expresar el resultado de una división es dando el cociente completo (Q_c).

$$Q_c = Q_{(x)} + \frac{R_{(x)}}{\text{divisor}}$$

El cociente completo en el ejemplo anterior sería:

$$Q_c = 2x^2 - x + 2 + \frac{x^2 + x + 1}{2x^3 + 3x^2 + x - 1}$$

> ***Observaciones:***
>
> *1) El grado del cociente es igual a la diferencia de los grados del dividendo y el divisor.*
>
> *2) El grado de la letra **Ordenatriz** en el Residuo es simpre menor que el grado relativo de la letra ordenatriz en el divisor y su máximo grado es menor en uno que el grado de este último.*

Ejemplo 3: Dividir:

$2x^6 - 3x^5y + 5x^4y^2 + 5x^3y^3 - 6x^2y^4 + 3xy^5 + 2y^6$ entre $x^3 - 2x^2y + 4xy^2 - y^3$

Resolución:

Como los polinomios ya están ordenados con respecto a "x" y en sentido decreciente.

$$
\begin{array}{l|l}
2x^6 - 3x^5y + 5x^4y^2 + 5x^3y^3 - 6x^2y^4 + 3xy^5 + 2y^6 & x^3 - 2x^2y + 4xy^2 - y^3 \\
\underline{-2x^6 + 4x^5y - 8x^4y^2 + 2x^3y^3} & \overline{2x^3 + x^2y - xy^2 + y^3} \\
\quad + x^5y - 3x^4y^2 + 7x^3y^3 - 6x^2y^4 & \\
\quad \underline{- x^5y + 2x^4y^2 - 4x^3y^3 + x^2y^4} & \\
\qquad - x^4y^2 + 3x^3y^3 - 5x^2y^4 + 3xy^5 & \\
\qquad \underline{+ x^4y^2 - 2x^3y^3 + 4x^2y^4 - xy^5} & \\
\qquad\quad + x^3y^3 - x^2y^4 + 2xy^5 + 2y^6 & \\
\qquad\quad \underline{- x^3y^3 + 2x^2y^4 - 4xy^5 + y^6} & \\
\qquad\qquad x^2y^4 - 2xy^5 + 3y^6 &
\end{array}
$$

$\therefore$ ***Cociente*** $Q_{(x,y)} = 2x^3 + x^2y - xy^2 + y^3$

Residuo $R_{(x,y)} = x^2y^4 - 2xy^5 + 3y^6$

Luego:

Cociente completo: $Q_C = 2x^3 + x^2y - xy^2 + y^3 + \dfrac{x^2y^4 - 2xy^5 + 3y^6}{x^3 - 2x^2y + 4xy^2 - y^3}$

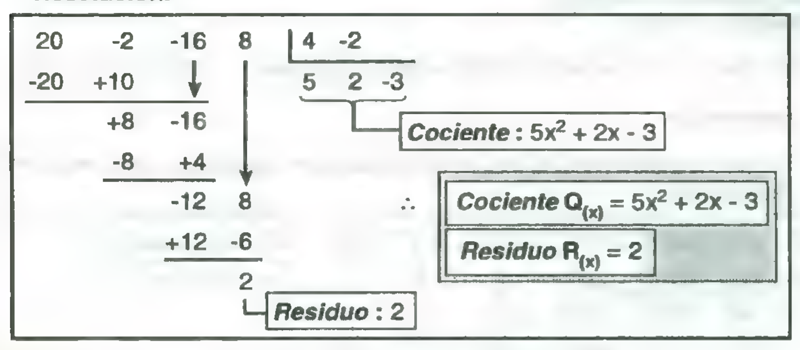
> ***Observaciones:***
>
> *1) El grado del cociente es igual al grado del dividendo menos el grado del divisor.*
>
> *2) El grado absoluto del residuo de una división de polinomios homogéneos es igual al grado absoluto del dividendo.*
>
> *3) El grado relativo de la letra ordenatriz en el residuo es como máximo uno menor que el grado relativo de la letra ordenatriz en el divisor.*

*** Métodos Alternativos de División:**

- **Método de los coeficientes separados.-** En la división de dos polinomios de una sola letra o de dos polinomios homogéneos, podemos prescindir de la parte literal.

Ejemplo 1: Dividir: $20x^3 - 2x^2 - 16x + 8$ entre $4x - 2$

Resolución:



Ejemplo 2: Dividir: $x^5 + 2x^4 - x^2 + 3$ entre $x^2 - 2x + 1$

Resolución:

1	2	0	-1	0	3		1	-2	1	
-1	2	-1					1	4	7	9
	4	-1	-1							
	-4	8	-4							
		7	-5	0						
		-7	14	-7						
			9	-7	3					
			-9	18	-9					
				11	-6					

Cociente : $x^3 + 4x^2 + 7x + 9$

Residuo : $11x - 6$

∴ ***Cociente*** $Q_{(x)} = x^3 + 4x^2 + 7x + 9$

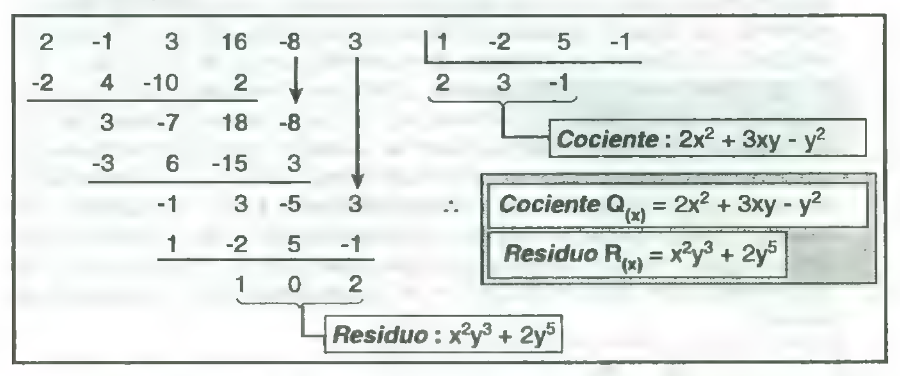
Residuo $R_{(x)} = 11x - 6$

Nota:

Al momento de colocar los coeficientes de los términos del dividendo y divisor, debe tenerse cuidado de colocar un cero cada vez que falta un término.

Ejemplo 3: Dividir: $2x^5 - x^4y + 3x^3y^2 + 16x^2y^3 - 8xy^4 + 3y^5$ entre $x^3 - 2x^2y + 5xy^2 - y^3$

Resolución:



- **Método de Horner.-** Para dividir dos polinomios por el Método de Horner, primeramente se trazan dos rectas que se intersecten, una vertical y otra horizontal. Encima de la recta horizontal y a la derecha de la vertical se colocan los coeficientes del dividendo con su propio signo. A la izquierda de la recta vertical se coloca el primer coeficiente del divisor con su propio signo y debajo de la horizontal se colocan el resto de coeficientes del divisor con signo cambiado, por ejemplo:

Dividir: $2x^4 - x^3 + 4x^2 + 5x - 1$ entre $2x^2 + x - 1$

La disposición de los coeficientes sería:

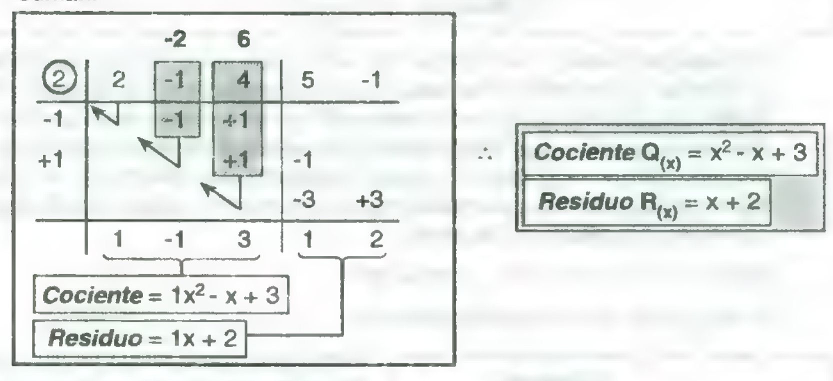
Divisor	Dividendo				
②	2	-1	4	5	-1
-1					
+1					

Para comenzar a dividir se traza otra Raya Vertical entre los coeficientes del Dividendo, el número de columnas a contar de derecha a izquierda es igual al grado del divisor, esta raya servirá para separar el cociente del residuo en la respuesta. Además se traza una recta horizontal a la anterior para colocar debajo de ella la respuesta por lo que la división quedaría así.

				Columna	Columna
②	2	-1	4	5	-1
-1					
+1					

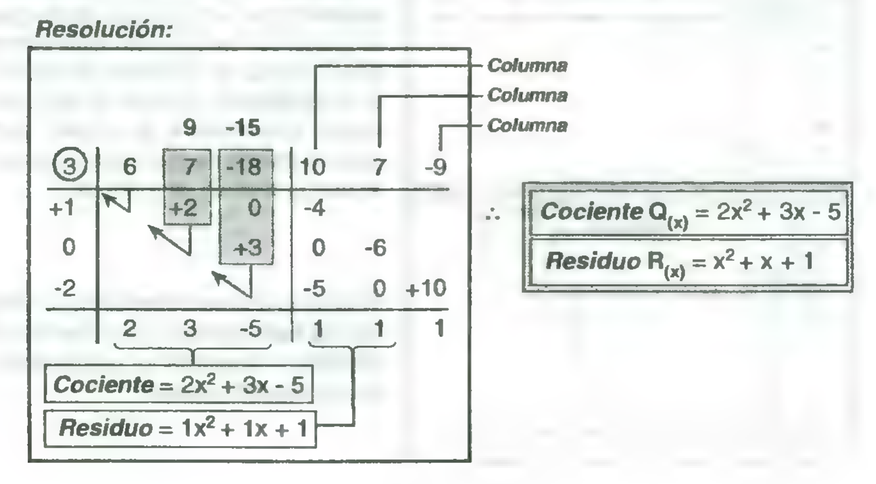
Nótese que para trazar la Raya Vertical, se han contado dos columnas de derecha a izquierda ya que el divisor es de segundo grado.

Para comenzar a dividir: Se divide el primer término del dividendo (2) entre el número encerrado en una circunsferencia obteniéndose como resultado 1, éste se coloca debajo de la segunda raya horizontal y se multiplica por aquellos números que están a la izquierda de la raya vertical y debajo de la primera horizontal colocando los productos directamente debajo de los números -1 y 4. A continuación se suma la siguiente columna y el resultado se divide por el número encerrado por la circunferencia y se coloca como resultado debajo de la Raya Horizontal, este resultado se vuelve a multiplicar por aquellos términos de la izquierda de la Raya Vertical y debajo de la Horizontal, resultados que se colocan en las columnas correspondientes al 4 y al 5. La operación se realiza hasta completar el resultado correspondiente a las columnas antes de la Segunda Vertical, luego de esa raya la suma de las columnas ya no se dividen entre el número encerrado en la circunferenica, sino simplemente se suman.



Ejemplo 2: Dividir: $6x^5 + 7x^4 - 18x^3 + 10x^2 + 7x - 9$ entre $3x^3 - x^2 + 2$

Resolución:

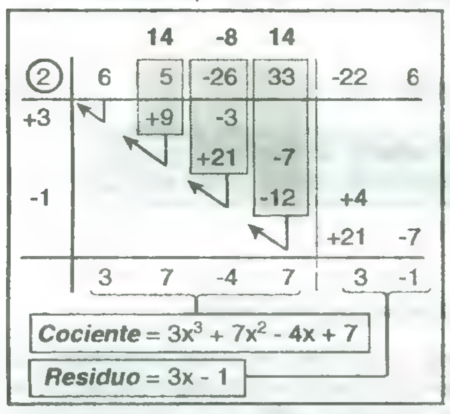


> *Nota:*
> - *La segunda raya vertical se traza contando tres columnas de derecha a izquierda, pues el divisor es de tercer grado.*
> - *Se debe colocar un cero en el término en "x" el divisor ya que éste no aparece.*

Ejemplo 3: Dividir: $6x^5 + 5x^4 - 26x^3 + 33x^2 - 22x + 6$ entre $2x^2 - 3x + 1$

Resolución:

Como los polinomios están completos y ordenados hacemos el esquema y efectuamos por Horner.

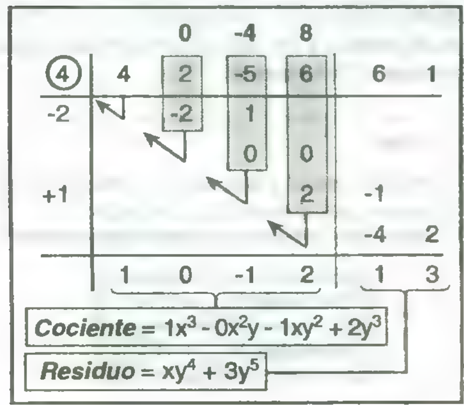


$\therefore$ **Cociente** $Q_{(x)} = 3x^3 + 7x^2 - 4x + 7$

Residuo $R_{(x)} = 3x - 1$

Ejemplo 4: Dividir: $4x^5 + 2x^4y - 5x^3y^2 - 6x^2y^3 + 6xy^4 + y^5$ entre $4x^2 + 2xy - y^2$

Resolución:



$\therefore$ **Cociente** $Q_{(x,y)} = x^3 - xy^2 + 2y^3$

Residuo $R_{(x,y)} = xy^4 + 3y^5$

- **Método de Ruffini.-** Este método es aplicable a divisores de la forma: **$(x \pm a)$** y con ciertas restricciones a divisores de la forma: **$(ax^n \pm b)$**.

1º Caso:

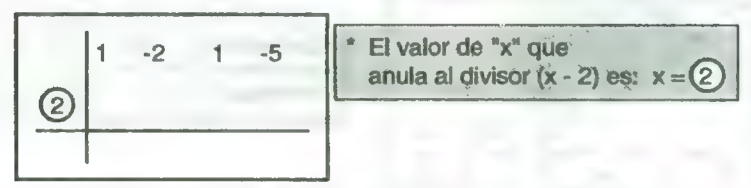
- **Divisor de la forma: $(x \pm a)$**

Para dividir por el Método de Ruffini se trazan dos rayas que se intersectan, una vertical y una horizontal. Encima de la raya horizontal y a la derecha de la vertical se colocan los coeficientes del dividendo con su propio signo y encima de la raya horizontal y a la izquierda de la vertical se coloca aquel valor de "x" que anula el divisor.

Ejemplo 1: Dividir: $x^3 - 2x^2 + x - 5$ entre $x - 2$

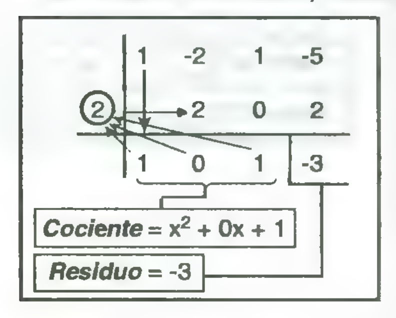
Resolución:

La disposición de los coeficientes sería:



Para comenzar a dividir se procede de la siguiente manera:

El primer coeficiente se baja de frente y se escribe en el resultado debajo de la línea horizontal, este resultado se multiplica por el número encerrado en la circunferencia y se coloca debajo del siguiente coeficiente del dividendo, esta columna se suma y se obtiene un segundo coeficiente en el resultado el cual a su vez se vuelve a multiplicar por el número en la circunferencia y se coloca en la columna que sigue debajo del siguiente coeficiente del dividendo, esta operación se repite hasta agotar los coeficientes del dividendo. El último coeficiente del resultado constituye el residuo y los anteriores constituyen los coeficientes del cociente, de esta manera tendríamos:



Nota:

Nótese que el grado del cociente es uno menor que el grado del dividendo

$\therefore$ ***Cociente*** $Q_{(x)} = x^2 + 1$

Residuo $R_{(x)} = -3$

Ejemplo 2: Dividir: $x^4 + x^2 + 1$ entre $x + 1$

Resolución:

	1	0	1	0	1
(-1)	↓	-1	1	-2	+2
	1	-1	2	-2	3

Cociente = $1x^3 - 1x^2 + 2x - 2$

Residuo = 3

* El valor de "x" que anula al divisor: (x + 1) es: x = (-1)

∴ ***Cociente*** $Q_{(x)} = x^3 - x^2 + 2x - 2$

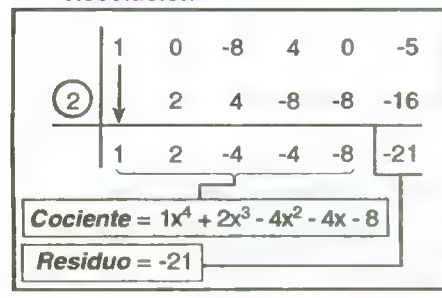
Residuo $R_{(x)} = 3$

Nota:

No debemos olvidarnos de colocar un cero por cada término que falte para completar el polinomio que constituye el dividendo.

Ejemplo 3: Dividir: $x^5 - 8x^3 + 4x^2 - 5$ entre $x - 2$

Resolución:



* El valor de "x" que anula al divisor: (x - 2) es: x = (2)

∴ ***Cociente*** $Q_{(x)} = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 4x - 8$

Residuo $R_{(x)} = -21$

- **Casos Especiales:**

1) Divisor de la forma: $(ax^n \pm b)$

Ante todo, debemos tener en cuenta que para aplicar el método de Ruffini en una división, el coeficiente del término en "x" en el divisor debe ser la Unidad.

Para lograr eso en el presente caso se procederá a dividir el dividendo y el divisor por el coeficiente del término en "x" en el divisor, después de lo cual el cociente no variará pero el residuo quedará dividido por dicho número, por lo que el residuo que se obtenga en la división será un residuo falso y para obtener el verdadero, deberá multiplicarse el residuo falso por aquel número por el que se dividió al dividendo y el divisor:

Ejemplo 1: Dividir: $2x^3 + x^2 - 3x + 5$ entre $2x - 1$

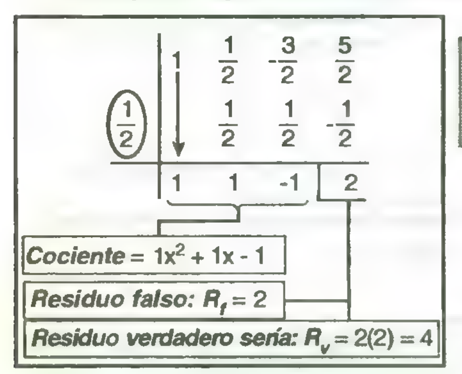
Resolución:

En primer lugar dividimos entre 2, tanto al dividendo como al divisor:

$$\frac{2x^3+x^2-3x+5}{2} \text{ entre } \frac{2x-1}{2}\text{ ; obteniendo:}$$

$$\frac{2x^3}{2}+\frac{x^2}{2}-\frac{3x}{2}+\frac{5}{2} \text{ entre } x-\frac{1}{2}$$

En segundo lugar, aplicamos el Método de Ruffini:



* El valor de "x" que anula al divisor: $(x-\frac{1}{2})$ es: $x=\frac{1}{2}$

$\therefore$ *Cociente* $Q_{(x)}=x^2+x-1$

Residuo $R_f=2 \Rightarrow R_v=4$

Ejemplo 2: Dividir: $6x^4-x^3-17x^2+28x-22$ entre $3x-2$

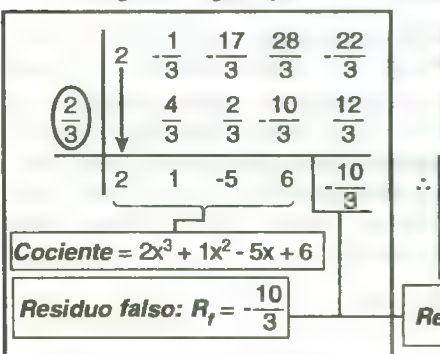
Resolución:

En primer lugar dividimos entre 3, tanto al dividendo como al divisor.

$$\frac{6x^4-x^3-17x^2+28x-22}{3} \text{ entre } \frac{3x-2}{3}\text{ ; obteniendo:}$$

$$2x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{17}{3}x^2+\frac{28}{3}x-\frac{22}{3} \text{ entre } x-\frac{2}{3}$$

En segundo lugar, aplicamos el Método de Ruffini:



* El valor de "x" que anula al divisor: $(x-\frac{2}{3})$ es: $x=\frac{2}{3}$

$\therefore$ *Cociente* $Q_{(x)}=2x^3+x^2-5x+6$

Residuo $R_f=-\frac{10}{3} \Rightarrow R_v=-10$

Residuo verdadero sería: $R_v=3(-\frac{10}{3})=10$

2) Divisor de la forma: $(x^n \pm a)$

La condición para que una división de este tipo se pueda realizar por el Método de Ruffini es que los exponentes de la variable "x" en el dividendo sean múltiplos del exponente de "x" en el divisor. Para poder dividir por este método se hará el **Cambio de Variable $x^n = y$,** y se efectuará la división según lo establecido.

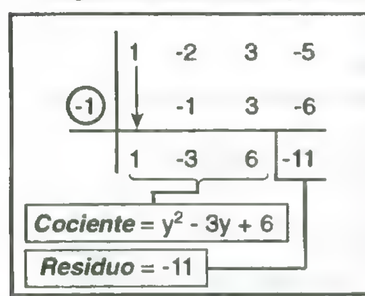
Ejemplo 1: Dividir: $x^6 - 2x^4 + 3x^2 - 5$ entre $x^2 + 1$

Resolución:

Haciendo el cambio de variable $x^2 = y$; se tiene:

$$(x^2)^3 - 2(x^2)^2 + 3x^2 - 5 \text{ entre } x^2 + 1 \;\Rightarrow\; y^3 - 2y^2 + 3y - 5 \text{ entre } y + 1$$

Luego, dividimos estos polinomios aplicando el Método de Ruffini:



* El valor de "y" que anula al divisor: (y + 1) es: y = -1

$Q_{(y)} = y^2 - 3y + 6$

Reemplazando: $y = x^2$, obtenemos que:

$\therefore$ ***Cociente*** $Q_{(x)} = (x^2)^2 - 3x^2 + 6$

Residuo $R_{(x)} = -11$

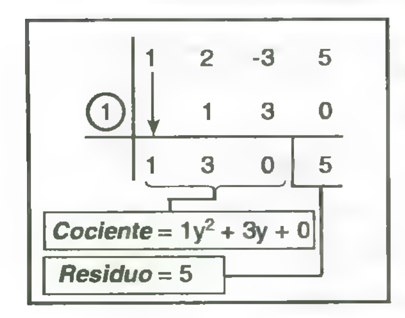
Ejemplo 2: Dividir: $x^2 + 2x^{4/3} - 3x^{2/3} + 5$ entre $x^{2/3} - 1$

Resolución:

Haciendo el cambio de variable: $x^{2/3} = y$ de donde: $x^2 = y^3$

Luego: $x^2 + 2(x^{2/3})^2 - 3x^{2/3} + 5$ entre $x^{2/3} - 1 \;\Rightarrow\; y^3 + 2y^2 - 3y + 5$ entre $y - 1$

Ahora dividimos estos polinomios aplicando el Método de Ruffini:



* El valor de "y" que anula al divisor: (y - 1) es: y = 1

$Q_{(y)} = y^2 + 3y$

Reemplazando: $y = x^{2/3}$, obtenemos que:

$\therefore$ ***Cociente*** $Q_{(x)} = x^{4/3} + 3x^{2/3}$

Residuo $R_{(x)} = 5$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 

1. Las siguientes divisiones son exactas. Halla el polinomio cociente en cada división:

a) $(3y^3 - 10y^2 + 20y - 16) : (3y - 4) =$	b) $(6x^2 - x - 2) : (2x + 1) =$
c) $(2x^4 - x^3 + 7x - 3) : (2x + 3) =$	d) $(z^2 - 15z + 56) : (z - 8) =$
e) $(6y^2 - 9y - 27) : (3y - 9) =$	f) $(-10z^3 - 13z^2 + 13z - 2) : (-5z + 1) =$
g) $(8y^3 - 27) : (2y - 3) =$	h) $(9x^3 + 3x^2 + x - 1) : (3x - 1) =$
i) $(x^6 - 7x^3 + 12) : (x^3 - 3) =$	j) $(38x^4 - 65x^3 + 27) : (2x^2 - 5x + 3) =$
k) $(12x^4 - 7x^3 - 74x^2 - 7x + 12) : (3x^2 - 7x - 4) =$	
l) $(\frac{3}{2}z^7 - 6z^6 - \frac{1}{4}z^5 - 5z^4 + z^2) : (3z^3 - \frac{1}{2}z) =$	

2. Efectuar las siguientes divisiones:

a) $(x^5 + 3x^4y + 3x^3y^2 + 5x^2y^3 - 10xy^4 = 7y^5) : (x + 3y) =$

b) $(6x^4y + 21x^3y^2 - 60x^2y^3 + 24xy^4) : (2x - y) =$

c) $(3x^4y - 4x^3y^2 - 4x^2y^3 + 8xy^4 - 3y^5) : (x^2 - 2xy + y^2) =$

d) $(-4xy^4 + 6x^2y^3 - 3x^3y^2 + 5x^4y) : (-y^3 + 2xy^2 + x^2y) =$

e) $(-6x^6 + 11x^5y - 40x^4y^2 - 6x^3y^3 + 12x^2y^4) : (-12x^2 + 6yx) =$

f) $(\frac{1}{3}x^3 - \frac{17}{36}x^2y + \frac{13}{24}xy^2 + \frac{1}{4}y^3) : (\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y) =$

g) $(\frac{2}{3}x^4 - x^3 + \frac{x^2}{2} - 5x + 3) : (x + 1) =$

3. Efectuar las divisiones:

a) $(12x^{2a+2} - 23x^{2a+3} - 10x^{2a+4} + 25x^{2a+5}) : (4x^{a+1} - 5x^{a+2}) =$

b) $(x^{a+2} + 2x^{a+1} + 2x^a - 5x^{a-1}) : (x^2 - x) =$

c) $(38x^{a+3} - 65x^{a+2} + 27x^{a-1}) : (2x^{a+1} - 5x^a + 3x^{a-1}) =$

d) $(-5y^{a-1} + 2y^a + 2y^{a+1} + y^{a+2}) : (5y^{a-2} + 3y^{a-1} + y^a) =$

e) $(9x^{a+2} + 3x^{a+1} + x^a + x^{a-1}) : (3x^a - x^{a-1}) =$

f) $(6x^{a+3} + \frac{5}{2}x^{a+2} - \frac{16}{3}x^a - 4x^{a-1}) : (3x^{a+1} + 2x^a) =$

4. Efectuar las divisiones siguientes, aplicando el Método de Horner.

a) $(x^5 - 27x - x^4 + 7x^2 + 10)$ entre $(x^2 - x + 5)$
b) $(31x^2 + x^6 - 8x - 5x^5 + 21)$ entre $(x^3 - 7 - 2x)$
c) $(5y^5 - 9y^4 + 3y^6 - 10y^3 + 3y - 4 + 8y^2)$ entre $(3y^3 + 2y^2 - 5y - 4)$
d) $(x^3 - 10x^2 + 14x - 9)$ entre $(x^2 - 4x + 3)$
e) $(9x^3 + 12x^2 + 12x + 1)$ entre $(3x^2 + 2)$
f) $(6x^5 + 2x^4 - 23x^3 + 11x^2 + 12x - 3)$ entre $(3x^3 - 5x^2 + 3)$

5. Efectuar las divisiones siguientes, aplicando el Método de Ruffini.

a) $(2x^3 - x^2 + 3) : (x + 1)$	b) $(x^4 - 8x^2 - 9) : (x - 2)$
c) $(x^3 - 7x - 6) : (x - 3)$	d) $(x^3 - 7x - 6) : (x + 1)$
e) $(x^4 - 3x^3 + 5x - 8) : (x + 2)$	f) $(\frac{3}{5}x^4 - \frac{8}{5}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1) : (x - 1)$
g) $(2x^3 - 11x^2 + 18x - 24) : (x - 4)$	h) $(x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x - 6) : (x + 2)$

RESPUESTAS TALLER

1.

a) $y^2 - 2y + 4$	e) $2y + 3$	i) $x^3 - 4$
b) $3x - 2$	f) $2z^2 + 3z - 2$	j) $19x^2 + 15x + 9$
c) $x^3 - 2x^2 + 3x - 1$	g) $4y^2 + 6y + 9$	k) $4x^2 + 7x - 3$
d) $z - 7$	h) $3x^2 + 2x + 1$	l) $\frac{1}{2}z^4 - 2z^3 - 2z$

2.

a) Cociente $= x^4 + 3x^2y^2 - 4xy^3 + 2y^4 \Rightarrow$ Residuo $= -13y^5$

b) Cociente $= 3x^3y + 12x^2y^2 - 24xy^3 \Rightarrow$ Residuo $= 0$

c) Cociente $= 3x^2y + 2xy^2 - 3y^3 \Rightarrow$ Residuo $= 0$

d) Cociente $= 4xy + 2x^2 \Rightarrow$ Residuo $= -11x^3y^2 + 3x^4y$

e) Cociente $= \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 \Rightarrow$ Residuo $= 0$

f) Cociente $= \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{3}{4}y^2 \Rightarrow$ Residuo $= \frac{1}{2}y^3$

g) Cociente $= \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{3}x^2 + \frac{13}{6}x - \frac{43}{6} \Rightarrow$ Residuo $= \frac{61}{6}$

(3.)

a) Cociente = $3x^{a+1} - 2x^{a+2} - 5x^{a+3} \Rightarrow$ Residuo = 0

b) Cociente = $x^{a} + 3x^{a-1} + 5x^{a-2} \Rightarrow$ Residuo = 0

c) Cociente = $19x^2 + 15x + 9 \Rightarrow$ Residuo = 0

d) Cociente = $-y + y^2 \Rightarrow$ Residuo = 0

e) Cociente = $3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow$ Residuo = $2x^{a-1}$

f) Cociente = $2x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x - 2x^{-1} \Rightarrow$ Residuo = 0



a) Cociente = $x^3 - 5x + 2 \Rightarrow$ Residuo = 0

b) Cociente = $x^3 - 5x^2 + 2x - 3 \Rightarrow$ Residuo = 0

c) Cociente = $y^3 + y^2 - 2y + 1 \Rightarrow$ Residuo = 0

d) Cociente = $x - 6 \Rightarrow$ Residuo = $-13x + 9$

e) Cociente = $3x + 4 \Rightarrow$ Residuo = $6x - 7$

f) Cociente = $2x^2 + 4x - 1 \Rightarrow$ Residuo = 0

(5.)

a) Cociente = Cociente = $2x^2 - 3x + 3 \Rightarrow$ Residuo = 0

b) Cociente = $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \Rightarrow$ Residuo = -25

c) Cociente = $x^2 + 3x + 2 \Rightarrow$ Residuo = 0

d) Cociente = $x^2 - x - 6 \Rightarrow$ Residuo = 0

e) Cociente = $x^3 - 5x^2 + 10x - 15 \Rightarrow$ Residuo = 22

f) Cociente = $\frac{3}{5}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x - 1 \Rightarrow$ Residuo = 0

g) Cociente = $2x^2 - 3x + 6 \Rightarrow$ Residuo = 0

h) Cociente = $x^3 - 7x^2 + 19x - 37 \Rightarrow$ Residuo = 68

• **Teorema del Resto**

Para encontrar el Resto de dividir un polinomio P(x) entre un divisor de la forma (ax + b) se halla reemplazando en P(x) el valor de "x" que anula al divisor, vale decir, habrá que calcular: $P\left(\frac{b}{a}\right)$

Ejemplo 1: Calcular el residuo de dividir: $x^3 + 2x^2 - x + 2$ entre $2x - 1$

Resolución:

Calculamos el valor de "x" que anula al divisor:

$$2x - 1 = 0 \Rightarrow \quad 2x = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

Este valor de "x" se reemplaza en el dividendo:

Dividendo = $x^3 + 2x^2 - x + 2$

$$\text{Residuo (R)} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right) + 2 = \frac{1}{8} + 2\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} + 2$$

$$\therefore \quad R = \frac{1 + 4 - 4 + 2 \times 8}{8} = \boxed{\frac{17}{8}}$$

Ejemplo 2: Calcular el residuo de dividir: $3x^3 - 5x^2 + 7$ entre $x - 3$

Resolución:

Calculamos el valor de "x" que anula al divisor: $x - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 3}$

Este valor de "x" se reemplaza en el dividendo.

Dividendo = $3x^3 - 5x^2 + 7$

Residuo (R) = $3(3)^3 - 5(3)^2 + 7 = 3(27) - 5(9) + 7$

$$\therefore \quad R = 81 - 45 + 7 = \boxed{43}$$

Ejemplo 3: Calcular el residuo de dividir: $x^5 - 8x^3 + 4x^2 - 5$ entre $x - 2$

Resolución:

Calculamos el valor de "x" que anula al divisor: $x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

El valor de "x" se reemplaza en el dividendo:

Dividendo = $x^5 - 8x^3 + 4x^2 - 5$

Residuo (R) = $(2)^5 - 8(2)^3 + 4(2)^2 - 5 = 32 - 8(8) + 4(4) - 5$

$$\therefore \quad R = 32 - 64 + 16 - 5 = \boxed{-21}$$

Ejemplo 4: Calcular el resto de dividir: $9x^3 + 3x^2 + x - 1$ entre $3x - 1$

Resolución:

Calculamos el valor de "x" que anula al divisor:

$$3x - 1 = 0 \Rightarrow \ 3x = 1 \ \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{3}}$$

El valor de "x" se reemplaza en el dividendo:

Dividendo $= 9x^3 + 3x^2 + x - 1$

$$\text{Residuo (R)} = 9\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right) - 1 = 9\left(\frac{1}{27}\right) + 3\left(\frac{1}{9}\right) + \frac{1}{3} - 1$$

$$\therefore \ R = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 1 = \frac{3}{3} - 1 = \boxed{\text{cero}}$$

Ejemplo 5: Calcular el valor de "m" para que: $x^3 - 5x^2 + 3x - 12m$ sea divisible entre $x - 2$

Resolución:

Primero calculamos el residuo de la división con el procedimiento ya señalado y lo igualamos a cero para que se cumpla la condición de divisibilidad.

Divisor $= x - 2 \ \Rightarrow \ x - 2 = 0 \ \Rightarrow \boxed{x = 2}$

Dividendo $= x^3 - 5x^2 + 3x - 12m$

Residuo (R) $= 2^3 - 5(2)^2 + 3(2) - 12m = 8 - 20 + 6 - 12m = -6 - 12m$

De donde: $-6 - 12m = 0$

$$-12m = 6 \ \Rightarrow \ m = \frac{6}{-12} \ \Rightarrow \boxed{m = -\frac{1}{2}}$$ ***Rpta.***

Ejemplo 6: Calcular el residuo de dividir $(a + b)^2$ entre $a - b$

Resolución:

Hallamos el valor de "a" que anula el divisor: $a - b = 0 \ \Rightarrow \boxed{a = b}$

Para calcular el resto, reemplazamos este valor de "a" en el dividendo.

Dividendo $= (a + b)^2$; Residuo (R) $= (b + b)^2 = (2b)^2 = \boxed{4b^2}$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 35

1. Hallar el residuo de las divisiones siguientes, empleando el Teorema del Resto.

a) $2x^4 - 5x^3 + 3x - 6$ entre $x - 2$	b) $8x^5 - 3x^4 + x^3 - 5x^2 + 3$ entre $x - 1$
c) $5x^3 - 2x^2 + 7x - 2$ entre $x + 2$	d) $x^2 - 5x + 9$ entre $3x - 1$

e) $x^6 - y^6$ entre $x - y$	f) $x^3 + 2x + 3$ entre $2x + 1$
g) $x^6 - 5x^3 + 6x^2 - 8$ entre $x + 2$	h) $x^2 - 2ax + a^2$ entre $x - a$
i) $x^{32} + 1$ entre $x + 1$	j) $x^3 + 2ax^2 - 5a^3$ entre $x + 2a$

2. Calcular el valor de "m" para que: $x^5 - 3x^4 + 2x^2 + 4m$, sea divisible entre $x - 2$.

3. Calcular el valor de "m" para que: $2x^3 - 6x^2 + 5x - \frac{m}{4}$, sea divisible entre $2x - 1$.

4. Calcular el valor de "m" para que: $2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5m$, sea divisible entre $x + 1$.

5. Calcular el valor de "m" para que: $x^6 + 3x^5 - 4x^3 - x^2 + m$, sea divisible entre $x + 2$.

RESPUESTAS TALLER

1.		
a) 8	e) cero	i) 2
b) 4	f) $\frac{15}{8}$	j) $-5a^3$
c) -64	g) 120	
d) $\frac{67}{9}$	h) cero	

2. $m = 2$	3. $m = 5$	4. $m = 3$	5. $m = 4$

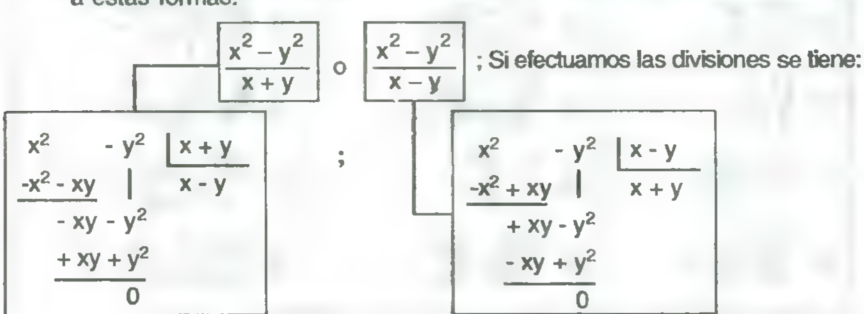
3.5.3. Cocientes Notables

Los Cocientes Notables son ciertos cocientes que se escriben por simple inspección, sujetándose a reglas fijas y sin realizar la división.

I. Cociente de la Diferencia de los Cuadrados de dos Monomios entre la Suma o la Diferencia de los mismos.

- Se trata de los **Cocientes** que se obtienen de las divisiones que pertenecen a estas formas:

$$\frac{x^2 - y^2}{x + y} \quad o \quad \frac{x^2 - y^2}{x - y}$$; Si efectuamos las divisiones se tiene:



Por lo tanto: $\dfrac{x^2-y^2}{x+y}=x-y$ $\dfrac{x^2-y^2}{x-y}=x+y$

*La **Diferencia de los Cuadrados** de los monomios entre la **Suma** de los mismos es igual a la **Diferencia** de ellos.*

*La **Diferencia de los Cuadrados** de dos monomios entre la **Diferencia** de los mismos es igual a la **Suma** de ellos.*

Ejemplos: Hallar el cociente de cada una de las fracciones siguientes:

1) $\dfrac{x^2-1}{x+1}=\dfrac{x^2-1^2}{x+1}=x-1$

2) $\dfrac{x^2-4}{x+2}=\dfrac{x^2-2^2}{x+2}=x-2$

3) $\dfrac{x^2-9}{x+3}=\dfrac{x^2-3^2}{x+3}=x-3$

4) $\dfrac{4x^2-25}{2x+5}=\dfrac{(2x)^2-(5)^2}{2x+5}=2x-5$

5) $\dfrac{x^8y^2-z^4}{x^4y+z^2}=\dfrac{(x^4y)^2-(z^2)^2}{x^4y+z^2}=x^4y-z^2$

6) $\dfrac{x^2-36}{x-6}=\dfrac{x^2-6^2}{x-6}=x+6$

7) $\dfrac{100-z^2}{10-z}=\dfrac{10^2-z^2}{10-z}=10+z$

8) $\dfrac{(x+3)^2-y^2}{x+3-y}=x+3+y$

9) $\dfrac{4x^{2n+2}-9y^{4n}}{2x^{n+1}-3y^{2n}}=\dfrac{(2x^{n+1})^2-(3y^{2n})^2}{2x^{n+1}-3y^{2n}}=2x^{n+1}+3y^{2n}$

10) $\dfrac{0{,}16x^{4n+2}-0{,}25y^{2n+4}}{0{,}4x^{2n+1}-0{,}5y^{n+2}}=\dfrac{(0{,}4x^{2n+1})^2-(0{,}5y^{n+2})^2}{0{,}4x^{2n+1}-0{,}5y^{n+2}}=0{,}4x^{2n+1}+0{,}5y^{n+2}$



TALLER DE EJERCICIOS Nº  36

1. Aplica la Regla de los Cocientes Notables y halla el cociente de:

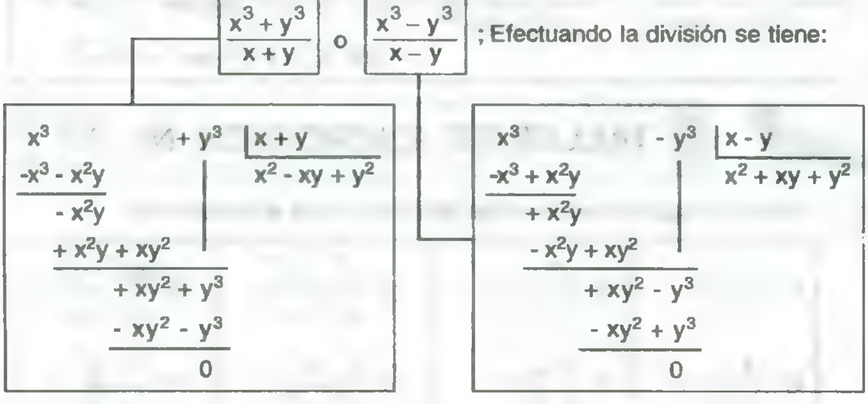
a) $\dfrac{x^2-81}{x-9}=$	e) $\dfrac{w^2-144}{w+12}=$	i) $\dfrac{(x-y)^2-1}{x-y+1}=$
b) $\dfrac{z^2-1}{z+1}=$	f) $\dfrac{4x^2-100}{2x+10}=$	j) $\dfrac{9-(2x-1)^2}{3-2x+1}=$
c) $\dfrac{x^2-121}{x-11}=$	g) $\dfrac{1-9z^2}{1+3z}=$	k) $\dfrac{49x^4-9z^2}{7x^2+3z}=$
d) $\dfrac{36x^2-4}{6x+2}=$	h) $\dfrac{169-16x^2}{13+4x}=$	l) $\dfrac{16x^6y^4-1}{4x^3y^2+1}=$

2. Aplica la Regla de los Cocientes Notables y halla el cociente de:

a) $\dfrac{25x^2-1}{5x+1}=$	f) $\dfrac{x^{2n}-y^{2n}z^{2n}}{x^n-y^nz^n}=$	k) $\dfrac{(3x^2+1)^2-4y^4}{3x^2+1-2y^2}=$
b) $\dfrac{49y^4-16}{7y^2-4}=$	g) $\dfrac{x^{2n+2}-121y^{2n}}{x^{n+1}+11y^n}=$	l) $\dfrac{(x+y)^{2n}-(2z+3)^{2n}}{(x+y)^n-(2z+3)^n}=$
c) $\dfrac{64x^6-81z^2}{8x^3-9z}=$	h) $\dfrac{49x^{4n+2}-36}{7x^{2n+1}+6}=$	m) $\dfrac{0{,}16x^6-0{,}09z^4}{0{,}4x^3+0{,}3z^2}=$
d) $\dfrac{81x^4-16y^6}{9x^2-4y^3}=$	i) $\dfrac{x^8z^{10}-25z^4}{x^4z^5-5z^2}=$	n) $\dfrac{0{,}81x^{10}-0{,}64z^4}{0{,}9x^5+0{,}8z^2}=$
e) $\dfrac{49x^4-225z^4}{7x^2+15z^2}=$	j) $\dfrac{(x+y)^2-(z+w)^2}{x+y-z-w}=$	o) $\dfrac{1{,}21x^{2n}-0{,}49z^{4n}}{1{,}1x^n+0{,}7z^{2n}}=$
p) $\dfrac{\frac{4}{100}x^{6n}-\frac{25}{36}y^{4n}}{\frac{2}{10}x^{3n}+\frac{5}{6}y^{2n}}=$	q) $\dfrac{\frac{16}{49}x^6-\frac{4}{9}y^{10}z^4}{\frac{4}{7}x^4-\frac{2}{3}y^5z^2}=$	

II. **Cociente de la Suma o Diferencia de los Cubos de Dos Monomios entre la Suma o Diferencia de los mismos.**

- Se trata de escribir por simple inspección los cocientes:



Por lo tanto:

$$\frac{x^3+y^3}{x+y}=x^2-xy+y^2 \qquad \frac{x^3-y^3}{x-y}=x^2+xy+y^2$$

> ***La Suma de los Cubos** de dos monomios entre la **Suma** de los mismos es igual al cuadrado del primero, **menos** el producto del primero por el segundo **más** el cuadrado del segundo.*

> ***La Diferencia de los Cubos** de dos monomios entre la **Diferencia** de los mismos es igual al cuadrado del primero **más** el producto del primero por el segundo **más** el cuadrado del segundo.*

Ejemplos: Halla el cociente de cada una de las siguientes fracciones:

1) $\dfrac{x^3+8}{x+2}=\dfrac{x^3+2^3}{x+2}=x^2-2x+2^2=x^2-2x+4$

2) $\dfrac{y^3+27}{y+3}=\dfrac{y^3+3^3}{y+3}=y^2-3y+3^2=y^2-3y+9$

3) $\dfrac{8x^3+1}{2x+1}=\dfrac{(2x)^3+1^3}{2x+1}=(2x)^2-2x.1+1^2=4x^2-2x+1$

4) $\dfrac{z^3-64}{z-4}=\dfrac{z^3-4^3}{z-4}=z^2+z.4+4^2=z^2+4z+16$

5) $\dfrac{64x^6-125y^3}{4x^2-5y}=\dfrac{(4x^2)^3-(5y)^3}{4x^2-5y}=(4x^2)^2+(4x^2).(5y)+(5y)^2$
$= 16x^4+20x^2y+25y^2$

6) $\dfrac{343x^6y^3-27z^3w^9}{7x^2y-3zw^3}=\dfrac{(7x^2y)^3-(3zw^3)^3}{7x^2y-3zw^3}=(7x^2y)^2+(7x^2y).(3zw^3)+(3zw^3)^2$
$= 49x^4y^2+21x^2yzw^3+9z^2w^6$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 37



1. Aplica la Regla de los Cocientes Notables y halla el cociente de:

a) $\dfrac{x^3+1}{x+1}=$	d) $\dfrac{x^9+1}{x^3+1}=$	g) $\dfrac{x^{12}-y^{15}}{x^4-y^5}=$	j) $\dfrac{8z^6+y^9}{2z^2+y^3}=$
b) $\dfrac{64+x^3}{4+x}=$	e) $\dfrac{8-x^9}{2-x^3}=$	h) $\dfrac{x^6-y^6}{x^2-y^2}=$	k) $\dfrac{x^3-y^6}{x-y^2}=$
c) $\dfrac{125+y^3}{5+y}=$	f) $\dfrac{x^{12}+27}{x^4+3}=$	i) $\dfrac{x^6+8y^3}{x^2+2y}$	l) $\dfrac{216-x^3}{6-x}=$

2. Aplica la Regla de los Cocientes Notables y halla el cociente de:

a) $\dfrac{27x^6-64y^3}{3x^2-4y}=$	e) $\dfrac{729x^{9n}-512y^{6n}}{9x^{3n}-8y^{2n}}=$	i) $\dfrac{0{,}008x^3-0{,}001y^3}{0{,}2x-0{,}1y}=$
b) $\dfrac{729x^9+27y^3}{9x^3+3y}=$	f) $\dfrac{x^6y^9+27w^3z^6}{x^2y^3+3wz^2}=$	j) $\dfrac{0{,}027x^6y^9-0{,}512x^{3n}}{0{,}3x^2y^3-0{,}8x^n}=$
c) $\dfrac{64x^{3n}-125y^{3n}}{4x^n-5y^n}=$	g) $\dfrac{0{,}027x^3-0{,}001y^6}{0{,}3x-0{,}1y^2}=$	k) $\dfrac{0{,}001w^{12}-0{,}125y^{15}}{0{,}1w^4-0{,}5y^5}=$
d) $\dfrac{216x^{6n}+8y^{3n}}{6x^{2n}+2y^n}=$	h) $\dfrac{0{,}064x^9+0{,}125y^9}{0{,}4x^3+0{,}5y^3}=$	l) $\dfrac{0{,}027x^3y^9-0{,}008z^{12}}{0{,}3xy^3-0{,}2z^4}=$
m) $\dfrac{\frac{1}{8}x^3+\frac{8}{27}y^6}{\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y^2}=$	o) $\dfrac{\frac{1}{64}x^{3n}-\frac{1}{125}y^{6n}}{\frac{1}{4}x^n+\frac{1}{5}y^{2n}}=$	q) $\dfrac{\frac{27}{1\,000}x^{12}y^{15}+\frac{1\,000}{343}z^9}{\frac{3}{10}x^4y^5+\frac{10}{7}z^3}=$
n) $\dfrac{\frac{8}{125}x^6+\frac{1}{27}y^9}{\frac{2}{5}x^2+\frac{1}{3}y^3}=$	p) $\dfrac{0{,}064x^{3n}y^{6n}-\frac{1}{64}z^{9m}}{0{,}4x^ny^{2n}-\frac{1}{4}z^{3m}}=$	

3. Simplifica cada fracción siguiente:

a) $\dfrac{1+x}{1+x^3}=$	c) $\dfrac{1+3x}{1-9x^2}=$	e) $\dfrac{11-y}{1\,331-y^3}=$	g) $\dfrac{x-0{,}3}{x^3-0{,}027}=$
b) $\dfrac{5-y}{125-y^3}=$	d) $\dfrac{16x^2-25y^2}{4x+5y^2}=$	f) $\dfrac{y+10}{y^3+1\,000}=$	h) $\dfrac{3x-y}{9x^2-y^2}=$

4. Teniendo en cuenta que si:

$$\frac{x^3+y^3}{x+y}=x^2-xy+y^2 \quad \text{entonces} \quad x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

Halla el factor para que se cumpla la igualdad:

a) $x^3-27=(\quad)(x^2+3x+9)$	b) $8y^3+1=(\quad)(4y^2-2y+1)$
c) $125x^6-64=(\quad)(25x^4+20x^2+16)$	d) $x^9+y^3=(\quad)(x^6-x^3y+y^2)$
e) $8x^3-27=(2x-3)(\quad)$	f) $216+x^9=(6+x^3)(36-6x^3+x^6)$
g) $512x^6-y^3=(8x^2-y)(64+8x^2y+y^2)$	h) $x^3y^6-1=(xy^2-1)(x^2y^4+xy^2+1)$

5. Simplificar cada fracción y reduce a términos semejantes:

a) $\dfrac{3(x^2-4)}{x+2}+2x+3$ b) $\dfrac{x^4-9x^2y^4}{x^2-3xy^2}+\dfrac{x^3+8y^6}{x+2y^2}$ c) $\dfrac{2(1-x^6)}{1-x^2}+3x^4-2x^2$

d) $\dfrac{4(x^4-0{,}25)}{x^2-0{,}5}-\dfrac{8(x^6+1)}{x^4-x^2+1}$

e) $\dfrac{2(x^3-y^3)}{x-y}-\dfrac{(x^2-9y^2)}{x+3y}$

f) $\dfrac{(x^3+8y^6)}{x+2y^2}+\dfrac{x^4-4x^2y^4}{x^2-2xy^2}$

- **En General: Los Cocientes Notables.-**

Son expresiones de la forma: $\dfrac{x^n \pm y^n}{x \pm y}$ en los cuales el resultado de la división se puede anticipar sin necesidad de efectuar la división.

Se presentan 4 casos:



1º Caso:

$\dfrac{x^n-y^n}{x-y}$

Para saber si esta división es exacta, igualamos el divisor a cero; osea: $x - y = 0$ entonces: $x = y$. Luego reemplazamos este valor en la expresión dividendo, si el resultado es cero es porque la división es exacta.

Dividendo: $x^n - y^n = y^n - y^n = 0$

Luego, hallamos el cociente, aplicando el Método de Ruffini:

$1x^n + 0 + 0 + 0 + \ldots\ldots + 0 - y^n$ entre $1x - 1y$

	1	0	0	0	0	$-y^n$
(y)		$+y$	$+y^2$	$+y^3$	$+y^{n-1}$	$+y^n$
	1	$+y$	$+y^2$	$+y^3$	$+y^{n-1}$	0

Cociente $= 1 + y + y^2 + y^3 + \ldots\ldots + y^{n-1}$

Residuo $= 0$

* El valor que tomó "**x**" para que el divisor se anule es: $x - y = 0$

Entonces: $x = y$

Donde: $Q(x) = 1x^{n-1} + yx^{n-2} + y^2x^{n-3} + y^3x^{n-4} + \ldots\ldots + y^{n-1}$ ó

$Q(x) = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + x^{n-4}y^3 + \ldots\ldots + y^{n-1}$

Ejemplo 1: $\dfrac{x^5-y^5}{x-y} = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$

Ejemplo 2:

$$\frac{x^6-64}{x-2} = \frac{x^6-2^6}{x-2} = x^5 + x^4(2) + x^3(2)^2 + x^2(2)^3 + x(2)^4 + 2^5$$

$$\frac{x^6-64}{x-2}=\frac{x^6-2^6}{x-2}=x^5+2x^4+4x^3+8x^2+16x+32$$

Ejemplo 3:

$$\frac{1\,000-x^3}{10-x}=\frac{10^3-x^3}{10-x}=10^2+10(x)+x^2$$

$$=100+10x+x^2$$

Ejemplo 4:

$$\frac{x^4-1}{x-1}=x^3+x^2(1)+x(1)^2+1^3=x^3+x^2+x+1$$

2º Caso:

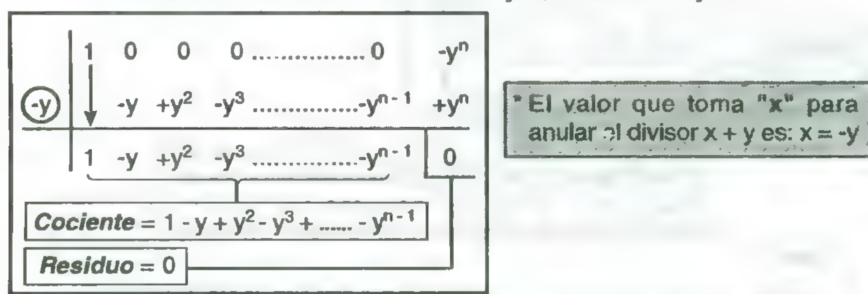
$$\frac{x^n-y^n}{x+y}$$

Para saber si esta división es exacta, igualamos al divisor a cero, osea: $x+y=0$; entonces $x=-y$, luego reemplazamos el valor hallado en el dividendo, si lo que resulte es cero, es porque la división es exacta.

Dividendo: $x^n - y^n = (-y)^n - y^n = 0$ (se cumple sólo si "n" es par)

Luego, hallamos el cociente aplicando el Método de Ruffini para el caso de n = número par.

Dividendo: $1x^n + 0 + 0 + 0$ .... $- y^n$; Divisor: $x + y$



Donde:

$$Q(x)=1x^{n-1}-yx^{n-2}+y^2x^{n-3}-y^3x^{n-4}+\ldots\ldots-y^{n-1}$$

$$Q(x)=x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-x^{n-4}y^3+\ldots\ldots-y^{n-1}$$

Nota:

No desarrollamos el caso en que n = número impar, ya que la división no es exacta y por lo que excluiremos el caso del estudio como cociente notable.

Ejemplo 1: Efectuar:

$$\frac{x^6-y^6}{x+y}=x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5$$

Ejemplo 2: Efectuar:

$$\frac{16x^4-81y^8}{2x+3y^2}=\frac{(2x)^4-(3y^2)^4}{(2x)+(3y^2)}=(2x)^3-(2x)^2(3y^2)+(2x)(3y^2)^2-(3y^2)^3$$

$$=8x^3-12x^2y^2+18xy^4-27y^6$$

3º Caso:

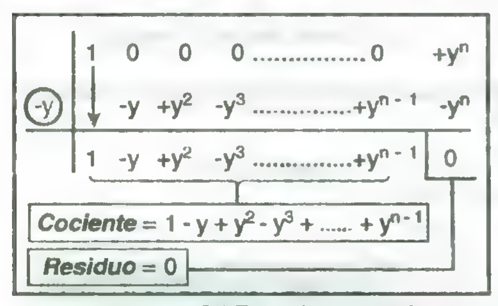
$$\frac{x^n+y^n}{x+y}$$

Para saber si esta división es exacta, igualamos al divisor a cero, osea: $x + y = 0$; entonces: $x = -y$, luego, reemplazamos el valor hallado en el dividendo, si lo que resulte es cero, es porque la división es exacta.

Dividendo: $x^n + y^n = (-y)^n + y^n = 0$ (se cumple sólo si: n = número impar).

Luego, hallamos el cociente aplicando el Método de Ruffini; para el caso de n = número impar.

Dividendo: $1x^n + 0 + 0 + 0 \;.....+ 0 + y^n$; Divisor: $x + y$



* El valor que toma "x" para anular el divisor $x + y$ es: $x = -y$

Donde:

$$Q(x)=x^{n-1}-yx^{n-2}+y^2x^{n-3}-y^3x^{n-4}+........+y^{n-1}$$

$$Q(x)=x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-x^{n-4}y^3+........+y^{n-1}$$

Nota:

*No desarrollamos el caso en que n = número par, ya que la división no es exacta y por lo que excluiremos el caso del estudio como **Cociente Notable**.*

Ejemplo 1: Efectuar:

$$\frac{x^7+y^7}{x+y}=x^6-x^5y+x^4y^2-x^3y^3+x^2y^4-xy^5+y^6$$

Ejemplo 2: Efectuar:

$$\frac{x^{10}+32y^5}{x^2+2y}=\frac{(x^2)^5+(2y)^5}{(x^2)+(2y)}=(x^2)^4-(x^2)^3(2y)+(x^2)^2(2y)^2-(x^2)(2y)^3+(2y)^4$$

$$\frac{x^{10}+32y^5}{x^2+2y}=\frac{(x^2)^5+(2y)^5}{(x^2)+(2y)}=x^8-2x^6y+4x^4y^2-8x^2y^3+16y^4$$

4º Caso:

$$\frac{x^n+y^n}{x-y}$$

Para saber si esta división es exacta, igualamos al divisor a cero, osea: $x - y = 0$, entonces: $x = y$, luego reemplazamos el valor hallado en el dividendo, si lo que resulte es cero, es porque la división es exacta.

Dividendo: $x^n + y^n = y^n + y^n = 2y^n \neq 0$, por lo que excluiremos el presente caso debido a que la división no es exacta.

> ***Nota:***
>
> *Sólo consideraremos como **Cocientes Notables** aquellas divisiones de la forma:* $\frac{x^n \pm y^n}{x \pm y}$ *; que sean exactas.*

Observaciones:

1) Al desarrollar expresiones de la forma: $\frac{x^n \pm y^n}{x \pm y}$

   El exponente del primer término irá disminuyendo de uno en uno a partir de (n - 1) hasta cero inclusive mientras que el exponente del segundo término irá aumentando de uno en uno a partir de cero hasta (n - 1) inclusive.
2) El desarrollo tiene "n" términos.
3) En los Cocientes Notables que tengan por denominador expresiones de la forma (x - y) los signos de los términos del desarrollo serán positivos.
4) En los Cocientes Notables que tengan por denominador expresiones de la forma (x + y) los signos del desarrollo serán alternadamente positivos y negativos.
5) Cualquier término del desarrollo de un cociente notable se puede encontrar usando la fórmula:

$$T_k = x^{n-k}y^{k-1}$$

En donde:

"k" es el lugar del término que se pide, "x" representa el primer término del denominador del **Cociente Notable, "y"** representa el segundo término del denominador del **Cociente Notable** y "n" es el exponente común al cual están elevados cada uno de los términos del denominador del cociente y que aparecen en el numerador.

6) Para que una expresión de la forma: $\frac{x^m \pm y^p}{x^n \pm y^q}$; sea desarrollado como **Cociente Notable**, ante todo debe cumplirse que: $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$

Ejemplo 1: Calcular el 5to. término del desarrollo de: $\dfrac{x^{10}-y^{10}}{x-y}$

Resolución:

Aplicando la fórmula: $T_k = x^{n-k}y^{k-1}$; ***Donde:*** $\begin{cases} k = 5 \\ n = 10 \end{cases}$

Luego: $T_5 = x^{10-5}y^{5-1} = x^5y^4$

Ejemplo 2: Calcular el 3er. término del desarrollo de: $\dfrac{64-z^6}{4-z^2}$

Resolución:

La expresión dada, se puede escribir así:

Por fórmula: $T_k = x^{n-k}y^{k-1}$; ***Donde:*** $\begin{cases} k = 3\ ;\ x = 4 \\ n = 3\ ;\ y = z^2 \end{cases}$

$$T_3 = 4^{3-3}(z^2)^{3-1} = 4^0z^4 = z^4$$

Ejemplo 3: Calcular el 4to. término del desarrollo de: $\dfrac{64x^6-y^6}{2x-y}$

Resolución:

La expresión dada, se puede escribir así:

Por fórmula: $T_k = x^{n-k}y^{k-1}$; ***Donde:*** $\begin{cases} k = 4 \\ n = 6 \end{cases}$

$$T_4 = (2x)^{6-4}y^{4-1} = (2x)^2y^3 = 4x^2y^3$$

Ejemplo 4: Desarrollar:

$$E = \frac{(x+2)^3-8}{x}$$

Resolución:

Sumamos y restamos 2 en el denominador:

$$E = \frac{(x+2)^3-8}{(x+2)-2} = (x+2)^2 + (x+2)2 + 2^2$$

$$= x^2 + 4x + 4 + 2x + 4 + 4$$

$$\therefore\ E = x^2 + 6x + 12$$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 38



1. Calcular el 3er. término del desarrollo de:	$\dfrac{x^7 - y^7}{x - y}$
2. Calcular el 4to. término del desarrollo de:	$\dfrac{81x^4 - 1}{3x - 1}$
3. Calcular el 2do. término del desarrollo de:	$\dfrac{125x^3 - 27}{5x - 3}$
4. Calcular el 4to. término del desarrollo de:	$\dfrac{64x^6 - 1}{2x + 1}$
5. Calcular el 3er. término del desarrollo de:	$\dfrac{x^{14} + 128y^7}{x^2 + 2y}$

6. Efectuar:

a) $\dfrac{x^5 - 32}{x - 2} =$

b) $\dfrac{x^6 - 64y^6}{x - 2y} =$

c) $\dfrac{64x^6 - y^6}{2x + y} =$

e) $\dfrac{y^8 - x^8}{y + x} =$

f) $\dfrac{x^{10} - y^{10}}{x + y} =$

g) $\dfrac{x^{15} - y^{15}}{x^3 + y^3} =$

i) $\dfrac{x^9 + y^9}{x + y} =$

j) $\dfrac{x^{21} + y^{21}}{x^3 + y^3} =$

k) $\dfrac{x^{30} + y^{30}}{x^{10} + y^{10}} =$

RESPUESTAS TALLER

1.	2.	3.	4.	5.
x^4y^2	1	$15x$	$-4x^2$	$4x^8y^2$

6.

a) $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$

b) $x^5 + 2x^4y + 4x^3y + 8x^2y^3 + 16xy^4 + 32y^5$

c) $32x^5 - 16x^4y + 8x^3y^2 - 4x^2y^3 + 2xy^4 - y^5$

d) $y^7 - y^6x + y^5x^2 - y^4x^3 + y^3x^4 - y^2x^5 + yx^6 - x^7$

e) $x^9 - x^8y + x^7y^2 - x^8y^3 + x^5y^4 - x^4y^5 + x^3y^6 - x^2y^7 + xy^8 - y^9$

f) $x^{12} - x^9y^3 + x^8y^6 - x^3y^9 + y^{12}$

g) $x^8 - x^7y + x^6y^2 - x^5y^3 + x^4y^4 - x^3y^5 + x^2y^6 - xy^7 + y^8$

h) $x^{18} - x^{15}y^3 + x^{12}y^8 - x^9y^9 + x^6y^{12} - x^3y^{15} + y^{18}$

i) $x^{20} - x^{10}y^{10} + y^{20}$



EJERCICIOS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA

Organizados por las Academías:

César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa.

1. Hallar: (a + b), si el polinomio: $x^3 - 11x^2 - bx + a$; es divisible entre: $x^2 - 9$

a) 108 **b)** 107 **c)** 106 **d)** 105 **e)** 104

Resolución:

Dividiendo por el Método de Horner; se tiene: $1x^3 - 11x^2 - bx + a$ entre: $x^2 + 0x - 9$

①	1	-11	-b	a
0		0	9	
9			0	-99
	1	-11	(9 - b)	(a - 99)

Cociente: 1, -11 — Residuo: (9 - b), (a - 99)

* Como es divisible el residuo es cero, osea:

i) $9 - b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 9}$

ii) $a - 99 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 99}$

$\therefore$ $\boxed{a + b = 99 + 9 = 108}$ ***Rpta. a***

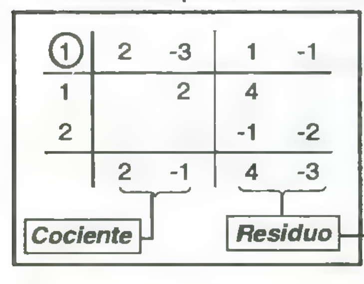
2. El residuo de la división: $(2x^3 - 3x^2 + x - 1) : (x^2 - x - 2)$; es: $r(x) = ax + b$

Calcular: (3a + 4b)

a) 0 b) 1 c) -1 d) 2 e) -2

Resolución:

Dividiendo por el Método de Horner, se tiene:



①	2	-3	1	-1
1		2	4	
2			-1	-2
	2	-1	4	-3

Cociente: 2, -1 — Residuo: 4, -3

Residuo = 4x - 3

$ax + b = 4x + (-3)$

Por comparación de términos:

$\boxed{a = 4}$; $\boxed{b = -3}$

Luego:

$\boxed{3a + 4b = 3(4) + 4(-3) = 0}$ ***Rpta. a***

3. Calcular el cuarto término del desarrollo de:

$$\frac{(x+y)^{18} - (x-y)^{12}}{(x+y)^3 - (x-y)^2} \text{ ; para: } x = 2\sqrt{3} \text{ ; } y = \sqrt{10}$$

a) 32 b) 64 c) 16 d) 128 e) 81

Resolución:

La expresión dada, se puede escribir de la manera siguiente:

$$\frac{[(x+y)^3]^6 - [(x-y)^2]^6}{(x+y)^3 - (x-y)^2}$$; ***Por propiedad:*** $\boxed{T_k = x^{n-k}y^{k-1}}$

Obtenemos:

$$T_4 = [(x+y)^3]^{6-4}.[(x-y)^2]^{4-1} = (x+y)^6(x-y)^6$$

$$T_4 = [(x+y)(x-y)]^6 = [(x^2-y^2)]^6 \text{ ; pero: } \boxed{x = 2\sqrt{3}} \text{ ; } \boxed{y = \sqrt{10}}$$

$$T_4 = [(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{10})^2]^6 = [12-10)]^6 \Rightarrow \therefore \boxed{T_4 = 2^6 = 64}$$ ***Rpta. b***

4. ¿Cuál de los desarrollos de las siguientes divisiones notables posee el mayor número de términos.

a) $\frac{x^{22}+1}{x^2+1}$ b) $\frac{x^{27}+1}{x^3+1}$ c) $\frac{x^{10}+1}{x+1}$ d) $\frac{x^{124}-1}{x^{31}-1}$ e) $\frac{x^{105}-1}{x^{15}-1}$

Resolución:

a) $\frac{x^{22}+1}{x^2+1}$ ➧ # de términos = $\frac{22}{2} = \boxed{11}$	d) $\frac{x^{124}-1}{x^{31}-1}$ ➧ # de términos = $\frac{124}{31} = \boxed{4}$
b) $\frac{x^{27}+1}{x^3+1}$ ➧ # de términos = $\frac{27}{3} = \boxed{9}$	e) $\frac{x^{105}-1}{x^{15}-1}$ ➧ # de términos = $\frac{105}{15} = \boxed{7}$
c) $\frac{x^{10}+1}{x^3+1}$ ➧ # de términos = $\frac{10}{1} = \boxed{10}$	

$\therefore$ El que posee mayor número de términos es: $\frac{x^{22}+1}{x^2+1}$ ***Rpta. a***

5. Indicar cuántos términos posee:

$$(x^6 + x^5 + x^4 + ... + x + 1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 - x + 1)$$

a) 14 b) 12 c) 7 d) 6 e) 9

Resolución:

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{x^7-1}{x-1} \; ; \; x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = \frac{x^7+1}{x+1}$$

Luego:

$$\left(\frac{x^7-1}{x-1}\right)\left(\frac{x^7+1}{x+1}\right) = \frac{(x^7-1)(x^7+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(x^7)^2-1^2}{x^2-1^2} = \boxed{\frac{(x^2)^7-1}{(x^2)-1}}$$

Este cociente notable tiene 7 términos

∴ **La expresión dada inicialmente posee: 7 términos**

6. Indicar cuántos términos tiene el siguiente desarrollo:

$\dfrac{x^{4n}-y^{5n}}{x^4-y^5}$; sabiendo que el término 5to. es de grado absoluto 32.

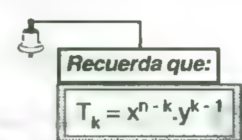
a) 9 b) 7 c) 8 d) 32 e) 40

Resolución:

• # de términos $= \dfrac{4n}{4} = \dfrac{5n}{5} = n$

• De la expresión: $\dfrac{(x^4)^n-(y^5)^n}{(x^4)-(y^5)}$; $T_5 = (x^4)^{n-5}(y^5)^{5-1}$

$T_5 = x^{4n-20}.y^{20}$



Por dato: Grado absoluto del 5to. término (T_5) es: 32.

Luego: $(4n - \not{20}) + \not{20} = 32$

$4n = 32 \Rightarrow \therefore$ $\boxed{n = 8}$ **(# de términos)** ***Rpta. c***

7. Para que valor de "p" la división:

$\dfrac{x^{p^3}-y^{216}}{x^8-y}$; da un cociente notable.

a) 12 b) 3 c) 4 d) 6 e) No existe

Resolución:

Sabemos Que: Número de términos $= \dfrac{p^3}{8} = \dfrac{216}{1}$

Donde: $p^3 = 216.8 \Rightarrow p^3 = (3^3.2^3).(2^3) \Rightarrow p^{\not 3} = (3.2.2)^{\not 3}$

$\therefore$ $\boxed{p = 12}$ ***Rpta. a***

8. Hallar el término de lugar 13, en el desarrollo de:

$\dfrac{x^{120}-y^{180}}{x^2-y^3}$

a) x^9y^{36} b) x^9y^6 c) $x^{84}y^{36}$ d) $x^{94}y^{36}$ e) $x^{94}y^{23}$

Resolución:

La expresión dado, se puede escribir así:

$\dfrac{(x^2)^{60}-(y^3)^{60}}{(x^2)-(y^3)}$; ***Donde:*** $T_{13} = (x^2)^{60-13}.(y^3)^{13-1} \Rightarrow T_{13} = (x^2)^{47}.(y^3)^{12}$

$\boxed{T_{13} = x^{94}.y^{36}}$ ***Rpta. d***



9. Determinar: n/m; de modo que el polinomio:

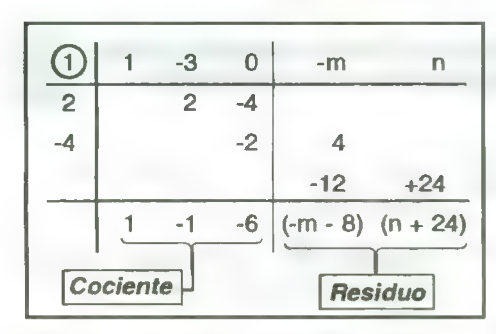
$$x^4 - 3x^3 - mx + n \text{ ; sea divisible por: } x^2 - 2x + 4$$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Resolución:

Dividiendo por el Método de Horner, se tiene:

$$x^4 - 3x^3 + 0x^2 - mx + n \text{ entre: } x^2 - 2x + 4$$



①	1	-3	0	-m	n
2		2	-4		
-4			-2	4	
				-12	+24
	1	-1	-6	(-m - 8)	(n + 24)
	Cociente			Residuo	

* Como es divisible el residuo es cero, osea:

i) $(-m - 8) = 0 \Rightarrow \boxed{m = -8}$

ii) $n + 24 = 0 \Rightarrow \boxed{n = -24}$

Luego: $\frac{n}{m} = \frac{-24}{-8} = 3$

$\therefore \boxed{\frac{n}{m} = 3}$ ***Rpta. c***

10. Encontrar el resto que se obtiene en:

$$\frac{(x+5)^{80} - (x+3)^{81} + 1}{(x+4)}$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

Resolución:

Por el Teorema del Resto; el divisor: x + 4 ; lo igualamos a cero; osea:

$$x + 4 = 0 \Rightarrow \therefore \boxed{x = -4}$$

El valor hallado: x = -4, lo reemplazamos en el dividendo, para así hallar el residuo, veamos:

$$\text{Residuo} = (-4 + 5)^{80} - (-4 + 3)^{81} + 1$$

$$= (1)^{80} - (-1)^{81} + 1 = 1 + 1 + 1 = \boxed{3}$$ ***Rpta. c***



11. Para que valor de "m", el polinomio:

$$P(x) = (x^2 - x + m)^3 + (mx - 1)^3 \text{, es divisible entre } (x + 2)$$

a) m = 5 b) m = -5 c) m = 3 d) m = 1 e) m = -1

Resolución:

- Igualamos el divisor a cero; así: $x + 2 = 0 \Rightarrow \therefore \boxed{x = -2}$
- Reemplazamos el valor de x = - 2, en el polinomio P(x); veamos:

$P(-2) = [(-2)^2 - (-2) + m]^3 + [m(-2) - 1]^3$

$P(-2) = [4 + 2 + m]^3 + [2m + 1]^3$

$P(-2) = (6 + m)^3 - (2m + 1)^3$; esta expresión lo igualamos a cero; así:

$$(6 + m)^3 - (2m + 1)^3 = 0$$

Donde: $(6 + m)^3 = (2m + 1)^3 \Rightarrow 6 + m = 2m + 1 \Rightarrow \therefore \boxed{m = 5}$ ***Rpta. a***



EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE OPERACIONES CON POLINOMIOS



NIVEL I

Ejercicio 1 : Si: $P_{(x)} = 4x^5 - 6x^2 - x + 3$ es un polinomio, su grado es:

A) -1 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

Ejercicio 2 : Dados: $P_{(x)} = 4x^2 - 5x + 3$ y $Q_{(x)} = 2x^3 - x^2 + 5$; entonces: $P_{(x)} + Q_{(x)}$ es:

A) $6x^5 - 6x^3 + 8$
B) $2x^4 + 3x^3 - 5x + 8$
C) $2x^3 + 3x^2 - 5x + 8$
D) $2x^3 + 4x^2 - 5x + 8$
E) $2x^3 - 3x^2 - 5x + 8$

Ejercicio 3 : Sean: $P_{(x)} = 5x^4 - 3x + 1$ y $Q_{(x)} = x^4 - 3$; entonces: $P_{(x)} - Q_{(x)} = ?$

A) $6x^4 - 3x - 2$ **B)** $4x^4 - 3x + 4$
C) $4x^4 - 3x - 2$ **D)** $4x^4 + 3x - 2$
E) $4x^4 + 3x + 4$

Ejercicio 4 : Si: $P_{(x)} = x^4 - x^3 + 3$ y $Q_{(x)} = x^4 + x^3 - 3$; entonces: $2P_{(x)} - Q_{(x)}$; es:

A) $2x^4$ **B)** $-2x^3 + 6$
C) $x^4 - 3x^3 + 9$ **D)** $x^4 - 3x^3 - 9$
E) $x^4 - 3x^3 + 6$

Ejercicio 5 : Si: $P_{(x)} = 6x^5 - x^4 + 2x^3 - x^2 - 1$; entonces: $P_{(-1)}$ es:

A) 1 **B)** -1 **C)** 11 **D)** -11 **E)** 6

Ejercicio 6 : Si: $P_{(x)} = 6x^3 - x^2 + 2x - 1$; entonces: $P_{(3)}$ es:

A) 156 **B)** 158 **C)** 80 **D)** 84 **E)** 152

Ejercicio 7 : Si: $Q_{(x)} = 4x^4 - 3x^2 + 2$; Entonces: $Q_{\left(\sqrt{2}\right)}$; es:

A) 10 **B)** 12 **C)** 14 **D)** 16 **E)** 18

Ejercicio 8 : Al dividir: $x^4 - 2x^2 - 6$ por $x + 3$; el resto es:

A) 69 **B)** 62 **C)** 59 **D)** 57 **E)** 54

Ejercicio 9 : Al dividir:

$x^5 - 6x^4 - 2x^3 - x + 1$ por $x^3 - 3x^2 + 1$ el cociente y el resto son respectivamente.

A) $x^2 + 3x - 11$ y $-34x^2 - 2x + 12$
B) $x^2 - 3x + 11$ y $-34x^2 + 2x - 12$
C) $x^2 - 3x - 11$ y $-34x^2 + 2x + 12$
D) $x^2 + 3x + 11$ y $-34x^2 - 2x - 12$
E) $-x^2 + 3x - 11$ y $34x^2 - 2x - 12$

Ejercicio 10 : Cuál es el polinomio que dividido por $x^2 + 1$ da como cociente $x + 2$ y resto $x - 3$.

A) $x^3 - 2x^2 + 2x - 1$ B) $x^3 + 2x^2 + 2x - 1$
C) $x^3 + 2x^2 - 2x - 1$ D) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$
E) $x^3 - 2x^2 + 2x + 1$

Ejercicio 11 : Al dividir:

$x^4 - 2x^3 + 4x^2 - x + 1$ por $x - 2$ el resto es:

A) 3 B) 9 C) 15 D) 51 E) 61

Ejercicio 12 : ¿Cuál es el valor que debe tener K en el polinomio $4x^5 - 2x^3 + Kx - 2$ para que sea divisible por $x - 2$?

A) 5 B) 25 C) 50 D) -50 E) -55

Ejercicio 13 : ¿Qué valor debe tener "K" en el polinomio $6x^3 - Kx^2 + x - 1$ para que al dividirlo por $x^2 - 3$, el resto sea $19x - 7$?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

Ejercicio 14 : Qué valores deben tener "a" y "b" para que:

$5x^3 - 2x^2 + ax - b$ sea divisible por $x^2 + 1$.

A) 5 y 2 B) 5 y -2 C) -5 y 2
D) 4 y 2 E) -5 y -2

Ejercicio 15 : Para que $x^3 - ax - x + b$ sea divisible por $x^2 + x - a$ debe ser:

A) $a = -b$ B) $a = b$ C) $a + b = 1$
D) $a - b = 1$ E) $a + b = -1$

Clave de Respuestas

1. D	2. C	3. B	4. C
5. D	6. B	7. B	8. D
9. C	10. B	11. C	12. E
13. D	14. A	15. B	

NIVEL II

Ejercicio 1 : Sumar los siguientes polinomios:

$A = x^3y^3 + 3x^3 + y^3 - x^2y^2$
$B = 2x^2y^2 - 2x^3y^3 - y^3 + x^3$
$C = -4x^3 + x^3y^3 - x^2y^2$

A) x^3 B) x^2y^2 C) y^3 D) 0 E) x^3y^3

Ejercicio 2 : Si: $M = 3x^3y^{3a-12}$

$N = x^{a+2}y^{a-10}$

son términos semejantes, hallar el valor de "a"

A) 0 B) 1 C) -1 D) -2 E) 2

Ejercicio 3 : Si: $x^2 + a^2 = 160$. Hallar: $(x + a)^2 + (x - a)^2$

A) 160 B) 320 C) 300
D) 240 E) 120

Ejercicio 4 : Simplificar:

$$\frac{a\,(a+b)^2(a-b)}{a^2-b^2}$$

A) $a(a-b)$ B) $\frac{a+b}{(a-b)^2}$ C) $\frac{(a+b)}{-b}$

D) $(a+b)^2$ E) a^2+ab

Ejercicio 5: Efectuar:

$(a+b)x + (b+c)y - [(a-b)x - (b-c)y] - 2b(x+y)$

A) $a+b+c$ B) $x+y$ C) 0
D) xy E) $ax+by$

Ejercicio 6: Reducir:

$$S = (a+b+c)(a-b+c) + (b-a+c)(a+b-c)$$

A) $a+c$ B) $2ac$ C) $a-c$
D) ac E) $4ac$

Ejercicio 7: Cuál es la suma de los coeficientes del cociente que resulta de dividir:

$$\frac{x^3-4x+6}{x^2+2x-2}$$

A) 1 B) 4 C) 5 D) -1 E) 2

Ejercicio 8: Reducir:

$$N = (x+1)^2 - (x+2)^2 - (x+3)^2 + (x+4)^2$$

A) 3 B) 4 C) 2 D) 1 E) 0

Ejercicio 9: En la siguiente expresión los términos son semajantes:

$$P_{(x,y)} = 3x^{a+1}y^{b+2} + 1/2x^{b+3}y^a - 4x^4y^a$$

Calcular la suma de a y b.

A) 2 B) 4 C) 8 D) 3 E) 1

Ejercicio 10: Al sumar los siguientes polinomios:

$P = 3x^2+5y^2+8xy$; $Q = 2y^2+5x^2+xy$
$R = x^2-y^2+xy$

La suma de los coeficientes del resultado es:

A) 6 B) 25 C) 7 D) 10 E) 13

Ejercicio 11: Qué valor debe tomar "a" en la siguiente división: $\frac{x^4+x^2+1}{x^2+ax+1}$; para que el residuo sea un polinomio idénticamente nulo.

A) 2 B) 0 C) -1 D) -2 E) -3

Ejercicio 12: ¿Qué expresión hay que sumar al producto de:

$\{x(x+y) - x(x-y)\}[2(x^2+y^2) - 3(x^2-y^2)]$

para obtener: $2x^3y + 3xy^3$?

A) $4x^3y - 7xy^3$ B) $7x^3y - 4xy^3$
C) $2x^3y - xy^2$ D) $x^3y + 3xy^3$
E) Cero

Ejercicio 13: Reducir:

$$3x^2y - \{2x^2y - 3z^3w - [3x^2y - 2z^3w - (4x^2y - 5z^3w)]\}$$

A) 0 B) x^2y C) $6x^2y$ D) z^3w E) $6z^3w$

Ejercicio 14: Calcular la suma de coeficientes del residuo, luego de dividir:

$$\frac{x^3-3x^2+2x+4}{x^2+x-2}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) -2

Ejercicio 15: ¿Cuál es la suma de los coeficientes del cociente que resulta de dividir: x^3-4x+6 entre x^2+2x-2

A) 1 B) 5 C) 4 D) 2 E) -1

Ejercicio 16 : Sean las expresiones algebraicas:

$A = 4x^3y^2 + 7x^2y^3 + 2x^2y^2$
$B = 2x^2y^3 - 5y^2x^3 + 6x^2y^2$
$C = 5x^2y^2 - 5x^2y^3 - 9x^3y^2$

Calcular: $\sqrt{A+B-C}$

A) x^2y^2 **B)** x^3y **C)** $2x^4y$ **D)** xy **E)** $2xy$

Ejercicio 17 : Dadas las siguientes expresiones algebraicas.

$A = 8x^3y^2 - 6x^2y^2 + 3x^2y^3$
$B = -4y^2x^2 + 5x^3y^2 + 2x^2y^3$

Hallar: $[2A - 3B]^2$

A) x^6y^4 **B)** x^3y^2 **C)** x^9y^4
D) x^3y **E)** xy^2

Ejercicio 18 : Luego de sumar P y Q, el polinomio resultante tiene:

$P = 8x^3 + 3x^2 + x + 5$; $Q = 4x^2 + 2x + 4$

A) 7 términos
B) 3 términos
C) 5 como término independiente
D) 4 como término independiente
E) 4 términos

Ejercicio 19 : Calcular la suma de coeficientes del cociente, luego de dividir:

$5n^5 - n^4 + 6n^3 - 7n + 3$ entre $5n^2 - 6n + 2$

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

Ejercicio 20 : Si: $2x^3 - x - 9$ se resta de: $4x^3 - 11x + 2$. ¿Cuánto se debe sumar a la diferencia para obtener $2x^3 + x - 5$?

A) $11x + 16$ **B)** $11x - 16$
C) $x - 16$ **D)** $11x - 6$
E) $x + 6$

Ejercicio 21 : El cociente de la división: $(x^3 + 3x^2 - x - 3) : (x^2 + 2x - 3)$, es:

A) $x + 1$ **B)** $x - 1$ **C)** $x - 2$
D) $x + 2$ **E)** $2x - 1$

Ejercicio 22 : Reducir:

$$\sqrt[4]{(a-1)(a^2+a+1)(a^3+1)(a^6+1)+1}$$

A) a **B)** a^3 **C)** a^2 **D)** $-a^2$ **E)** -1

Ejercicio 23 : Dados los polinomios:

$P = x^2 - x + 2$; $Q = 3x^2 - x - 1$
$R = 2x^2 + 2x - 3$

Hallar: $S = P\,(Q + R)$

A) $x^4 + 5x^2 - 8$
B) $5x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 6x - 8$
C) $5x^4 - 5x^3 + 10x^2$
D) $-4x^3 + 6x - 12$
E) $x^3 - x^2 + 2x + 8$

Ejercicio 24 : $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$; equivale a:

A) $x^3 + x^2 - 1$ **B)** $x^4 - x^3 + x^2$
C) $x^4 + x^2 + 1$ **D)** $x^4 - x^2 + 1$
E) $x^4 - 2x^2 + 1$

Ejercicio 25 : Hallar el valor de "a" para que el residuo de la división:

$(2x^4 + 5x^3 - x^2 + ax + a) : (x^2 - x + 1)$

sea un número (independiente de x)

A) -1 **B)** -2 **C)** 3 **D)** 1 **E)** 2

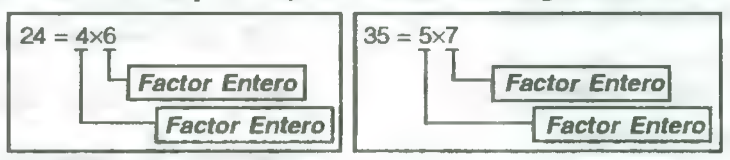
Clave de Respuestas

1. D	2. B	3. B	4. E	5. C	6. E	7. D
8. B	9. E	10. B	11. C	12. A	13. E	14. D
15. E	16. D	17. A	18. E	19. A	20. B	21. A
22. B	23. B	24. C	25. C			

3.6. Factorización de Expresiones algebraicas. Criterios.

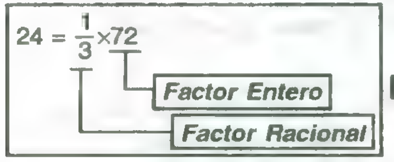
3.6.1. Factores Enteros:

Los números enteros 24 y 35; se pueden escribir de la siguiente manera:



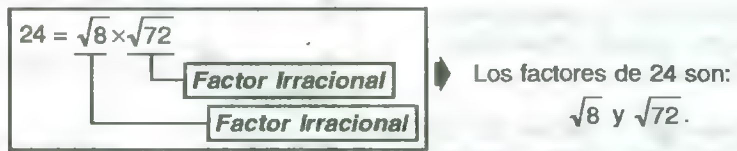
Ahora, decimos que tanto 24 como 35 se han factorizado, siendo los factores de 24, los enteros 4 y 6; los factores de 35 son los enteros 5 y 7.

* Pero el 24, también se puede escribir así:



En este caso los factores de 24 son: 1/3 y 72.

y si escribimos:



Los factores de 24 son: $\sqrt{8}$ y $\sqrt{72}$.

* En este texto los enteros serán factorizados sobre el conjunto de los enteros, a menos que se indique cualquier otro conjunto factor.

• Halla el producto y descomponer en factores son dos procesos inversos.



3.6.2. Factorización:

El fin primordial de la factorización es transformar un polinomio en un producto de dos o más factores.

Aunque no haya reglas fijas y bien determinadas para la factorización de un polinomio, con todo consideremos algunos ejemplos típicos, según los cuales haremos algunas afirmaciones.

- **Factor Común.-** Llámese factor común a la expresión que está contenida en cada uno de los términos del polinomio dado. Generalmente el factor común es el Máximo Común Divisor, pero no siempre, sino según lo exija la aplicación o circunstancia.

Ejemplo: Factorizar el polinomio: $5x^2 + 5x$.

Utilizando la propiedad distributiva, este polinomio $5x^2 + 5x$, se puede escribir así:

$5x^2 + 5x = \underline{5x}.x + \underline{5x}.1$, el factor común es "5x".

$5x^2 + 5x = \underline{5x}(x + 1)$, siendo: **5x** y **(x + 1)** los factores del polinomio dado.

- **Polinomios Factorizables o Reductibles.-** Un polinomio que puede expresarse como un producto de dos o más polinomios no constantes, se llama factorizable o reductible.

Asi:

1). El polinomio: $\mathbf{x^2 - 9}$ es un polinomio factorizable o reductible sobre el conjunto de los enteros, pues se le puede expresar:

$$\boxed{x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x + 3)(x - 3)}$$

2) El polinomio: $\mathbf{z^2 - 3}$ es un polinomio factorizable o reducible sobre el conjunto de los reales, ya que:

$$\boxed{z^2 - 3 = z^2 - \sqrt{3}^2 = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})}$$

En cambio un polinomio que no puede ser expresado como un producto de dos o más polinomios no constantes, se llama irreductible o no factorizable.

Por ejemplo, los polinomios: $3x + 1$; $x^2 + 5$; $x^2 + 3x + 7$, son irreductibles o no factorizables sobre el conjunto de los enteros.

- **Polinomio Primo.-** Es aquel polinomio irreductible o no factorizable cuyo coeficiente principal es 1.

Por ejemplo: $x + 2$; es un polinomio primo

coeficiente principal es 1

En cambio: 3x + 1 es un polinomio irreductible o no factorizable sobre el conjunto de los enteros, pero no es primo.

Si un Polinomio se expresa como el producto de sus factores primos, entonces se dice que el polinomio está completamente factorizado.

Ejemplo 1: factorizar: $x^2 - 25$

Resolución:

$$x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x+5)(x-5)$$

Cada uno de los factores: **(x + 5)** y **(x - 5)** es primo.

Ejemplo 2: factorizar: $4x^2 - 9$

Resolución:

$$4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x+3)(2x-3)$$

Los factores: **(2x + 3)** y **(2x - 3)** son irreducibles pero no primos.

Ahora, para convertir dichos factores **(2x + 3)** y **(2x - 3)** en primos se procede a escribir el 3 como: $\frac{2.3}{2}$

Luego: $4x^2 - 9 = (2x+3)(2x-3)$

$$= \left(2x + \frac{2.3}{2}\right)\left(2x - \frac{2.3}{2}\right)$$

$$= 2\left(x + \frac{3}{2}\right).2\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$\therefore\ 4x^2 - 9 = 4\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

(El polinomio $4x^2 - 9$, ha quedado factorizado en sus factores primos).

- 4: ***Factor real***
- $\left(x + \frac{3}{2}\right)$: ***Factor primo***
- $\left(x - \frac{3}{2}\right)$: ***Factor primo***

A continuación estudiaremos los siguientes casos de factorización:

3.6.2.1. Factorización de un Polinomio con Factor Común Monomio:

Cuando los términos de un Polinomio tienen uno o varios factores numéricos o literales que aparecen en todos ellos, se dice que tales factores forman un factor común. Así, por ejemplo, el polinomio $3x^2 + 12x$ tiene los factores 3 y **x** comunes a los dos términos, formándose así el monomio "3x" como factor común.

Los polinomios que tiene un factor común pueden factorizarse como una aplicación de la propiedad distributiva, así:

$3x^2 + 12x = \overline{3x}.x + \overline{3x}.4 = \overline{3x}(x + 4)$
└ **factor común monomio**

- **El Factor Común Monomio.-** Sobre los enteros, se determina fácilmente hallando el **M.C.D.** de los coeficientes de todos los términos del polinomio dado el cual será el coeficiente del factor común, y escribiendo a continuación de él las variables comunes con el menor exponente con que aparecen en el polinomio.

  Luego, se divide cada uno de los términos del polinomio entre el monomio común. Los resultados se escriben dentro de un signo de agrupación. O sea paréntesis, corchetes o llaves.

Ejemplo 1: Factorizar: $6x^3 - 15x^2$

Resolución:

1º). Hallamos el **M.C.D.** de los coeficientes **6** y 15. Así:

6 - 15	3
2 - 5	

➧ **M.C.D.(6 y 15) = ③**

2º) El menor exponente con que aparece la variable "x" es 2, o sea x^2 por lo tanto, el factor común es: $3x^2$

Luego: $6x^3 - 15x^2 = ③x^2(\;\;-\;\;)$

factor común ─ ③x^2

* **Dividimos $6x^3$: ③x^2 = 2x**

* **Dividimos $15x^2$: ③x^2 = 5**

$\therefore$ $6x^3 - 15x^2 = 3x^2(2x - 5)$

Ejemplo 2: Factorizar: $2x^2y + 6xy^2 - 8x^2y^2$

Resolución:

1º) Hallamos el **M.C.D.** de los coeficientes 2 ; **6** y 8. Así:

2 - 6 - 8	2
1 - 3 - 4	

➧ **M.C.D.(2 ; 6 y 8) = ②**

2º) El menor exponente con que aparece la variable "x" es 1 y el menor exponente con que aparece la variable "y" es 1.

Por lo tanto, el factor común es: ②xy.

Luego:

$$2x^2y + 6xy^2 - 8x^2y^2 = ⓶xy(x + 3y - 4xy) = \boxed{2xy(x + 3y - 4xy)}$$

factor común

* **Dividimos $2x^2y$: ⓶$xy = x$**
* **Dividimos $6xy^2$: ⓶$xy = 3y$**
* **Dividimos $8x^2y^2$: ⓶$xy = 4xy$**

Ejemplo 3: Factorizar: $12x^3y^2z^3 - 15x^2y\,z^3 - 6x^2y^3z^4 + 9x^3y^5z^3$

Resolución

1º) Hallamos el M.C.D. de los coeficientes 12 ; 15 ; 6 y 9, así:

12 - 15 - 6 - 9	3
4 - 5 - 2 - 3	

➧ **M.C.D.**(12 ; 15 ; 6 y 9) = ⓷

2º) El menor exponente con que aparece la variable "x" es 2, o sea x^2 el menor exponente con que aparece la variable "y" es 1; o sea y, y el menor exponente con que aparece la variable "z" es 3; o sea z^3.

Por lo tanto, el factor común es: ⓷x^2yz^3.

Luego:

$$12x^3y^2z^3 - 15x^2yz^3 - 6x^2y^3z^4 + 9x^3y^5z^3 = ⓷x^2yz^3(__ - __ - __ + __)$$

factor común

* **Dividimos $12x^3y^2z^3$: ⓷$x^2yz^3 = 4xy$**
* **Dividimos $15x^2yz^3$: ⓷$x^2yz^3 = 5$**
* **Dividimos $6x^2y^3z^4$: ⓷$x^2yz^3 = 2y^2z$**
* **Dividimos $9x^3y^5z^3$: ⓷$x^2yz^3 = 3xy^4$**

$$\therefore \boxed{12x^3y^2z^3 - 15x^2yz^3 - 6x^2y^3z^4 + 9x^3y^5z^3 = 3x^2yz^3(4xy - 5 - 2y^2z + 3xy^4)}$$

Ejemplo 4: Factorizar:

$$\frac{3}{4}y^3 - \frac{9}{8}xy^2$$

Resolución:

En este caso sólo contamos con la variable común "y", siendo su menor exponente 2, o sea y^2.

Luego, la expresión dada, se puede escribir así:

$$\frac{3}{4}y^3-\frac{9}{8}xy^2=\frac{3}{4}y^2y-\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}xy^2 \Rightarrow \therefore \boxed{\frac{3}{4}y^3-\frac{9}{8}xy^2=\frac{3}{4}y^2\left(y-\frac{3}{2}x\right)}$$

Ejemplo 5: Factorizar: $2{,}4ab^3 - 1{,}8a^2b + 0{,}9ab$

Resolución:

1º) Hallamos el **M.C.D.** de 2,4 ; 1,8 y 0,9 como si se trataran de números enteros así:

24 - 18 - 9	3
8 - 6 - 3	

➧ **M.C.D.**(24 ; 18 y 9) = ③

2º) El menor exponente con que aparece la variable "a" es 1, o sea a y el menor exponente con que aparece la variable "b" es 1, o sea **b**.

Por lo tanto, el factor común es: ③ab.

Luego: $2{,}4ab^3 - 1{,}8a^2b + 0{,}9ab =$ ③ab(___ - ___ + ___)

factor común

*** Dividimos $2{,}4ab^3$: ③ab = $0{,}8b^2$**

*** Dividimos $1{,}8a^2b$: ③ab = $0{,}6a$**

*** Dividimos $0{,}9ab$: ③ab = $0{,}3$**

$$\therefore \boxed{2{,}4ab^3 - 1{,}8a^2b + 0{,}9ab = 3ab(0{,}8b^2 - 0{,}6a + 0{,}3)}$$

Ejemplo 6: Factorizar: $7x^{2a} - 14x^{a+3} + 7x^a$

Resolución:

La expresión dada, se puede escribir así:

$$7x^{2a} - 14x^{a+3} + 7x^a = 7x^a.x^a - 7.2x^a.x^3 + 7x^a$$

$$7x^{2a} - 14x^{a+3} + 7x^a = \underline{7x^a}.x^a - \underline{7x^a}2.x^3 + \underline{7x^a}$$

$$7x^{2a} - 14x^{a+3} + 7x^a = \underline{7x^a}(x^a - 2x^3 + 1)$$

3.6.2.2. Factorización de un Polinomio con Factor Común Polinomio.

En el caso de que el polinomio tenga un factor común polinomio de dos o más términos para factorizarlo se procede en la misma forma como en el caso anterior, o sea aplicando la propiedad distributiva.

$$\boxed{ab + ac = a(b + c)}$$

Ejemplo 1: Factorizar: $5a(x - y) + 10b^2(x - y)$

Resolución:

1º) Hallamos el **M.C.D.** de los coeficientes 5 y 10. Así:

5 - 10	5
1 - 2	

M.C.D.(5 y 10) = ⑤

2º) El menor exponente del polinomio común $(x - y)$ es 1.

Luego: $5a(x - y) + 10b^2(x - y) = 5(x - y)(_ + _)$

factor común: $5(x-y)$

*** Dividimos $5a(x - y) : 5(x - y) = a$**

*** Dividimos $10b^2(x - y) : 5(x - y) = 2b^2$**

$\therefore$ $5a(x - y) + 10b^2(x - y) = 5(x - y)(a + 2b^2)$

Ejemplo 2: Factorizar: $6x^3(n - 1)^3 - 12x^2(n - 1)^4 + 9x^4(n - 1)^2$

Resolución:

1º) Hallamos el **M.C.D.** de los coeficientes 6 ; 12 y 9 así:

6 - 12 - 9	3
2 - 4 - 3	

M.C.D.(6 ; 12 y 9) = ③

2º) El menor exponente de la variable común "x" es 2, o sea x^2. El menor exponente del Polinomio común $(n - 1)$ es 2; o sea $(n - 1)^2$

Luego:

$6x^3(n - 1)^3 - 12x^2(n - 1)^4 + 9x^4(n - 1)^2 = 3x^2(n - 1)^2[_ - _ + _]$

factor común: $3x^2(n-1)^2$

*** Dividimos $6x^3(n - 1)^3 : 3x^2(n - 1)^2 = 2x(n - 1)$**

*** Dividimos $12x^2(n - 1)^4 : 3x^2(n - 1)^2 = 4(n - 1)^2$**

*** Dividimos $9x^4(n - 1)^2 : 3x^2(n - 1)^2 = 3x^2$**

$\therefore$ $6x^3(n - 1)^3 - 12x^2(n - 1)^4 + 9x^4(n - 1)^2 = 3x^2(n - 1)^2[2x(n - 1) - 4(n - 1)^2 + 3x^2]$

Ejemplo 3: Factorizar: $-m - n + x(m + n)$

Resolución:

La expresión dada, se puede escribir así:

$-m - n + x(m+n) = -(m+n) + x(m+n)$; **El factor común es: (m + n)**

$= -1(m+n) + x(m+n)$

$= (m+n)(-1+x)$

Recuerda que:

$-a - b = -(a+b)$

$\therefore$ $-m - n + x(m+n) = (m+n)(x-1)$

Ejemplo 4: Factorizar: $x(3a-2b) - 3a + 2b$

Resolución:

La expresión dada, se puede escribir así:

$x(3a-2b) - 3a + 2b = x(3a-2b) - (3a-2b)$, **el factor común es: (3a - 2b)**

$= x(3a-2b) - 1(3a-2b)$

$= (3a-2b)(x-1)$

Recuerda que:

$-3a + 2b = -(3a-2b)$

$\therefore$ $x(3a-2b) - 3a + 2b = (3a-2b)(x-1)$

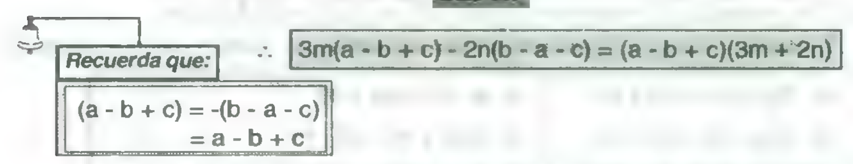
Ejemplo 5: Factorizar: $3m(a-b+c) - 2n(b-a-c)$

Resolución:

La expresión dada, se puede escribir así:

$3m(a-b+c) - 2n(b-a-c) = 3m(a-b+c) + 2n(a-b+c)$

$3m(a-b+c) - 2n(b-a-c) = (a-b+c)(3m+2n)$



$\therefore$ $3m(a-b+c) - 2n(b-a-c) = (a-b+c)(3m+2n)$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 39

1. Factorizar cada uno de los Polinomios siguientes por factor común monomio:

a) $6x + 6y + 6$	d) $8x^2 + 4x$	g) $5x^{3a} - 10x^{a+2} + 20x^{2a}$
b) $ax + bx + x$	e) $24x^3 - 16x^2 + 8x$	h) $12x - 18$
c) $3b - 3d$	f) $16z^3 + 20z^2 - 4z + 12$	i) $4t - 24$

j) $ay - by + cy$

k) $9y^2 - 81y$

l) $xy^3 - x^2y^2 + x^2y$

ll) $18x^3 + 6x^2y + 4xy^2 - 10y$

m) $x^{n+1} - x^{n+2} + x^n - x^{n-1}$

2. Utilizar la propiedad distributiva para factorizar cada uno de los polinomios siguientes sobre el conjunto de los racionales.

a) $\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}$

b) $x^3 - \frac{1}{4}x$

c) $\frac{3}{8}a^3 + \frac{5}{8}a^2 - \frac{1}{4}a$

d) $0{,}75z^2 - 0{,}50z + 0{,}25$

e) $\frac{1}{7}x - \frac{1}{7}$

f) $\frac{1}{2}x^2 - 4x$

g) $\frac{4}{5}x^2y - \frac{2}{5}x^3y + \frac{6}{5}x^4y^3$

h) $\frac{5}{2}a^2 - \frac{15}{6}ab$

i) $0{,}9a^2b - 0{,}6a^2b^2 + 1{,}2abx$

j) $0{,}5ac^2 + 2a^2cx + 1{,}5abc$

k) $\frac{5}{12}x^3y - \frac{3}{8}x^2y^3 + \frac{1}{4}xy^2$

l) $\frac{2}{6}a^2b^2 + \frac{4}{9}a^3bx + \frac{8}{15}aby$

3. Utiliza la propiedad distributiva para factorizar completamente los polinomios siguientes sobre el conjunto de los reales:

a) $8x^2 - 16x$

b) $x^3 + 3x^2 - 5x$

c) $m^5 + m^4 - m^3$

d) $6y^4 + y^3 - 12y^2$

e) $3x - 6x^2 + 9x^3$

f) $4x^4y - 2x^5 + 6x^3y^2 - 2x^2y^3$

4. Factoriza cada uno de los polinomios siguientes por factor común polinomio.

a) $2(a + b) + x(a + b)$

b) $x^2(a - 1) - y^2(a - 1)$

c) $3b(2x + 3) + 2x + 3$

d) $x^2 + y^2 - 5y(x^2 + y^2)$

e) $4a(x - b) - x + b$

f) $3a(2b - 1) + 5x(2b - 1)$

g) $xy(3 + 5a) - 2(3 + 5a)$

h) $1 - x - 2y(1 - x)$

i) $-a - b + 2(a + b)$

j) $y^2(a^2 + b^2) - a^2 - b^2$

k) $(3x + 1)(2a + 3) + (2a + 3)(4x + 2)$

l) $(a - 2b)(2a + b) - (a - 2b)(5b - 3)$

ll) $(2x + y)(5x - 2) + 10ab(5x - 2)$

m) $ax(1 - 2y) - (1 - 2y)(a + b)$

n) $2ab(a + b - c) - 3x(-a - b + c)$

o) $4x^2(2a - b - 3c) - 2xy(3c + b - 2a)$

3.6.2.3. Factorización de Polinomios por Agrupación de Términos.

Se agrupan los términos de 2 en 2 ó de 3 en 3, etc. de acuerdo con el número exacto de grupos que se puedan formar de modo que resulte un factor común polinomio. Luego se procede a factorizar, según la regla del caso anterior.

Ejemplo 1: Factorizar: $x^2 - 2x + cx - 2c$

Resolución:

Agrupamos el primero con el segundo y el tercero con el cuarto.

$$x^2 - 2x + cx - 2c = (x^2 - 2x) + (cx - 2c)$$

Sacamos factor común "c"

Sacamos factor común "x"

$= x(x - 2) + c(x - 2)$, **Sacamos factor común "(x - 2)"**

$= (x - 2)(x + c)$

$\therefore$ $x^2 - 2x + cx - 2c = (x - 2)(x + c)$

Ejemplo 2: Factorizar: $2yz + 7y - 2z - 7$

Resolución:

Agrupamos el primero con el tercero y el segundo con el cuarto, obtenemos.

$$2yz + 7y - 2z - 7 = (2yz - 2z) + (7y - 7)$$

Sacamos factor común "7"

Sacamos factor común "2z"

$= 2z(y - 1) + 7(y - 1)$; **Sacamos factor común "(y - 1)"**

$= (y - 1)(2z + 7)$

$\therefore$ $2yz + 7y - 2z - 7 = (y - 1)(2z + 7)$

Ejemplo 3: Factorizar: $mx - m - x + 1$

Resolución:

Agrupamos los términos de la siguiente manera:

$$mx - m - x + 1 = (mx - m) - (x - 1)$$

Sacamos factor común "m"

$= m(x - 1) - 1(x - 1)$, **Sacamos factor común "(x - 1)"**

$= (x - 1)(m - 1)$

$\therefore$ $mx - m - x + 1 = (x - 1)(m - 1)$

Ejemplo 4: Factorizar: $3ax - 3ay - 2bx + 2by$

Resolución:

Agrupamos los términos de la siguiente manera:

$3ax - 3ay - 2bx + 2by = (3ax - 3ay) - (2bx - 2by)$

Sacamos factor común "2b"

Sacamos factor común "3a"

$= 3a(x - y) - 2b(x - y)$; **Sacamos factor común "(x - y)"**

$= (x - y)(3a - 2b)$

$\therefore$ $3ax - 3ay - 2bx + 2by = (x - y)(3a - 2b)$

Ejemplo 5: Factorizar: $x^3 + x^2 + x + 1$

Resolución:

Agrupamos los términos de la siguiente manera:

$x^3 + x^2 + x + 1 = (x^3 + x^2) + (x + 1)$

Sacamos factor común "x^2"

$= x^2(x + 1) + 1(x + 1)$, **Sacamos factor común "(x + 1)"**

$= (x + 1)(x^2 + 1)$

$\therefore$ $x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1)$

Ejemplo 6: Factorizar: $2a^2x + 2ax + 2x - a^2 - a - 1$

Resolución:

Agrupamos los términos de la siguiente manera:

$2a^2x + 2ax + 2x - a^2 - a - 1 = (2a^2x + 2ax + 2x) - (a^2 + a + 1)$

Sacamos factor común "2x"

$= 2x(a^2 + a + 1) - (a^2 + a + 1)$; **Sacamos factor común "$(a^2 + a + 1)$"**

$= (a^2 + a + 1)(2x - 1)$

$\therefore$ $2a^2x + 2ax + 2x - a^2 - a - 1 = (a^2 + a + 1)(2x - 1)$

Ejemplo 7: Factorizar: $28 - 16y + 14y^2 - 8y^3$

Resolución:

Agrupamos los términos de la siguiente manera:

$$28 - 16y + 14y^2 - 8y^3 = (28 + 14y^2) - (16y + 8y^3)$$

Sacamos factor común "8y"
Sacamos factor común "14"

$$= 14(2 + y^2) - 8y(2 + y^2);$$ Sacamos factor común "$(2 + y^2)$"

$$= (2 + y^2)(14 - 8y);$$ Sacamos factor común "2"

$$= (2 + y^2)[2(7 - 4y)]$$

$$\therefore \boxed{28 - 16y + 14y^2 - 8y^3 = 2(2 + y^2)(7 - 4y)}$$

Ejemplo 8: Factorizar: $x^2 + \frac{1}{3}x + 3x + 1$

Resolución:

La expresión dada se puede escribir así:

$$x^2 + \frac{1}{3}x + 3x + 1 = \left(x^2 + \frac{1}{3}x\right) + \left(3x + \frac{3}{3}\right)$$

Sacamos factor común "3"
Sacamos factor común "x"

$$= x\left(x + \frac{1}{3}\right) + 3\left(x + \frac{1}{3}\right);$$ Sacamos factor común "$\left(x + \frac{1}{3}\right)$"

$$= \left(x + \frac{1}{3}\right)(x + 3)$$

$$\therefore \boxed{x^2 + \frac{1}{3}x + 3x + 1 = \left(x + \frac{1}{3}\right)(x + 3)}$$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 40

1. Factorizar por agrupación los siguientes polinomios:

a) $xz + yz + x + y$	h) $xy + 2ay - 2bx - 4ab$
b) $ab + ac + b^2 + bc$	i) $6ab - 3bx - 2ay + xy$
c) $ab + bx - ay - xy$	j) $12 - 8x^2 - 3y^2 + 2x^2y^2$
d) $a^2b^3 - a^2 + 2b^3 - 2$	k) $6ax + b + 3bx + 2a$

e) $6b^2x^2 - 3x^2 + 4b^2 - 2$	l) $2p^2 + 3ap + 4p + 6a$
f) $z^2x^2 - 2x^2 - 3z^2 + 6$	m) $x^{n+2} + x^3 + x^n + x + x^2 + 1$
g) $a^2x^2 + b^2x^2 + a^2y^2 + b^2y^2$	n) $x^3 - x^2 + x - 1$

2. Factorizar los polinomios siguientes:

a) $\frac{1}{3}ax - a + \frac{1}{3}x - 1$	g) $\sqrt{3}xy - x + \sqrt{3}y - 1$
b) $\sqrt{2}mz - \sqrt{2}m - z + 1$	h) $4x^3 + 12 + 6x^2 + 8x$
c) $2x^3 + 6 - 3x^2 - 4x$	i) $x^2 - \frac{1}{6}x + 6x - 1$
d) $18m^3 + 12m^2 - 15m - 10$	j) $9y^3 + 6y^2 - 3y - 2$
e) $14y^2 - 8y^3 - 16y + 28$	k) $\frac{2}{5}xy + x + \frac{2}{5}y + 1$
f) $t^2 + \frac{1}{5}t + 5t + 1$	l) $7x^2 - 4x^3 - 8x + 14$

RESPUESTAS TALLER

1.

a) $(x + y)(z + 1)$	h) $(x + 2a)(y - 2b)$
b) $(b + c)(a + b)$	i) $(2a - x)(3b - y)$
c) $(a + x)(b - y)$	j) $(3 - 2x^2)(4 - y^2)$
d) $(b - 1)(b^2 + b + 1)(a^2 + 2)$	k) $(2a + b)(3x + 1)$
e) $(2b^2 - 1)(3x^2 + 2)$	l) $(2p + 3a)(p + 2)$
f) $(z^2 - 2)(x^2 - 3)$	m) $(x^2 + 1)(x^n + x + 1)$
g) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$	n) $(x - 1)(x^2 + 1)$

2.

a) $\frac{1}{3}(a + 1)(x - 3)$	g) $(x + 1)(\sqrt{3}y - 1)$
b) $(z - 1)(\sqrt{2}m - 1)$	h) $2(x^2 + 2)(2x + 3)$
c) $(x^2 - 2)(2x - 3)$	i) $(x + 6)(x - \frac{1}{6})$
d) $(3m + 2)(6m^2 - 5)$	j) $(3y + 2)(3y^2 - 1)$
e) $2(y^2 + 2)(7 - 4y)$	k) $(x + 1)(\frac{2}{5}y + 1)$
f) $(t + 5)(t + \frac{1}{5})$	l) $(x^2 + 2)(7 - 4x)$

3.6.2.4. Factorización de una Diferencia de Cuadrados.

Hemos visto en los productos notables ya estudiados que una diferencia de cuadrados se obtiene multiplicando la suma de dos términos por la diferencia de los mismos: osea:

$$(a + b)(a - b) = \underbrace{a^2 - b^2}_{\text{Diferencia de cuadrados}}$$

En consecuencia una **Diferencia de Cuadrados**, siempre será igual al producto de la suma de dos términos, por la diferencia de los mismos.

En General: $a^{2m} - b^{2n} = (a^m + b^n)(a^m - b^n)$

Luego:

Dada una diferencia de cuadrados para hallar sus factores:

1º) Se extrae la raíz cuadrada de cada término.

2º) Se forman 2 factores, uno con la suma de las raices halladas y el otro con la diferencia de dichas raíces.

Ejemplo 1: Factorizar: $x^2 - 25$

Resolución:

$$x^2 - 25 = (\quad + \quad)(\quad - \quad)$$

• Extraemos las raíces cuadradas de cada término: $\sqrt{x^2} = x$ y $\sqrt{25} = 5$

Luego: $x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$

Ejemplo 2: Factorizar: $36x^2 - y^4$

Resolución:

$$36x^2 - y^4 = (\quad + \quad)(\quad - \quad)$$

• Extraemos las raíces cuadradas de cada término: $\sqrt{36x^2} = 6x$ y $\sqrt{y^4} = y^2$

Luego: $36x^2 - y^4 = (6x + y^2)(6x - y^2)$

Ejemplo 3: Factorizar: $a^2 - \frac{9}{4}$

Resolución:

$$a^2 - \frac{9}{4} = (\quad + \quad)(\quad - \quad)$$

• Extraemos las raíces cuadradas de cada término: $\sqrt{a^2} = a$ y $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

Luego: $a^2 - \frac{9}{4} = (a + \frac{3}{2})(a - \frac{3}{2})$

Ejemplo 4: Factorizar: $5t^2 - 320$

Resolución:

La expresión dada, se puede escribir así:

$$5t^2 - 320 = \underline{5}t^2 - \underline{5}.64$$

└ *Sacamos factor común "5"*

$$5t^2 - 320 = 5(t^2 - 64) = 5(\ \ +\ \ )(\ \ -\ \ )$$

- **Extraemos raíz cuadrada($\sqrt{\ }$): $\sqrt{64} = 8$**
- **Extraemos raíz cuadrada($\sqrt{\ }$): $\sqrt{t^2} = t$**

$$\therefore \boxed{5t^2 - 320 = 5(t + 8)(t - 8)}$$

Ejemplo 5: Factorizar: $0{,}81 - p^6$

Resolución:

La expresión dada, se puede escribir así:

$$0{,}81 - p^6 = \frac{81}{100} - p^6 = (\quad +\quad)(\quad -\quad)$$

- **Extraemos raíz cuadrada($\sqrt{\ }$): $\sqrt{p^6} = p^3$**
- **Extraemos raíz cuadrada($\sqrt{\ }$): $\sqrt{\frac{81}{100}} = \frac{9}{10}$**

$$\therefore \boxed{0{,}81 - p^6 = (\frac{9}{10} + p^3)(\frac{9}{10} - p^3)}$$

Ejemplo 6: Factorizar: $\frac{1}{5}x^4 - \frac{49}{5}z^8$

Resolución:

La expresión dada se puede escribir así:

$$\frac{1}{5}x^4 - \frac{49}{5}z^8 = \frac{1}{5}(x^4 - 49z^8) = \frac{1}{5}(\quad +\quad)(\quad -\quad)$$

- **Extraemos raíz cuadrada($\sqrt{\ }$): $\sqrt{49z^8} = 7z^4$**
- **Extraemos raíz cuadrada($\sqrt{\ }$): $\sqrt{x^4} = x^2$**

$$\therefore \boxed{\frac{1}{5}x^4 - \frac{49}{5}z^8 = \frac{1}{5}(x^2 + 7z^4)(x^2 - 7z^4)}$$

Ejemplo 7: Factorizar: $75a^{2n} - 3$

Resolución:

La expresión dada, se puede escribir así:

$$75a^{2n} - 3 = 3.25a^{2n} - 3$$

Sacamos factor común "3"

$$75a^{2n} - 3 = 3(25a^{2n} - 1) = 3(\quad + \quad)(\quad - \quad)$$

Extraemos raíz cuadrada($\sqrt{\ }$): $\sqrt{1} = 1$

Extraemos raíz cuadrada($\sqrt{\ }$): $\sqrt{25a^{2n}} = 5a^n$

$$\therefore \boxed{75a^{2n} - 3 = 3(5a^n + 1)(5a^n - 1)}$$

Ejemplo 8: Factorizar: $6x^2 - 12$

Resolución:

La expresión dada se puede escribir así:

$$6x^2 - 12 = 6x^2 - 6.2$$

Sacamos factor común "6"

$$6x^2 - 12 = 6(x^2 - 2) = 6(\quad + \quad)(\quad - \quad)$$

Extraemos raíz cuadrada($\sqrt{\ }$): $\sqrt{2} = \sqrt{2}$

Extraemos raíz cuadrada($\sqrt{\ }$): $\sqrt{x^2} = x$

$$\therefore \boxed{6x^2 - 12 = 6(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})}$$

Ejemplo 9: Factorizar: $(a - b)^2 - (c - d)^2$

Resolución:

$$(a - b)^2 - (c - d)^2 = [\qquad + \qquad][\qquad + \qquad]$$

Extraemos las raíces cuadradas de cada término:

$$\boxed{\sqrt{(a-b)^2} = (a-b)} \quad y \quad \boxed{\sqrt{(c-d)^2} = (c-d)}$$

Luego: $(a - b)^2 - (c - d)^2 = [(a - b) + (c - d)][(a - b) - (c - d)]$

$$= [a - b + c - d)][a - b - c + d]$$

$$\therefore \boxed{(a - b)^2 - (c - d)^2 = [a - b + c - d][a - b - c + d]}$$

Ejemplo 10: Factorizar: $x^4 + 2x^3 - 2x - 1$

Resolución:

Agrupando los términos convenientemente, obtenemos

$$x^4 + 2x^3 - 2x - 1 = (x^4 - 1) + (2x^3 - 2x)$$

Sacamos factor común "2x"

$$= (x^4 - 1^4) + 2x(x^2 - 1)$$

Extraemos raíz cuadrada($\sqrt{\ }$): $\sqrt{1^4} = 1^2$

Extraemos raíz cuadrada($\sqrt{\ }$): $\sqrt{x^4} = x^2$

$$x^4 + 2x^3 - 2x - 1 = (x^2 + 1^2)(x^2 - 1^2) + 2x(x^2 - 1)$$

$$= (x^2 + 1^2)(x^2 - 1^2) + 2x(x^2 - 1^2)$$

Sacamos factor común "$(x^2 - 1^2)$"

$$x^4 + 2x^3 - 2x - 1 = (x^2 - 1^2)[(x^2 + 1) + 2x]$$

Extraemos raíz cuadrada($\sqrt{\ }$): $\sqrt{1^2} = 1$

Extraemos raíz cuadrada($\sqrt{\ }$): $\sqrt{x^2} = x$

$$x^4 + 2x^3 - 2x - 1 = (x + 1)(x - 1)[(x^2 + 1) + 2x]$$

$$\therefore \boxed{x^4 + 2x^3 - 2x - 1 = (x + 1)(x - 1)(x^2 + 1 + 2x)}$$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 41



1. Factoriza los polinomios siguientes en el conjunto de los racionales.

a) $x^2 - 100$	g) $7a^6 - 28b^4$	ll) $\frac{1}{9}x^4 - \frac{1}{25}y^6$
b) $25x^2 - 64$	h) $3z^2 - 300$	m) $49x^{2a} - 9a^2b^{2n}$
c) $49 - n^2$	i) $\frac{49}{64}x^2 - 25$	n) $0{,}25t^2 - 1$
d) $1 - x^2y^4$	j) $6mz^8 - 6mz^4$	ñ) $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{81}$
e) $36m^2 - 25n^2$	k) $\frac{1}{5}x^4 - \frac{121}{5}y^4$	o) $50bx^4 - 200by^2$
f). $5a^2 - 5b^2$	l) $0{,}64 - p^4$	p) $9a^{2x} - 25y^{2x}$

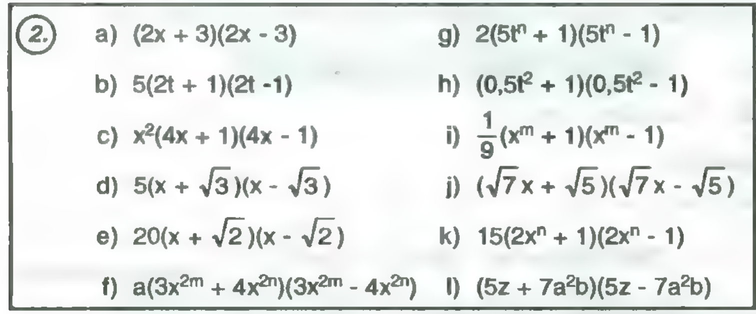
2. Factorizar los siguientes polinomios

a) $4x^2 - 9$	e) $20x^2 - 40$	i) $\frac{1}{9}x^{2m} - \frac{1}{9}$
b) $20t^2 - 5$	f) $9ax^{4m} - 16ax^{4n}$	j) $7x^2 - 5$
c) $16x^4 - x^2$	g) $50t^{2n} - 2$	k) $60x^{2n} - 15$
d) $5x^2 - 15$	h) $0,25t^4 - 1$	l) $25z^2 - 49a^4b^2$

3. Factoriza los siguientes polinomios

a) $(x + 2y)^2 - 9$	e) $(a + b)^2 - c^2$	i) $9x^3 - x^2 - 9x + 1$
b) $(x - 3y)^2 - 81$	f) $25(a + b)^2 - m$	j) $100x^2 - z^2 + 12z - 36$
c) $144 - (x + y)^2$	g) $49(a + b)^2 - (a - b)^2$	k) $a^2 + 2ab + b^2 - x^2 - 2xy - y^2$
d) $(x - y)^2 - (y - z)^2$	h) $100(x + y)^2 - 36(x - y)^2$	l) $(a + 2b - c)^2 - (a + 2b + c)^2$

RESPUESTAS TALLER



2.

a) $(2x + 3)(2x - 3)$	g) $2(5t^n + 1)(5t^n - 1)$
b) $5(2t + 1)(2t - 1)$	h) $(0,5t^2 + 1)(0,5t^2 - 1)$
c) $x^2(4x + 1)(4x - 1)$	i) $\frac{1}{9}(x^m + 1)(x^m - 1)$
d) $5(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$	j) $(\sqrt{7}x + \sqrt{5})(\sqrt{7}x - \sqrt{5})$
e) $20(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$	k) $15(2x^n + 1)(2x^n - 1)$
f) $a(3x^{2m} + 4x^{2n})(3x^{2m} - 4x^{2n})$	l) $(5z + 7a^2b)(5z - 7a^2b)$

3.

a) $(x + 2y + 3)(x + 2y - 3)$	g) $4(4a + 3b)(3a + 4b)$
b) $(x - 3y + 9)(x - 3y - 9)$	h) $16(4x + y)(x + 4y)$
c) $(12 + x + y)(12 - x - y)$	i) $(9x - 1)(x + 1)(x - 1)$
d) $(x - z)(x - 2y + z)$	j) $(10x + z - 6)(10x - z + 6)$
e) $(a + b + c)(a + b - c)$	k) $(a + b + x + y)(a + b - x - y)$
f) $(5a + 5b + m)(5a + 5b - m)$	l) $-4(a + 2b)c$

3.6.2.5. Factorización de una Suma de Cubos

La suma de dos cubos es un producto igual a la suma de sus bases multiplicada por el trinomio que se forma del cuadrado de la primera base menos el producto de sus bases y más el cuadrado de la segunda base.

Osea: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Ejemplo 1: Factorizar: $8a^3 + 27b^3$

Resolución:

$$8a^3 + 27b^3 = (\quad + \quad)(\quad - \quad + \quad)$$

Para factorizar dicho binomio se extrae la raíz cúbica de ambos términos; la suma de estas raíces es el primer factor binomio (la **suma de sus bases**).

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt[3]{8a^3} = \sqrt[3]{8}.\sqrt[3]{a^3} = 2a \\ \sqrt[3]{27b^3} = \sqrt[3]{27}.\sqrt[3]{b^3} = 3b \end{array}\right\} \textbf{Suma de sus bases: } (2a + 3b)$$

Esta suma $(2a + 3b)$, se multiplica por un trinomio cuyos términos son el cuadrado de la primera base $\mathbf{(2a)^2 = 4a^2}$; menos el producto de las dos bases $\mathbf{-2a.3b = -6ab}$; y más el cuadrado de la segunda base $\mathbf{(3b)^2} = 9b^2$.

Luego: $8a^3 + 27b^3 = (2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$

Ejemplo 2: Factorizar: $64x^3 + 1$

Resolución:

$$64x^3 + 1^3 = (\quad + \quad)[\quad - \quad + \quad]$$

Extraemos raíz cúbica($\sqrt[3]{\ }$): $\sqrt[3]{1^3} = 1$

Extraemos raíz cúbica($\sqrt[3]{\ }$): $\sqrt[3]{64x^3} = 4x$

Suma de bases: $(1 + 4x)$

Luego: $64x^3 + 1^3 = (4x + 1)[(4x)^2 - 4x.1 + (1)^2]$

$$\therefore \quad 64x^3 + 1^3 = (4x + 1)(16x^2 - 4x + 1)$$

Ejemplo 3: Factorizar: $b^6 + 125z^3$

Resolución:

$$b^6 + 125z^3 = (\quad + \quad)[\quad - \quad + \quad]$$

Extraemos raíz cúbica($\sqrt[3]{\ }$): $\sqrt[3]{125z^3} = 5z$

Extraemos raíz cúbica($\sqrt[3]{\ }$): $\sqrt[3]{b^6} = b^2$

Suma de bases: $(5z + b^2)$

Luego: $b^6 + 125z^3 = (b^2 + 5z)[(b^2)^2 - b^2.5z + (5z)^2]$

$\therefore$ $\boxed{b^6 + 125z^3 = (b^2 + 5z)(b^4 - 5b^2z + 25z^2)}$

Ejemplo 4: Factorizar: $\dfrac{x^3}{y^3} + 8a^3$

Resolución:

$$\frac{x^3}{y^3} + 8a^3 = (\qquad)[\qquad - \qquad + \qquad]$$

Extraemos raíz cúbica($\sqrt[3]{\ }$): $\sqrt[3]{8a^3} = 2a$

Extraemos raíz cúbica($\sqrt[3]{\ }$): $\sqrt[3]{\dfrac{x^3}{y^3}} = \dfrac{x}{y}$

Suma de bases: $(2a + \dfrac{x}{y})$

Luego: $$\frac{x^3}{y^3} + 8a^3 = \left(\frac{x}{y} + 2a\right)\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y}\cdot 2a + (2a)^2\right]$$

$$\therefore \boxed{\frac{x^3}{y^3} + 8a^3 = \left(\frac{x}{y} + 2a\right)\left[\frac{x^2}{y^2} - \frac{2ax}{y} + 4a^2\right]}$$

Ejemplo 5: Factorizar: $0{,}008a^3 + 0{,}064x^3$

Resolución:

La expresión dada se puede escribir de la siguiente manera:

$$0{,}008a^3 + 0{,}064x^3 = \frac{8}{1\,000}a^3 + \frac{64}{1\,000}x^3 = (\qquad)[\qquad - \qquad + \qquad]$$

Extraemos raíz cúbica($\sqrt[3]{\ }$): $\sqrt[3]{\dfrac{64x^3}{1\,000}} = \dfrac{4}{10}x$

Extraemos raíz cúbica($\sqrt[3]{\ }$): $\sqrt[3]{\dfrac{8a^3}{1\,000}} = \dfrac{2}{10}a$

Suma de bases: $(\dfrac{2}{10}a + \dfrac{4}{10}x)$

Luego:

$$0{,}008a^3 + 0{,}064x^3 = \left(\frac{2}{10}a + \frac{4}{10}x\right)\left[\left(\frac{2}{10}a\right)^2 - \frac{2}{10}a\cdot\frac{4}{10}x + \left(\frac{4}{10}x\right)^2\right]$$

$\therefore$ $\boxed{0{,}008a^3 + 0{,}064x^3 = (0{,}2a + 0{,}4x)(0{,}04a^2 - 0{,}08ax + 0{,}16x^2)}$

Ejemplo 6: Factorizar: $(a+b)^3 + 125x^3$

Resolución:

$$(a+b)^3 + 125x^3 = [(a+b) + 5x][(a+b)^2 - (a+b)(5x) + (5x)^2]$$

Extraemos raíz cúbica($\sqrt[3]{\ }$): $\sqrt[3]{125x^3} = 5x$

Extraemos raíz cúbica($\sqrt[3]{\ }$): $\sqrt[3]{(a+b)^3} = (a+b)$

Suma de bases: $[(a+b) + 5x]$

Luego:

$$(a+b)^3 + 125x^3 = [(a+b) + 5x][(a+b)^2 - (a+b).5x + (5x)^2]$$

$$\therefore \boxed{(a+b)^3 + 125x^3 = [a+b+5x][(a+b)^2 - 5(a+b)x + 25x^2]}$$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 42

1 Factoriza los siguientes binomios.

a) $x^3 + 1$	e) $x^{3p} + 1$	i) $27x^6 + 8$
b) $27a^3 + 8b^3$	f) $8x^3 + y^{15}$	j) $x^3 + 64$
c) $64y^3 + 125z^3$	g) $a^3 + a^{-3}$	k) $m^3 + 216t^3$
d) $x^3 + 27$	h) $x^6 + 1$	l) $p^3 + 64q^3$

2 Factoriza los siguientes binomios:

a) $a^3b^3 + x^6$	d) $\frac{1}{8}a^3 + \frac{1}{27}b^3$	g) $0,001y^3 + 1$
b) $27a^9 + y^{12}$	e) $\frac{64x^3}{125y^3} + \frac{a^3}{8}$	h) $0,027b^3 + 0,125a^3$
c) $1000x^3 + y^6$	f) $729x^6 + \frac{1}{216}y^6$	i) $216t^3 + 0,008q^6$

3 Factoriza los siguientes polinomios:

a) $3a^4 + 3a$	f) $27(x-2)^3 + 64b^6$
b) $5x^5 + 5x^2y^3$	g) $(a-b)^3 + (2+x)^3$
c) $2bx^6 + 16by^9$	h) $(x^2+b)^3 + (b+3)^3$
d) $(a+b)^3 + 64x^3$	i) $125(2a-y)^3 + (y+3x)^3$
e) $27y^3 + (3a+1)^3$	j) $64(a-b)^3 + 27(x+1)^3$

RESPUESTAS TALLER

(2.) a) $(ab + x^2)(a^2b^2 - abx^2 + x^4)$

b) $(3a^3 + y^4)(9a^6 - 3a^3y^4 + y^8)$

c) $(10x + y^2)(100x^2 - 10xy^2 + y^2)$

d) $\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b\right)\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{6}ab + \frac{1}{9}b^2\right)$

e) $\left(\frac{4x}{5y} + \frac{a}{2}\right)\left(\frac{16x^2}{25y^2} - \frac{2ax}{5y} + \frac{a^2}{4}\right)$

f) $\left(9x^2 + \frac{y^6}{6}\right)\left(81x^4 - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{y^4}{36}\right)$

g) $(0{,}1y + 1)(0{,}01y^2 - 0{,}1y + 1)$

h) $(0{,}3b + 0{,}5a)(0{,}09b^2 - 0{,}15ab + 0{,}25a^2)$

i) $(6t + 0{,}2q^2)\ (36t^2 - 1{,}2tq^2 + 0{,}04q^4)$

(3.) a) $3a(a + 1)(a^2 - a + 1)$

b) $5x^2(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

c) $2b(x^2 + 2y^3)(x^4 - 2x^2y^3 + 4y^6)$

d) $(a + b + 4x)[(a + b)^2 - 4x(a + b) + 16x^2]$

e) $(3y + 3a + 1)[9y^2 - 3y(3a + 1) + (3a + 1)^2]$

f) $(3x - 6 + 4b^2)[9(x - 2)^2 - 12(x - 2)b^2 + 16b^4]$

g) $(a - b + 2 + x)[(a - b)^2 - (a - b)(2 + x) + (2 + x)^2]$

h) $(x^2 + 2b + 3)[(x^2 + b)^2 - (x^2 + b)(b + 3) + (b + 3)^2]$

i) $(10a - 4y + 3x)[25(2a - y)^2 - 5(2a - y)(y + 3x) + (y + 3x)^2]$

j) $[4(a + b) + 3(x + 1)][16\ (a + b)^2 - 12(a + b)(x + 1) + 9\ (x + 1)^2]$

3.6.2.6. Factorización de una Diferencia de Cubos.

La Diferencia de dos cubos es un producto igual a la diferencia de las bases, multiplicada por el Trinomio que consta del cuadrado de la primera base más el producto de las dos bases y más el cuadrado de la segunda base.

Osea: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Ejemplo 1: Factorizar: $64x^3 - 8y^3$

Resolución:

$$64x^3 - 8y^3 = (\quad - \quad)(\quad + \quad + \quad)$$

Para factorizar dicho binomio se extrae la raíz cúbica de ambos términos; la diferencia de estas raíces es el primer factor binomio (diferencia de sus bases).

$$\left.\begin{array}{r}\sqrt[3]{64x^3}=\sqrt[3]{64}.\sqrt[3]{x^3}=4x\\ \sqrt[3]{8y^3}=\sqrt[3]{8}.\sqrt[3]{y^3}=2y\end{array}\right\}$$ **Diferencia de sus bases: (4x - 2y)**

Esta diferencia **(4x - 2y)** se multiplica por un trinomio cuyos términos son: El cuadrado de la primera base $(4x)^2 = 16x^2$; más el producto de las dos bases $4x.2y = 8xy$; y más el cuadrado de la segunda base $(2y)^2 = 4y^2$.

Luego: $\boxed{64x^3 - 8y^3 = (4x - 2y)(16x^2 + 8xy + 4y^2)}$

Ejemplo 2: Factorizar: $8x^3 - y^{12}$

Resolución:

$8x^3 - y^{12} = (\quad)[\quad + \quad + \quad]$

Extraemos raíz cúbica($\sqrt[3]{\ }$): $\sqrt[3]{y^{12}} = y^4$

Extraemos raíz cúbica($\sqrt[3]{\ }$): $\sqrt[3]{8x^3} = 2x$

Diferencia de bases: $(2x - y^4)$

Luego: $8x^3 - y^{12} = (2x - y^4)[(2x)^2 + 2x.y^4 + (y^4)^2]$

$\therefore \boxed{8x^3 - y^{12} = (2x - y^4)(4x^2 + 2xy^4 + y^8)}$

Ejemplo 3: Factorizar: $a^3 - a^{-3}$

Resolución:

$a^3 - a^{-3} = = (\quad - \quad)[\quad + \quad + \quad]$

Extraemos raíz cúbica($\sqrt[3]{\ }$): $\sqrt[3]{a^{-3}} = a^{-1}$

Extraemos raíz cúbica($\sqrt[3]{\ }$): $\sqrt[3]{a^3} = a$

Diferencia de bases: $(a - a^{-1})$

Luego: $a^3 - a^{-3} = (a - a^{-1})[a^2 + a.a^{-1} + (a^{-1})^2]$

$= (a - a^{-1})(a^2 + a\cdot\dfrac{1}{a} + a^{-2})$

$\therefore \boxed{a^3 - a^{-3} = (a - a^{-1})(a^2 + 1 + a^{-2})}$

Ejemplo 4: Factorizar: $m^6 - 216n^6$

Resolución:

$m^6 - 216n^6 = (\quad)[\quad + \quad + \quad]$

Extraemos raíz cúbica($\sqrt[3]{\ }$): $\sqrt[3]{216n^6} = 6n^2$

Extraemos raíz cúbica($\sqrt[3]{\ }$): $\sqrt[3]{m^6} = m^2$

Diferencia de bases: $(m^2 - 6n^2)$

Luego: $m^6 - 216n^6 = (m^2 - 6n^2)[(m^2)^2 + m^2.6n^2 + (6n^2)^2]$

$\therefore$ $\boxed{m^6 - 216n^6 = (m^2 - 6n^2)(m^4 + 6m^2n^2 + 36n^4)}$

Ejemplo 5: Factorizar: $8a^3 - (a - 1)^3$

Resolución:

$8a^3 - (a - 1)^3 = [\quad - \quad][\quad + \quad + \quad]$

Extraemos raíz cúbica($\sqrt[3]{\ }$): $\sqrt[3]{(a-1)^3} = (a-1)$

Extraemos raíz cúbica($\sqrt[3]{\ }$): $\sqrt[3]{8a^3} = 2a$

Diferencia de bases: $[2a - (a - 1)]$

Luego: $8a^3 - (a - 1)^3 = [2a - (a - 1)][(2a)^2 + 2a(a - 1) + (a - 1)^2]$

$= (a + 1)(4a^2 + 2a^2 - 2a + a^2 - 2a + 1)$

$\therefore$ $\boxed{8a^3 - (a - 1)^3 = (a + 1)(7a^2 - 4a + 1)}$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 43



1. Factoriza los siguientes binomios.

a) $x^3 - b^3 =$	d) $8 - x^3 =$	g) $216b^3 - 64z^3 =$
b) $8a^3 - 27y^3 =$	e) $a^6 - 27b^3 =$	h) $8a^9 - 27b^9 =$
c) $y^3 - 1 =$	f) $x^6 - y^9 =$	i) $125y^{12} - 1 =$

2. Factoriza los siguientes binomios.

a) $a^6 - y^8z^9 =$	d) $\frac{a^6}{64} - \frac{8}{x^3} =$	g) $0{,}064b^3 - 1 =$
b) $x^3y^3 - a^3 =$	e) $\frac{125x^3}{8b^3} - \frac{27}{y^3} =$	h) $0{,}027a^3 - 0{,}125b^3 =$
c) $125x^3 - 125 =$	f) $\frac{1}{27}a^3 - \frac{1}{8}b^3 =$	i) $0{,}001x^3 - 0{,}008\ y^8 =$

3. Factoriza los siguientes polinomios.

a) $5x^4 - 5x =$	f) $(x - 3)^3 - (a + b)^3 =$
b) $2a^5 - 2a^2b^3 =$	g) $(2a - 1)^3 - 27b^3 =$
c) $a^6x - 8y^9x =$	h) $(2a + 1)^3 - 8(x - 2)^3 =$
d) $125b^3 - (a + 3)^3 =$	i) $(b + 3)^3 - a^3(x - 1)^3 =$
e) $(x + 2)^3 - 64y^3 =$	j) $(a + 3)^3 - x^3(b - 2)^3 =$

RESPUESTAS TALLER

2.

a) $(a^2 - y^2z^3)(a^4 + a^2y^2z^3 + y^4z^6)$

b) $(xy - a)(x^2y^2 + xya + a^2)$

c) $125(x - 1)(x^2 + x + 1)$

d) $\left(\frac{a^2}{4} - \frac{2}{x}\right)\left(\frac{a^4}{16} + \frac{a^2}{2x} + \frac{4}{x^2}\right)$

e) $\left(\frac{5x}{2b} - \frac{3}{y}\right)\left(\frac{25x^2}{4b^2} + \frac{15x}{2by} + \frac{9}{y^2}\right)$

f) $(\frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b)(\frac{1}{9}a^2 + \frac{1}{6}ab + \frac{1}{4}b^2)$

g) $(0{,}4b - 1)(0{,}16b^2 + 0{,}4b + 1)$

h) $(0{,}3a - 0{,}5b)(0{,}09a^2 + 0{,}15ab + 0{,}25b^2)$

i) $(0{,}1x - 0{,}2y^2)(0{,}01x^2 + 0{,}02xy^2 + 0{,}04y^4)$

3.

a) $5x(x - 1)(x^2 + x + 1)$

b) $2a^2(a - b)(a^2 + ab + b^2)$

c) $x(a^2 - 2y^3)(a^4 + 2a^2y^3 + 4y^6)$

d) $(5b - a - 3)[25b^2 + 5b(a + 3) + (a + 3)^2]$

e) $(x + 2 - 4y)[(x + 2)^2 + 4y(x + 2) + 16y^2]$

f) $(x - 3 - a - b)[(x - 3)^2 + (x - 3)(a + b) + (a + b)^2]$

g) $(2a - 1 - 3b)[(2a - 1)^2 + 3b(2a - 1) + 9b^2]$

h) $[2a - 2x + 5][(2a + 1)^2 + 2(2a + 1)(x - 2) + 4(x - 2)^2]$

i) $[b + 3 - ax + a][(b + 3)^2 + a(b + 3)(x - 1) + a^2(x - 1)^2]$

j) $[(a + b) - x(b - 2)][(a + b)^2 + (a + b)(b - 2)x + x^2(b - 2)^2]$

3.6.2.7. Factorización de Trinomios de 2do. Grado.

- Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto.

Cuando en un trinomio (tres términos) después de haberlo ordenado el primer y el tercer término son cuadrados y el segundo término es el doble producto de las bases de dichos términos, esta clase de términos se llaman **"Trinomios Cuadrados Perfectos"**.

Todo trinomio cuadrado perfecto se descompone en dos factores binomios, que se obtienen extrayendo la raíz cuadrada de los términos primero y tercero, empleando el signo del segundo término.

Ejemplo 1: Factorizar: $9x^2 + 30xy + 25y^2$

Resolución:

2º término

$9x^2 + 30xy + 25y^2 = (\;+\;)(\;+\;)$ Signo del 2º término

Extraemos raíz cuadrada($\sqrt{\;}$): $\sqrt{25y^2} = 5y$

Extraemos raíz cuadrada($\sqrt{\;}$): $\sqrt{9x^2} = 3x$

- Doble producto de las raíces halladas es: **$2(3x)(5y)$ =** **30xy** — Igual al 2º término

Luego: $9x^2 + 30xy + 25y^2 = (3x + 5y)(3x + 5y) = (3x + 5y)^2$

Ejemplo 2 Factorizar: $a^2 - 4a + 4$

Resolución:

2º término

$a^2 - 4a + 4 = (\;-\;)(\;-\;)$ Signo del 2º término

Extraemos raíz cuadrada($\sqrt{\;}$): $\sqrt{4} = 2$

Extraemos raíz cuadrada($\sqrt{\;}$): $\sqrt{a^2} = a$

- El doble producto de las raíces halladas es: **$2(a)(2)$ =** **4a** — Igual al 2º término

Luego: $a^2 - 4a + 4 = (a - 2)(a - 2) = (a - 2)^2$

Ejemplo 3: Factorizar: $16a^2 - 8a + 1$

Resolución:

2º término

$16a^2 - 8a + 1 = (4a - 1)(4a - 1)$ Signo del 2º término

Extraemos raíz cuadrada($\sqrt{\;}$): $\sqrt{1} = 1$

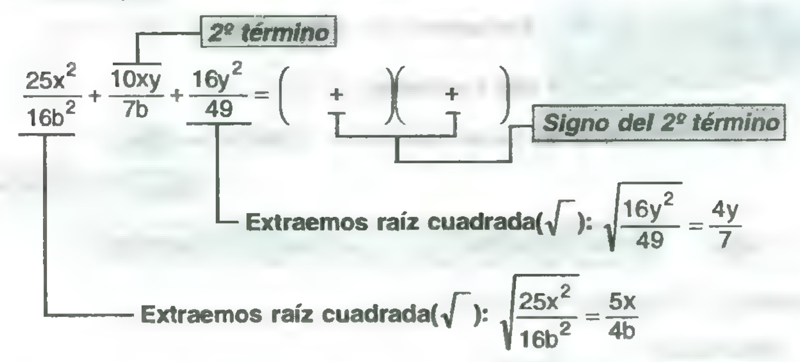
Extraemos raíz cuadrada($\sqrt{\;}$): $\sqrt{16a^2} = 4a$

- El doble producto de las raíces halladas es: **$2(4a)(1)$ =** **8a** — Igual al 2º término

Luego: $16a^2 - 8a + 1 = (4a - 1)(4a - 1) = (4a - 1)^2$

Ejemplo 4: Factorizar: $\dfrac{25x^2}{16b^2} + \dfrac{10xy}{7b} + \dfrac{16y^2}{49}$

Resolución:



- El doble producto de las raíces halladas es: $2\left(\dfrac{5x}{4b}\right)\left(\dfrac{4y}{7}\right) = \dfrac{10xy}{7b}$ — **Igual al 2º término**

Luego: $\dfrac{25x^2}{16b^2} + \dfrac{10xy}{7b} + \dfrac{16y^2}{49} = \left(\dfrac{4y}{7} + \dfrac{5x}{4b}\right)^2$

Ejemplo 5: Factorizar: $49x^2 - 14x + 1$

Resolucion:

2º término

$49x^2 - 14x + 1 = (\quad - \quad)$ — Signo del 2º término

Extraemos raíz cuadrada($\sqrt{\ }$): $\sqrt{1} = 1$

Extraemos raíz cuadrada($\sqrt{\ }$): $\sqrt{49x^2} = 7x$

- El doble producto de las raíces halladas es: $2(7x)(1) = 14x$ — **Igual al 2º término**

Luego: $49x^2 - 14x + 1 = (7x - 1)^2$

Ejemplo 6: Factorizar: $36x^{2n} + y^2 - 12x^ny$

Resolución:

Ordenando términos, se obtiene que:

2º término

$36x^{2n} + y^2 - 12x^ny = 36x^{2n} - 12x^ny + y^2 = (\quad - \quad)$ Signo del 2º término

Extraemos raíz cuadrada($\sqrt{\ }$): $\sqrt{y^2} = y$

Extraemos raíz cuadrada($\sqrt{\ }$): $\sqrt{36x^{2n}} = 6x^n$

- El doble producto de las raíces halladas es: $2(6x^n)(y) = 12x^ny$ Igual al 2º término

Luego: $36x^{2n} - 12x^ny + y^2 = (6x^n - y)^2$

Observación 1:

*Todo cuadrado perfecto tiene su origen en el cuadrado de una **Suma** o de una **Diferencia** de dos términos: osea:*

$(a + b)^2 = \underbrace{a^2 + 2ab + b^2}$ Trinomio Cuadrado Perfecto ; $(a - b)^2 = \underbrace{a^2 - 2ab + b^2}$ Trinomio Cuadrado Perfecto

Por lo tanto, un Trinomio Cuadrado Perfecto siempre será igual al Cuadrado de una Suma o al Cuadrado de una Diferencia de dos términos.

Observación 2:

*Los siguientes polinomios **Trinomios Cuadrados Perfectos (T.C.P).***

- $x^2 + 7x + 9$; No es **T.C.P.** porque: $7x \neq 2(x)(3)$

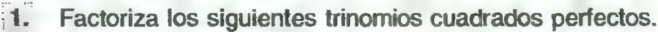
$\sqrt{x^2} = x$ $\sqrt{9} = 3$

- $x^2 - 4x - 25$; No es **T.C.P.** porque: $4x \neq 2(x)(5)$

$\sqrt{x^2} = x$ $\sqrt{25} = 5$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 44



1. Factoriza los siguientes trinomios cuadrados perfectos.

a) $x^2 + 12x + 36 =$	f) $x^2 + 20x + 100 =$
b) $a^2 + 10a + 25 =$	g) $y^2 + 24y + 144 =$
c) $z^2 + 6z = 9 =$	h) $m^2 + 50m + 625 =$

d) $a^2 + 2a + 1 =$	i) $n^2 + 42n + 441 =$
e) $b^4 + 8b^2 + 16 =$	j) $x^2 + 26x + 169 =$

2. Factoriza los siguientes cuadrados perfectos.

a) $a^2 - 14a + 49 =$	f) $y^{2n} - 2y^n + 1 =$
b) $x^2 - 4x + 4 =$	g) $x^4 - 2x^2 + 1 =$
c) $y^2 - 18y + 81 =$	h) $x^6 - 8x^3 + 16 =$
d) $x^2 - 22x + 121 =$	i) $a^8 - 12a^4 + 36 =$
e) $a^2 - 30a + 225 =$	j) $a^6 - 16a^3 + 64 =$

3. Factoriza los siguientes trinomios cuadrados perfectos.

a) $9x^2 + 12xy + 4y^2 =$	f) $49a^2 - 14ax + x^2 =$
b) $25a^2 + 40a + 16 =$	g) $1 - 16x^2 + 64x^2 =$
c) $36a^2 + 60ab + 25b^2 =$	h) $16x^2 + 8xy^3 + y^6 =$
d) $4x^2 - 12xy + 9y^2 =$	i) $9x^2 + 6\sqrt{2x} + 2 =$
e) $25a^2 - 10a + 1 =$	j) $1 - 12x + 36x^2 =$

4. Factoriza los siguientes trinomios cuadrados perfectos:

a) $\frac{a^2}{4} + \frac{ab}{3} + \frac{b^2}{9} =$	d) $0{,}09a^2 - 0{,}12ab + 0{,}04b^2 =$
b) $\frac{4}{9}x^2 + xb + \frac{9}{16}b^2 =$	e) $0{,}25x^2 - 0{,}30xy + 0{,}09y^2 =$
c) $\frac{1}{25}b^2 + \frac{1}{10}ab + \frac{1}{16}a^2 =$	f) $4 - 3{,}2x^2 + 0{,}64x^4 =$

5. Factoriza los siguientes trinomios cuadrados perfectos.

a) $25a^2 + 36x^2 + 60ax =$	d) $-16a + a^2 + 64 =$
b) $-2b + b^2 + 1 =$	e) $4 + 100x^2 + 40x =$
c) $x^2 + 16y^2 - 8xy =$	f) $-14z + z^2 + 49 =$

6. Escribe el término que falta para que en cada expresión siguiente obtengas un trinomio cuadrado perfecto **(T.C.P)**.

a) $x^2 - \square + 16$	e) $\frac{1}{9}b^2 + \square + \frac{1}{16}$	i) $\square + \frac{20}{9}x + \frac{16}{81}$
b) $a^2 + \square + 49$	f) $4x^2 - 36x + \square$	j) $\square - 48x + 16x^2$
c) $4p^2 - \square + 25$	g) $25 - 20x + \square$	
d) $81b^2 + \square + 1$	h) $\square - 160y + 64y^2$	

7. Factoriza, simplifica y reduce los términos semejantes:

a) $\dfrac{a^2-4}{a+2}+\dfrac{a^2-4a+4}{a-2}-\dfrac{(a+2)^2}{a+2}$

Resolución:

$$\frac{a^2-4}{a+2}+\frac{a^2-4a+4}{a-2}-\frac{(a+2)^2}{a+2}$$

$$\frac{a^2-2^2}{a+2}+\frac{(a-2)^2}{(a-2)}-\frac{(a+2)(a+2)}{(a+2)}$$

$$\frac{(a+2)(a-2)}{(a+2)}+(a-2)-(a+2)=a-2+a-2-a-2=\boxed{a-6}$$

Sabemos que:

$a^2-4=a^2-2^2$
$=(a+2)(a-2)$

$a^2-4a+4=(a-2)^2$

b) $\dfrac{3y^2-75}{5-y}+\dfrac{y^2-12y+36}{6-y}-\dfrac{81-18y+y^2}{y-9}$

Resolución:

$$\frac{3y^2-75}{5-y}+\frac{y^2-12y+36}{6-y}-\frac{81-18y+y^2}{y-9}$$

$$\frac{3(y+5)(y-5)}{-(y-5)}+\frac{(y-6)^2}{-(y-6)}-\frac{(9-y)^2}{-(9-y)}$$

$$\frac{3(y+5)}{-1}+\frac{(y-6)}{-1}+(9-y)$$

$$-3(y+5)-(y-6)+(9-y)=-3y-15-y+6+9-y=\boxed{-5y}$$

Sabemos que:

I) $3y^2-75=3(y^2-25)=3(y^2-5^2)$
$3y^2-75=3(y+5)(y-5)$

ii) $y^2-12y+36=(y-6)^2$

iii) $81-18y+y^2=(9-y)^2$

iv) $5-y=-(y-5)$

c) $\dfrac{(y+3)^3}{3+y}-\dfrac{y^3-1}{1-y}+\dfrac{(y-4)^2}{4-y}-\dfrac{1-y^4}{y^2+1}$ **Rpta.** $3(y^2+2y+4)$

d) $\dfrac{n^2-81}{9-n}-\dfrac{4(m^2-n^2)}{2m-2n}+\dfrac{9(m-5)^2}{m-5}$ **Rpta.** $2(n-4m+18)$

e) $\dfrac{x^2-16x+64}{x-8}-\dfrac{3(x^2-25)}{x+5}-\dfrac{5(x^2-49)^2}{7-x}$ **Rpta.** $3(x+14)$

f) $\dfrac{4x^2-9y^2}{2x+3y}-\dfrac{12x^2-3y^2}{2x+y}+\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x+y}$ **Rpta.** $y-3x$

g) $\dfrac{10(m^2-n^2)}{5m-5n}-\dfrac{n^2-25}{5-n}+\dfrac{4m^2+36mn+81n^2}{9n-2m}$ **Rpta.** $4m-8n+5$

3.6.2.8. Factorización de un Trinomio de la forma: $x^2 + bx + c$

Todo trinomio cuadrado perfecto se descompone en un producto de dos factores binomios **(x + p)(x + q)**, en los cuales el primer término "x" es la raíz cuadrada del primer término del **T.C.P.** (ya ordenado) y los segundos términos "p" y "q" son aquellos cuya suma algebraica sea igual al coeficiente del segundo término del trinomio cuadrado perfecto y el producto de ellos; osea "p" y "q" sea el último término, llamado término independiente (c).

En resumen:

$$x^2 + bx + c = (x + p)(x + q) \qquad \textbf{Siendo: } \begin{cases} p + q = b \ \text{ y} \\ p.q = c \end{cases}$$

Ejemplo 1: Factoriza el trinomio: $x^2 + 7x + 12$

Resolución:

$$x^2 + 7x + 12 = (x + p)(x + q)$$

Siendo: $\begin{cases} p + q = 7 \ \text{ y} \\ p.q = 12 \end{cases}$, escribimos los pares de factores positivos de 12.

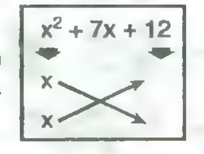
Tenemos que:

$12 = 1\times12$; $12 = 3\times4$; $12 = 6\times2$; de estos pares de factores debemos elegir uno de los que cumpla la condición que $p + q = 7$. Este par como puede observarse, es el formado por los números 3 y 4; luego:

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$$

> *Nota:*
>
> *El proceso seguido en cada factorización anterior sobre trinomios cuadrados perfectos, se puede efectuar* ***Aplicando el Método del Aspa.***

Método del Aspa:

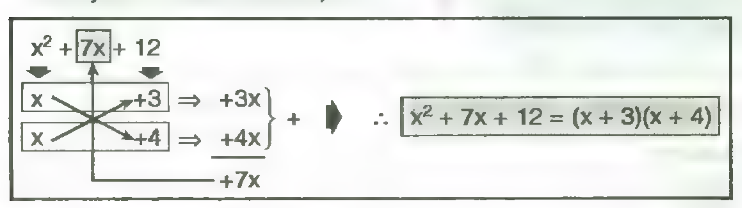


1) Se descompone el primer término del trinomio (x^2) en dos factores. De cada factor sale una flecha y forma una Equis (><)

2) Se descompone el término independiente (12) en dos factores, a estos factores llegan las flechas, para determinar el signo de dichos factores basta fijarse en el signo del segundo término del trinomio. Si el signo del segundo término es positivo los dos factores binomios son dos sumas y el signo del segundo término es negativo, los dos factores binomios son dos diferencias.Ahora si el tercer término (término independiente) es negativo, los factores binomios serán uno Suma y el otro Diferencia. (Se coloca el signo del segundo término al mayor producto obtenido al multiplicar en Aspa).

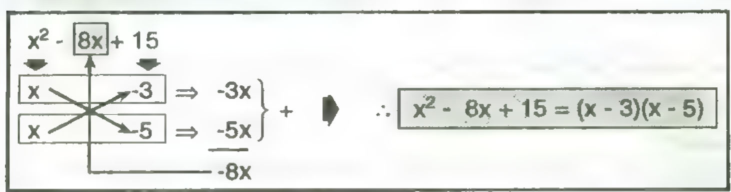
3) Por último se multiplican los factores obtenidos como indican las flechas. Si esta suma es igual al segundo término del trinomio, entonces termina la factorización y los factores que corresponden al trinomio son los binomios considerados en su posición horizontal.

(En caso que la Suma es diferente al segundo término del trinomio, se ensaya con otros factores).



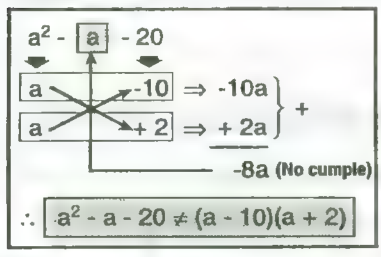
Ejemplo 2: Factorizar: $x^2 - 8x + 15$

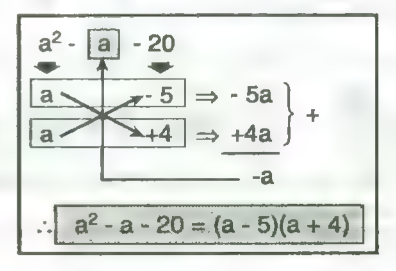
Resolución:



Ejemplo 3: Factorizar: $a^2 - a - 20$

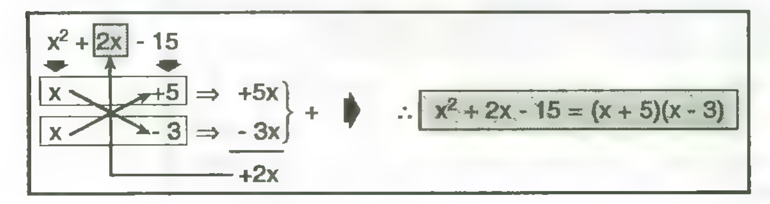
Resolución:





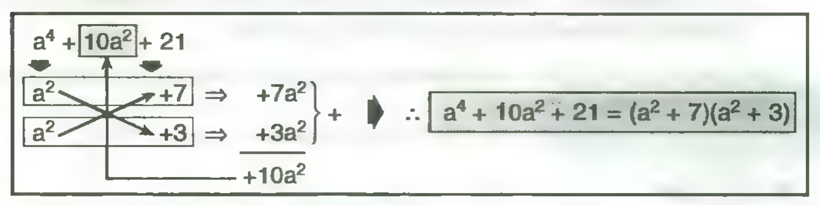
Ejemplo 4: Factorizar: $x^2 + 2x - 15$

Resolución:



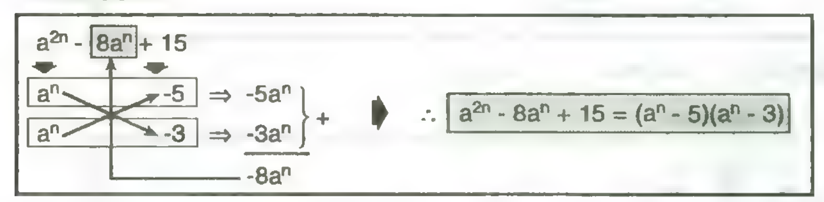
Ejemplo 5: Factorizar: $a^4 + 10a^2 + 21$

Resolución:



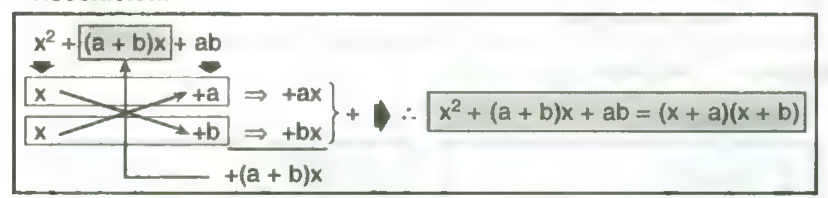
Ejemplos 6: Factorizar: $a^{2n} - 8a^n + 15$

Resolución:



Ejemplo 7: Factorizar: $x^2 + (a + b)x + ab$

Resolución:





TALLER DE EJERCICIOS Nº  45

1. Halla dos números cuya suma y producto sean respectivamente los que dan cada ejercicio siguiente:

a) 6 y 8	d) -6 y -16	g) -8 y -9
b) 11 y 24	e) -1 y -30	h) -6 y 5
c) -4 y -12	f) -12 y 35	i) -3 y -10

2. Factoriza cada uno de los trinomios siguientes:

a) $x^2 + 9x + 20$	d) $x^2 + 4x + 3$	g) $a^2 - 7a + 12$
b) $a^2 + 12a + 32$	e) $z^2 + 8z + 15$	h) $b^2 - 11b + 18$
c) $b^2 + 7b + 10$	f) $a^2 + 7a + 6$	i) $x^2 - 11x + 24$

j) $z^2 - 13z + 40$	ll) $a^2 + 4a - 45$	ñ) $a^2 - 3a - 70$
k) $y^2 - 15y + 50$	m) $x^2 + 5x - 14$	o) $x^2 - 3x - 40$
l) $x^2 - 6x + 5$	n) $y^2 + 11y - 60$	p) $y^2 - y - 6$

3. Factorizar los siguientes trinomios cuadrados perfectos: (ordenarlos)

a) $x^2 - 30 - 7x$	e) $-4y + 3 + y^2$	i) $a^2 + 20 - 12a$
b) $-2 + x^2 + x$	f) $33 + x^2 - 14x$	j) $7x + x^2 - 60$
c) $-60 + a^2 - 17a$	g) $10x + 21 + x^2$	k) $2 + y^2 + 3y$
d) $8 + a^2 - 9a$	h) $-5x - 50 + x^2$	l) $-12 + x^2 - x$

4. Factorizar los siguientes cuadrados perfectos:

a) $x^8 - x^4 - 12$	f) $x^2 + (2a - b)x - 2ab$
b) $y^6 + 9y^3 + 8$	g) $(x + 1)^2 + 5(x + 1) + 6$
c) $a^4 + 12a^2 + 27$	h) $(a + 2)^2 + 3(a + 2) - 28$
d) $(ab)^2 + 7ab + 10$	i) $(x + y)^2 + (x + y) - 110$
e) $a^{2n} - 11a^n + 28$	j) $(a + 3)^2 - 14(a + 3) + 48$

3.6.2.9. Factorización de un Trinomio de la forma: $ax^2 + bx + c$; $(a \neq 1)$

Cuando el coeficiente del primer término de un trinomio cuadrado perfecto no es la unidad, para factorizar dichos trinomios perfectos se emplea el siguiente desarrollo:

Ejemplo: Factorizar: $2a^2 + 7a + 3$

Resolución:

Para factorizar se hará como sigue:

1) Se multiplica todo el trinomio por el coeficiente del primer término indicando dicha multiplicación en el seguno término, para conservar su coeficiente.

Osea:

Siendo: $2a^2 + 7a + 3$; se multiplica cada término por **2**, obteniendo:

$$\underline{2.2a^2} + \underline{2.7a} + \underline{2.3} = \underline{4a^2} + \underline{2.7a} + \underline{6}$$

2) Se extrae la raíz cuadrada del primer término de esta última expresión, lo cual nos servirá como primer término de los dos factores binomios; osea:

$$\sqrt{4a^2} = \sqrt{4}.\sqrt{a^2} = 2a$$

3) Se buscan dos números tales que multiplicados den el tercer término ya multiplicado y cuya suma sea el coeficiente no multiplicado del segundo término.

Producto = 6 = 6×1 ; **Suma = 7 = 6 + 1**

4) Se forman los dos factores binomios con los términos asi encontrados; osea con la raíz cuadrada como primer término de cada uno de los binomios y con los números encontrados como los segundos términos.

$$(2a + 6)(2a + 1)$$

5) Se divide el producto indicado de dichos factores binomios entre el coeficiente del primer término, para anular la multiplicación anterior:

$$\frac{(2a+6)(2a+1)}{2}$$; para lo cual.

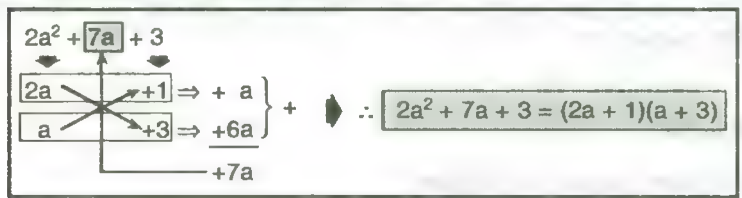
6) Se extrae el factor común en uno o en los dos factores binomios, según el caso, para la simplificación:

$$\frac{2(a+3)(2a+1)}{2}$$

7) Se simplifica, el producto de los dos factores binomios que queda en la factorización del trinomio, es:

$$2a^2 + 7a + 3 = (2a + 1)(a + 3)$$

* Otra forma de factorizar estos trinomios es utilizando el **Método del Aspa** estudiado en el caso anterior.



Ejemplo 2: Factorizar: $3x^2 + 19x - 14$

Método.- Multiplicando y dividiendo por el coeficiente del primer término.

1) **Multiplicamos por 3** ➧ $3(3x^2) + 3(19x) - 3(14) = (3x)^2 + 19(3x) - 42$

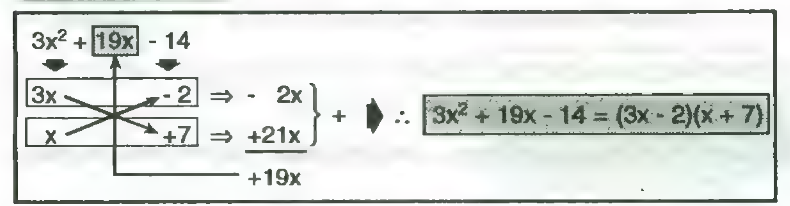
2) **Factorizando, obtenemos:** $(3x)^2 + 19(3x) - 42 = (3x + 21)(3x - 2)$

3) **Dividimos entre 3** ➧ $\frac{(3x+21)(3x-2)}{3}$; **Sacamos factor común "3" del primer paréntesis.**

$$\frac{3(x+7)(3x-2)}{3}$$

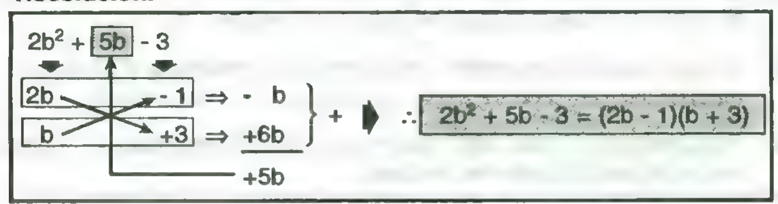
Simplificando, queda: $(x + 7)(3x - 2) \Rightarrow \therefore$ $3x^2 + 19x - 14 = (x + 7)(3x - 2)$

Método del Aspa:



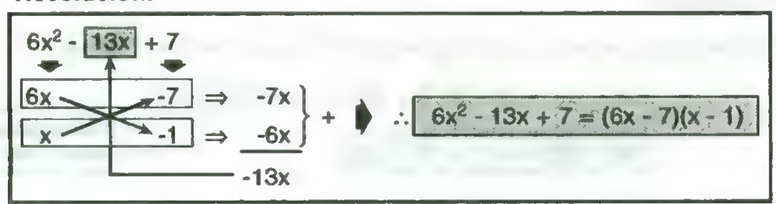
Ejemplo 3: Factorizar: $2b^2 + 5b - 3$

Resolución:



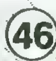
Ejemplo 4: Factorizar: $6x^2 - 13x + 7$

Resolución:





TALLER DE EJERCICIOS Nº 46



1. Factoriza cada una de los trinomios siguientes:

a) $3x^2 + 5x + 2$	d) $6p^2 + 4p - 2$	g) $3q^2 - 5q - 2$	j) $3m^2 + 7m + 2$
b) $2y^2 + 5y + 2$	e) $2y^2 - 3y - 5$	h) $6z^2 - 13z + 7$	k) $2t^2 + t - 3$
c) $3x^2 + 10x + 3$	f) $4n^2 + 5n + 1$	i) $2x^2 + 7z + 3$	l) $4b^2 + 13b + 3$

2. Factoriza cada uno de los trinomios siguientes:

a) $6a^2 + 23a + 20$	f) $10a^2 + 4a - 6$
b) $7x^2 - 15x + 2$	g) $12z^2 + 11z - 15$
c) $2y^2 + 3y + 1$	h) $54x^2 - 15x - 50$
d) $12x^2 - 13x + 3$	i) $13b^2 - 7b - 6$
e) $4y^2 - 22y + 10$	j) $6x^2 + x - 15$

Nota:

Para factorizar completamente un polinomio real en "x", se aconseja a seguir los pasos siguientes:

1) Analizar si tiene un factor común monomio.
2) Determinar si es una diferencia de cuadrados, una diferencia de cubos o una suma de cubos.
3) Analizar si es un trinomio cuadrado perfecto.
4) Si no es un trinomio cuadrado perfecto, determinar si es de la forma: $x^2 + bx + c$; o de la forma: $ax^2 + bx + c$; **siendo: $a \neq 1$.**
5) Si el polinomio tiene cuatro o más términos, determinar si es posible agrupar sus términos de modo que tengan un factor común.
6) Asegurarse que cada factor es primo, y luego comprobar el trabajo realizado multiplicando los factores.

Ejemplo 1: Factorizar completamente: $3x^3 - 12x$

Resolución:

- Factorizamos primero, sacando el factor común monomio "3x", así:

$$3x^3 - 12x = 3x^3 - 3x.4 = 3x(x^2 - 4) = 3x(\underbrace{x^2 - 2^2}_{\text{Diferencia de cuadrados}})$$

$$\therefore \boxed{3x^3 - 12x = 3x\,(x + 2)(x - 2)}$$

Ejemplo 2: Factorizar completamente: $2x^4 + 54x$

Resolución:

- Factorizamos primero, sacando el factor común monomio "2x", así:

$$2x^4 + 54x = 2x.x^3 + 2x(27) = \underbrace{2x}_{\text{factor común monomio}}(x^3 + 27)$$

$$2x^4 + 54x = 2x(x^3 + 27) = 2x(\underbrace{x^3 + 3^3}_{\text{Suma de cubos}})$$

$$2x^4 + 54x = 2x(x + 3)(x^2 - x.3 + 3^2)$$

$$\therefore \boxed{2x^4 + 54x = 2x(x + 3)(x^2 - 3x + 9)}$$

Ejemplo 3: Factorizar: $11x^2 - 11b^2 - 11x - 11b$

Resolución:

Agrupamos los términos de la manera siguiente:

$$11x^2 - 11b^2 - 11x - 11b = (11x^2 - 11b^2) - (11x + 11b)$$

Sacamos factor común "11"

$$11x^2 - 11b^2 - 11x - 11b = 11(x^2 - b^2) - 11(x + b)$$

Diferencia de cuadrados

$$11x^2 - 11b^2 - 11x - 11b = 11(x + b)(x - b) - 11(x + b)$$

Sacamos factor común "11(x + b)"

$$\therefore \boxed{11x^2 - 11b^2 - 11x - 11b = 11(x + b)(x - b - 1)}$$

Ejemplo 4: Factorizar: $5a^8b - 5b^9$

Resolución:

- Factorizamos primero, sacando el factor común monomio: "5b" así:

$$5a^8b - 5b^9 = 5b(a^8 - b^8) = 5b(\quad + \quad)(\quad - \quad)$$

Extraemos raíz cuadrada($\sqrt{\ }$): $\sqrt{b^8} = b^4$

Extraemos raíz cuadrada($\sqrt{\ }$): $\sqrt{a^8} = a^4$

$$5a^8b - 5b^9 = 5b(a^4 + b^4)(a^4 - b^4) = 5b(a^4 + b^4)(\quad + \quad)(\quad - \quad)$$

Extraemos raíz cuadrada($\sqrt{\ }$): $\sqrt{b^4} = b^2$

Extraemos raíz cuadrada($\sqrt{\ }$): $\sqrt{a^4} = a^2$

$$5a^8b - 5b^9 = 5b(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = 5b(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(\quad + \quad)(\quad - \quad)$$

Extraemos raíz cuadrada($\sqrt{\ }$): $\sqrt{b^2} = b$

Extraemos raíz cuadrada($\sqrt{\ }$): $\sqrt{a^2} = a$

$$\therefore \boxed{5a^8b - 5b^9 = 5b(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)}$$

Ejemplo 5: Factorizar: $ax^2 + 11ax + 28a$

Resolución:

- Factorizamos primero, sacando el factor común "a", así:

$$ax^2 + 11ax + 28a = a(x^2 + 11x + 28) = a(x + \quad)(x + \quad)$$

$$\begin{array}{lcl} x & \searrow\nearrow & +7 \Rightarrow +7x \\ x & & +4 \Rightarrow +4x \\ & & \overline{\quad +11x} \end{array}$$

$$\therefore \boxed{ax^2 + 11ax + 28a = a(x + 7)(x + 4)}$$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 47



1. Factoriza completamente cada uno de los polinomios siguientes:

a) $5ab^2 - 5a$	e) $2ax^2 + 8ax + 8a$	i) $45bx^2 + 3bx - 6b$
b) $2a^3 + 2$	f) $3y^2 - 6y + 3$	j) $3a^mx - 3a^my + 5a^nx - 5a^ny$
c) $x^4 - 16b^4$	g) $ab^2 + 8ab + 16a$	k) $x^2 - 2ax + a^2 - 1$
d) $a^6 - 9a^2$	h) $a^4 - (2x + 1)^4$	l) $4x^{2m} - 28x^m + 49$

2. Factoriza completamente cada uno de los polinomios siguientes:

a) $x^8 - 1$	f) $4x^4 + 8x^2 + 4$	k) $4a^7 - 4a$
b) $a^6 - b^6$	g) $x - x^7$	l) $6ab^8 - 6ax^8$
c) $3a^4 - 243b^4$	h) $3a^4 - 48b^4$	ll) $px^4 - p$
d) $x^4 + 13x^2 + 36$	i) $a^4 - 29a^2 + 100$	m) $my^3 - my$
e) $5 + 5a^6$	j) $9 + 10x^2 + x^4$	n) $x^3 + 5x^2 - 4x - 20$

RESPUESTAS TALLER

(1.)

a) $5a(b + 1)(b - 1)$	g) $a(b + 4)^2$
b) $2(a + 1)(a^2 - a + 1)$	h) $[a^2 + (2x + 1)^2][a + 2x + 1][a - 2x - 1]$
c) $(x + 2b)(x - 2b)(x^2 + 4b^2)$	i) $3b(5x + 2)(3x - 1)$
d) $a^2(a^2 + 3)(a^- +)(a^- -)$	j) $(x - y)(3a^m + 5a^n)$
e) $2a(x + 2)^2$	k) $(x - a + 1)(x - a - 1)$
f) $3(y - 1)^2$	l) $(2x^m - 7)^2$

(2) a) $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$

b) $(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$

c) $3(a^2+9b^2)(a+3b)(a-3b)$

d) $(x^2+9)(x^2+4)$

e) $5(1+a^2)(1-a^2+a^4)$

f) $4(x^2+1)^2$

g) $x(1+x)(1-x)(1-x+x^2)(1+x+x^2)$

h) $3(a^2+4b^2)(a+2b)(a-2b)$

i) $(a+5)(a-5)(a+2)(a-2)$

j) $(1+x^2)(9+x^2)$

k) $4a(a+1)(a^2-a+1)(a-1)(a^2+a+1)$

l) $6a(b^4+x^4)(b^2+x^2)(b+x)(b-x)$

ll) $p(x^2+1)(x+1)(x-1)$

m) $my(y+1)(y-1)$

n) $(x+5)(x+2)(x-2)$

- **Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto por Suma y Resta (Quita y Pon).**

Se basa en el siguiente principio: Si a una expresión se le suma y resta una misma expresión, la expresión inicial **no varia.**

Ejempo 1: Factorizar: $x^4 + 64y^4$

Resolución:

1) Extraemos las raíces cuadradas de cada término así:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x^4}=x^2\\ \sqrt{64y^4}=8y^2\end{array}\right\}$$ Doble producto de las raíces halladas sería: $2(x^2)(8y^2) = \mathbf{16x^2y^2}$

2) Sumamos y restamos este doble producto para completar el trinomio cuadrado perfecto (T.C.P.) y además obtener una diferencia de cuadrados, así:

$$x^4+64y^4 = \underbrace{x^4+16x^2y^2+64y^4}_{\text{(T.C.P.)}} - 16x^2y^2$$

$$x^4+64y^4=(x^2+4y^2)^2-(4xy)^2$$ ***; por diferencia de cuadrados***

$$x^4+64y^4=[\quad\quad + \quad][\quad\quad - \quad]$$

$$x^4+64y^4=[(x^2+4y^2)+4xy][(x^2+4y^2)-4xy]$$

$$\therefore\ \boxed{x^4+64y^4=(x^2+4y^2+4xy)(x^2+4y^2-4xy)}$$

Ejemplo 2: Factorizar: a^4+2a^2+9

Resolución:

1) Extraemos las raíces cuadradas de los términos extremos, así:

$$\left.\begin{array}{r}\sqrt{a^4}=a^2\\ \sqrt{9}=3\end{array}\right\}\text{ Doble producto de las raíces halladas sería: } 2(a^2)(3)=\mathbf{6a^2}$$

2) Como en la expresión: $a^4 + 2a^2 + 9$; hay $\mathbf{2a^2}$, bastará sumar y restar: $\mathbf{4a^2}$

$$a^4 + 2a^2 + 9 = a^4 + \underline{2a^2} + 9 + \underline{4a^2} - 4a^2$$

$$a^4 + 2a^2 + 9 = \underbrace{a^4 + 6a^2 + 9}_{\textbf{(T.C.P.)}} - 4a^2$$

$a^4 + 2a^2 + 9 = (a^2 + 3)^2 - (2a)^2$ ***; por diferencia de cuadrados***

$$\therefore \boxed{a^4 + 2a^2 + 9 = (a^2 + 3 + 2a)(a^2 + 3 - 2a)}$$

Ejemplo 3: Factorizar: $a^4 + a^2 + 1$

Resolución:

En este caso los 3 términos son cuadrados perfectos, de modo que al escoger, lo hacemos convenientemente:

1) Extraemos las raíces cuadradas de los términos extremos, así:

$$\left.\begin{array}{r}\sqrt{a^4}=a^2\\ \sqrt{1}=1\end{array}\right\}\text{ Doble producto de las raíces halladas sería: } 2a^2\times 1=\mathbf{2a^2}$$

2) Como la expresión: $a^4 + a^2 + 1$, tiene a^2, sólo hay que sumar a^2 para completar los $2a^2$ (lógicamente también restaremos).

$$a^4 + a^2 + 1 = a^4 + \underline{a^2} + 1 + \underline{a^2} - a^2$$

$$a^4 + a^2 + 1 = \underbrace{a^4 + 2a^2 + 1}_{\textbf{(T.C.P.)}} - a^2$$

$a^4 + 2a^2 + 9 = (a^2 + 1)^2 - a^2$ ***; por diferencia de cuadrados***

$$\therefore \boxed{a^4 + 2a^2 + 9 = (a^2 + 1 + a)(a^2 + 1 - a)}$$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 48



Factorizar los polinomios siguientes:

1) $4x^4 + y^4$	4) $4m^4 + 3m^2 + 9$	7) $36m^4 + 15m^2n^2 + 4n^4$
2) $4a^4 + 81$	5) $16x^4 + 4x^2 + 1$	8) $9x^4 + 2x^2 + 1$
3) $a^4 + a^2b^2 + b^4$	6) $4x^4 + 3x^2 + 1$	9) $9x^4 + 8x^2y^2 + 4y^4$

RESPUESTAS TALLER

1) $(2x + y^2 + 2xy)(2x + y^2 - 2xy)$

2) $(2a^2 + 9 + 6a)(2a^2 + 9 - 6a)$

3) $(a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)$

4) $(2m^2 + 3 + 3m)(2m^2 + 3 - 3m)$

5) $(4x^2 + 1 + 2x)(4x^2 + 1 - 2x)$

6) $(2x^2 + 1 + x)(2x^2 + 1 - x)$

7) $(6m^2 + 2n^2 + 3mn)(6m^2 + 2n^2 - 3mn)$

8) $(3x^2 + 1 + 2x)(3x^2 + 1 - 2x)$

9) $(3x^2 + 2y^2 + 2xy)(3x^2 + 2y^2 - 2xy)$

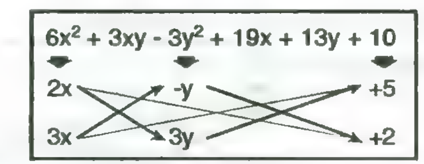
- **Factorización, empleando Aspa Doble.**

Sirve para factorizar expresiones de la forma:

$$ax^{2m} + bx^my^n + cy^{2n} + dx^m + ey^n + f$$

Ejemplo 1: Factorizar: $6x^2 + 3xy - 3y^2 + 19x + 13y + 10$

Resolución:



Comprobación:

Aspa izquierda	Aspa derecha	Aspa punteada
$3x(-y) = -3xy$ $+2x(3y) = +6xy$ (+) $+3xy$ (correcto)	$-y(2) = -2y$ $+3y(5) = +15y$ (+) $+13y$ (correcto)	$2x(2) = +4x$ $3x(5) = +15x$ (+) $+19x$ (correcto)

Luego: $6x^2 + 3xy - 3y^2 + 19x + 13y + 10 = (2x - y + 5)(3x + 3y + 2)$

Ejemplo 2: Factorizar: $15x^2 - 3y - 2y^2 + 7xy + 41x + 14$

Resolución:

Ordenando adecuadamente, obtenemos:

$$15x^2 - 3y - 2y^2 + 7xy + 41x + 14 = 15x^2 + 7xy - 2y^2 + 41x - 3y + 14$$

5x	- y	+2
3x	+2y	+7

Comprobación:

Aspa izquierda	Aspa derecha	Aspa punteada
$5x(2y) = +10xy$ $3x(-y) = -3xy$ (+) **+7xy** **(correcto)**	$-y(7) = -7y$ $+2y(2) = +4y$ (+) **-3y** **(correcto)**	$5x(7) = +35x$ $3x(2) = +6x$ (+) **+41x** **(correcto)**

Luego: $15x^2 - 3y - 2y^2 + 7xy + 41x + 14 = (5x - y + 2)(3x + 2y + 7)$

Ejemplo 3: Factorizar: $8x^2 + 4xy + 18x + 6y + 9$

Resolución:

Completamos con $0y^2$ para aplicar el Doble Aspa.

$$8x^2 + 4xy + 18x + 6y + 9 = 8x^2 + 4xy + 0y^2 + 18x + 6y + 9$$

4x	+2y	+3
2x	+0y	+3

Comprobación:

Aspa izquierda	Aspa derecha	Aspa punteada
$4x(0y) = 0$ $2x(2y) = +4xy$ (+) **+4xy** **(correcto)**	$+2y(3) = +6y$ $+0y(3) = 0$ (+) **+6y** **(correcto)**	$4x(3) = +12x$ $2x(3) = +6x$ (+) **+18x** **(correcto)**

Luego: $8x^2 + 4xy + 18x + 6y + 9 = (4x + 2y + 3)(2x + 0y + 3)$

$$\boxed{8x^2 + 4xy + 18x + 6y + 9 = (4x + 2y + 3)(2x + 3)}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS: GRUPO (50)

Factorizar los polinomios siguientes:

1) $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y - 63$	4) $6x^2 + 12 + 10y^2 - 23y - 16xy + 17x$
2) $15x^2 - 19xy + 6y^2 - 11y + 19x - 10$	5) $7x^2 + 19xy - 6y^2 + 35x - 10y$
3) $12x^2 - 6y^2 - 6xy + 7y + 23x + 5$	6) $15x^2 - 2y + 6xy - 2x - 1$

CLAVE DE RESPUESTAS GRUPO (50)

1) $(x + y - 9)(x + y + 7)$	4) $(3x - 5y + 4)(2x - 2y + 3)$
2) $(5x - 3y - 2)(3x - 2y + 5)$	5) $(x + 3y + 5)(7x - 2y)$
3) $(4x + 2y + 1)(3x - 3y + 5)$	6) $(3x - 1)(5x + 2y + 1)$

- **Factorización empleando el Método de los Divisores Binomios:**

Se basa en el siguiente criterio de divisibilidad: "Si un polinomio P(x) se anula para: **x = ±a**; uno de sus factores será: **(x a)**". Se usa generalmente para factorizar polinomios de grado impar.

Forma de calcular los posibles valores que anulan a un polinomio:

Los posibles valores que anulan a un polinomio, son los divisores de:

$$\frac{\textit{Término Independiente del Polinomio}}{\textit{Coeficiente del Término de Mayor Grado}}$$

Ejemplo 1: Los posibles valores que anulan a:

$x^3 - 7x + 6$

- 6 → ***Término independiente***
- x^3 → ***Coeficiente del término de mayor grado***

Son los divisores de:
- ⇒ divisores de 6: ±1; ±2; ±3 y ± 6
- ⇒ divisores de 1: ±1

Luego los posibles valores serán: ±1; ±2; ±3 y ±6

Ejemplo 2: Los posibles valores que anulan a: $5x^3 - 4x^2 - 1$

Son los divisores de:
$\Rightarrow$ divisores de 1: ±1
$\Rightarrow$ divisores de 5: ±1 y ±5

Luego los posibles valores serán: ±1; $\pm$ 1/5

Ejemplo 3: Los posibles valores que anulan a: $5x^3 - 5x^2 - 2$

Son los divisores de:
$\Rightarrow$ divisores de 2: ±1 y ±2
$\Rightarrow$ divisores de 5: ±1 y ±5

Luego los posibles valores serán: ±1; $\pm$ 1/5; $\pm$ 2 y $\pm$ 2/5

Nota:

Para hallar los posibles valores de los divisores de un polinomio se toma un divisor del numerador y se les combina con los del denominador.

Ejemplo 1: Factorizar: $3x^3 + 7x^2 - 4$

Resolución:

1) Los posibles valores que anulan al polinomio son:

$\frac{-4}{3}$ $\Rightarrow$ divisores de 4: ±1; ±2; ±4
$\Rightarrow$ divisores de 3: ±1 y ±3

Luego los posibles valores son: ±1; $\pm$ 1/3; $\pm$ 2; $\pm$ 2/3; $\pm$ 4 y $\pm$ 4/3

2) Probando con: $\boxed{x = 1}$ $\Rightarrow$ $3x^3 + 7x^2 - 4 = 3(1)^3 + 7(1)^2 - 4$

$= 3(1) + 7(1) - 4 = 6 \neq 0$

$\therefore$ (x - 1) No es factor del polinomio

Probando con: $\boxed{x = -1}$ $\Rightarrow$ $3x^3 + 7x^2 - 4 = 3(-1)^3 + 7(-1)^2 - 4$

$= 3(-1) + 7(1) - 4 = 0$

$\therefore$ (x + 1) Si es factor del polinomio

3) Dividimos $3x^3 + 7x^2 - 4$ entre $(x + 1)$

Ordenamos y completamos el polinomio, osea: $3x^3 + 7x^2 + 0x - 4$

Aplicando Ruffini, obtenemos:

	3	+7	0	-4
-1	↓	-3	-4	+4
	3	+4	-4	0

Divisor

Divisor = $3x^2 + 4x - 4$

Sabemos que: Dividendo = Divisor×Cociente

$$3x^3 + 7x^2 - 4 = (3x^2 + 4x - 4)(x + 1)$$

3x ⟶ -2

x ⟶ +2

$$= (3x - 2)(x + 2)(x + 1)$$

$$\therefore \boxed{3x^3 + 7x^2 - 4 = (3x - 2)(x + 2)(x + 1)}$$

Ejemplo 2: Factorizar: $30x^3 + 19x^2 - 1$

Resolución:

1) Los posibles valores que anulan el polinomio $30x^3 + 19x^2 - 1$

Son los divisores de: $\frac{1}{30}$ $\Rightarrow$ divisores de 1: ±1

$\Rightarrow$ divisores de 30: ±1; ±2; ±3; ±5; ±6; ±10; ±15; ±30

Luego los posibles valores son: ±1; ± 1/2; ± 1/3; 1/5; ± 1/6; ± 1/10; ±1/15 y ± 1/30

2) Probando con: $\boxed{x = 1} \Rightarrow 30x^3 + 19x^2 - 1 = 30(1)^3 + 19(1)^2 - 1 = 48 \neq 0$

$\therefore$ (x - 1) No es factor del polinomio

Probando con: $\boxed{x = -1} \Rightarrow 30x^3 + 19x^2 - 1 = 30(-1)^3 + 19(-1)^2 - 1$

$$= 30(-1) + 19(1)^2 - 1 = -12 \neq 0$$

$\therefore$ (x + 1) No es factor del polinomio

Probando con: $\boxed{x = -\frac{1}{2}} \Rightarrow 30x^3 + 19x^2 - 1 = 30\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 19\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1$

$$= 30\left(-\frac{1}{8}\right) + 19\left(\frac{1}{4}\right) - 1$$

$$30x^3 + 19x^2 - 1 = -15/4 + 19/4 - 1 = 0$$

∴ **Si es factor del polinomio**

3) Dividimos el polinomio: $30x^3 + 19x^2 - 1$ entre

Ordenamos y completamos el polinomio; osea: $30x^3 + 19x^2 + 0x - 1$

Aplicando Ruffini, obtenemos:

	30	+19	0	-1
-1/2	↓	-15	-2	+1
	30	+4	-2	0

Divisor → **Divisor = $30x^2 + 4x - 2$**

Sabemos que: Dividendo = Divisor×Cociente

$$30x^3 + 19x^2 - 1 = (30x^2 + 4x - 2)(x + 1/2)$$

Sacamos factor común 2 — **Damos común denominador**

$$= 2(15x^2 + 2x - 1)$$

$$= (15x^2 + 2x - 1)(2x + 1)$$

3x ↗ +1

5x ↘ -1

∴ $30x^3 + 19x^2 - 1 = (3x + 1)(5x - 1)(2x + 1)$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 49

Factorizar los polinomios siguientes:

1) $x^3 + 6x - 7$	3) $9x^3 + 3x^2 - 24x + 12$	5) $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$
2) $x^3 - 8x^2 + 17x - 10$	4) $2x^3 - 16x^2 + 34x - 20$	6) $2x^3 + 3x + 5$

Factorizar los polinomios siguientes:

1) $x^3 + 6x - 7$	3) $9x^3 + 3x^2 - 24x + 12$	5) $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$
2) $x^3 - 8x^2 + 17x - 10$	4) $2x^3 - 16x^2 + 34x - 20$	6) $2x^3 + 3x + 5$

RESPUESTAS TALLER

1) $(x - 1)(x^2 + x + 7)$	3) $3(x - 1)(x + 2)(3x - 2)$	5) $(x - 1)(x + 2)(2x + 1)$
2) $(x - 1)(x - 2)(x - 5)$	4) $2(x - 1)(x - 2)(x - 5)$	6) $(x + 1)(2x^2 - 2x + 5)$





EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE FACTORIZACIÓN



NIVEL I

Ejercicio 1: Factorizar: $a^4 + a^3 - a^2 - a$; indicar un factor obtenido.

A) $a^3 - 1$ **B)** $a^2 + a + 1$ **C)** $a^2 + 1$
D) $a - 1$ **E)** $a^2 - a - 1$

Ejercicio 2: Factorizar:

$8x^2 - 6ax - 12bx + 9ab$ e indicar un factor primo.

A) $2x - a$ **B)** $2x + b$ **C)** $4x - 3a$
D) $4x - b$ **E)** $2x - 3a$

Ejercicio 3: Al factorizar:

$3am + 3bm - 3an - 3bn$; uno de los factores obtenidos es:

A) $3a + 3n$ **B)** $a + n$ **C)** $m + n$
D) $a - b$ **E)** $3a + 3b$

Ejercicio 4: Indicar un factor de:

$$ac + ad - acd - bc - bd + bcd$$

A) $b - c$ **B)** $c - d$ **C)** $a - b$
D) $1 - a$ **E)** $a - c$

Ejercicio 5: Factorizar: $x^6 - y^6$ e indicar un factor primo.

A) $x^2 - xy - y^2$ **B)** $x^2 - y$ **C)** $x^2 + y^2$
D) $x^2 + xy + y^2$ **E)** $x^2 + xy - y^2$

Ejercicio 6: Señale el factor primo de mayor grado contenido en:

$$P_{(x;y)} = x^2 + x^4y^2 - y^4 - x^2y^6$$

A) $x + y^2$ **B)** $x^2 - y$ **C)** $x - y^2$
D) $x^2 + y^4$ **E)** $1 + x^2y^2$

Ejercicio 7: Señale la suma de factores primos de: $6x^2 - 7x - 3$

A) $5x - 2$ **B)** $6x + 3$ **C)** $7x - 1$
D) $5x - 3$ **E)** $6x + 5$

Ejercicio 8 : Señale el factor primo trinomio de:

$$(a^2 - b^2)(a - c) + (a^2 - c^2)(a - b)$$

A) $a + 2b + c$ **B)** $a + b + 2c$
C) $2a + b + c$ **D)** $a + b - c$
E) $a + b + c$

Ejercicio 9 : Factorizar:

$$a^2 - 2ab + b^2 - ac + bc$$

A) $(a + b)(a + b + c)$
B) $(a + b - c)(a + b)$
C) $(a - b)(a + b - c)$
D) $(a - b)(a - b - c)$
E) $(a - b - c)(a - c)$

Ejercicio 10 : Factorizar:

$a^2b^2c^2 + ab^2c + abc^2 + bc$ y señalar un factor primo binomio.

A) $bc + 1$ **B)** $a^2 + 1$ **C)** $b^2 + 1$
D) $ac + 1$ **E)** $c + 1$

Ejercicio 11 : Identifique un factor primo de:

$$2a^6b - 4a^4b^3 + 2a^2b^5$$

A) $a^2 - b$ **B)** $a - b^2$ **C)** $a - b$
D) $a - 2b$ **E)** $2a - b$

Ejercicio 12 : Señale el factor primo trinomio de:

$$(a^2 - b^2)(a - c) + (a^2 - c^2)(a - b)$$

A) $a + 2b + c$ **B)** $a + b + 2c$
C) $2a + b + c$ **D)** $a + b + c$
E) $a + b - c$

Ejercicio 13 : Factorizar:

$$a^2 - 2ab + b^2 - ac + bc$$

A) $(a + b)(a + b + c)$
B) $(a + b - c)(a + b)$
C) $(a - b)(a + b - c)$
D) $(a - b)(a - b - c)$
E) $(a - b - c)(a - c)$

Ejercicio 14 : Un factor primo de:

$$ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2);\ \text{es:}$$

A) $a + b$ **B)** $x + y$ **C)** $a + x$
D) $b + y$ **E)** $ax + by$

Clave de Respuestas

1. D	2. C	3. E	4. C
5. D	6. E	7. A	8. C
9. D	10. D	11. C	12. C
13. D	14. E		

NIVEL II

Ejercicio 1 : Factorizar:

$4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$; indicar un factor.

A) $a + b$ **B)** $a + b + c$
C) $2a + b - c$ **D)** $2a + b + c$
E) $2a - b - c$

Ejercicio 2 : Al factorizar:

$F_{(x)} = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^2 - x^4$; uno de sus factores primos tiene como suma de coeficientes a:

A) 6 **B)** 8 **C)** 3 **D)** 5 **E)** 4

Ejercicio 3 : Indique un factor de:

$$abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab$$

A) $ax + b$ B) $ax - b$ C) $bx + a$
D) $x - 1$ E) $x - a$

Ejercicio 4 : El número de factores primos de:

$$x^7 + y^3x^4 - y^4x^3 - y^7; \text{ es:}$$

A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 6

Ejercicio 5 : Factorizar:

$$a^2b - ab^2 + b^2c - bc^2 - a^2c + ac^2$$

Indicar uno de sus factores.

A) $a + b$ B) $b + c$ C) $c - b$
D) $a - b$ E) $b - a$

Ejercicio 6 : Factorizar:

$x^4a + x^4y - z^4a - z^4y$; e indicar un factor primo.

A) $x^4 + a$ B) $x^2 + y^2$ C) $a + y$
D) $x^2 + a^2$ E) $x + a$

Ejercicio 7 : Identifique un factor primo de:

$$2a^6b - 4a^4b^3 + 2a^2b^5$$

A) $a^2 - b$ B) $a - b^2$ C) $a - b$
D) $a - 2b$ E) $2a - b$

Ejercicio 8 : Indicar el producto de los coeficientes de uno de los factores de:

$$(4x + 1)(12x + 1)(3x + 1)(2x + 1) - 36$$

A) 42 B) 420 C) 500
D) 70 E) 700

Ejercicio 9 : Factorizar: $a^4 + 4$, proporcionar luego la suma de coeficientes de un factor primo.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Ejercicio 10 : ¿Cuál es el factor primo que se repite en:

$$(x^2 - 1)(x + 2)(x + 3) + (x^2 - 1)(x + 4) + 1 - x^2$$

A) $x + 1$ B) x C) $x - 1$
D) $x + 2$ E) $x + 3$

Ejercicio 11 : Hallar el producto de coeficientes de un factor primo de:

$$9x^4 + 8x^2y^2 + 4y^4$$

A) 18 B) 20 C) 15 D) 12 E) 24

Ejercicio 12 : Señale un factor de:

$$(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) - 15$$

A) $x^2 - 5x + 1$ B) $x^2 - 5x - 1$
C) $x^2 + 5x + 9$ D) $x^2 - 5x - 9$
E) $x^2 + 5x - 1$

Ejercicio 13 : Calcular la suma de los factores primos de:

$$P_{(x)} = x^3 + 5x^2 - 33x + 27$$

A) $3x + 5$ B) $3x - 1$ C) $3x + 7$
D) $3x + 4$ E) $3x$

Ejercicio 14 : Indique el binomio que es factor primo de:

$$q_{(x)} = x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 34x - 24$$

A) $x - 1$ B) $x - 2$ C) $x + 3$
D) $x + 4$ E) $x - 6$

RESPUESTAS TALLER

Clave de Respuestas

1. B	2. A	3. B	4. C	5. D	6. C	7. C
8. B	9. D	10. E	11. D	12. A	13. A	14. D



EJERCICIOS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA
Organizados por las Academias:
César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa.

1. ¿Cuántos factores de primer grado tiene el polinomio?

$$x^2y + xy^2 + x^2 + y^2 + 2xy + x + y$$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 0 e) 4

Resolución:

Agrupamos términos de la manera siguiente:

$$(x^2y + xy^2) + (x^2 + 2xy + y^2) + (x + y)$$

$$xy(x + y) + (x + y)^2 + (x + y)$$ **; sacamos factor común: $(x + y)$**

$$(x + y)[xy + (x + y) + 1] = (x + y)[xy + x + y + 1]$$

$$= (x + y)\,[x\,(y + 1) + (y + 1)]$$

Sacamos factor común: $(y + 1)$

$$x^2y + xy^2 + x^2 + y^2 + 2xy + x + y = (x + y)[(y + 1)(x + 1)]$$

∴ El polinomio, tiene 3 factores de primer grado ***Rpta. c***

2. Señalar un factor de: $(x + 2)^2 + (2x - 1)^2 - 10$

a) x - 2 b) 2x + 1 c) x - 3 d) x + 3 e) x - 1

Resolución:

Aplicando:

$(A + B)^2 + A^2 + 2AB + B^2$
$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

; obtenemos:

$x^2 + 2(x)(2) + 2^2 + (2x)^2 - 2(2x)(1) + 1^2 - 10$

$x^2 + \cancel{4x} + 4 + 4x^2 - \cancel{4x} + 1 - 10 = 5x^2 - 5$ — Sacamos factor común 5

$= \underline{5}(x^2 - 1)$

$= 5(x^2 - 1^2) =$ $\boxed{5(x + 1)(x - 1)}$

∴ Uno de los factores es: $(x - 1)$ ***Rpta. e***

3. Factorizar: $3(x - a)^2 - 4(x - a) + 1$; identificar un factor:

a) $x - a - 1$ b) $3x - 3a + 1$ c) $x + a + 1$ d) $x - a + 1$ e) $3x + 3a + 1$

Resolución:

Factorizamos la expresión dado; por el **Método del Aspa**, veamos:

$3(x - a)^2 - 4(x - a) + 1 = [3(x - a) - 1][(x - a) - 1]$

$3(x - a) \quad -1$

$(x - a) \quad -1$

$3(x - a)^2 - 4(x - a) + 1 =$ $\boxed{(3x - 3a - 1)(x - a - 1)}$

∴ Uno de los factores es: $(x - a - 1)$ ***Rpta. a***

4. Factorizar: $(xy - x)^3 - (y - 1)^3$; indicar el factor primo de mayor grado.

a) $x^2 + x + 1$ b) $x^2 + x - 1$ c) $x^2 + 1$ d) $x^2 + y$ e) $y^2 + y + 1$

Resolución:

Recuerda que:

- $(A.B)^n = A^n.B^n$
- $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$

$(xy - x)^3 - (y - 1)^3 = [x(y - 1)]^3 - (y - 1)^3$

$= x^3(y - 1)^3 - (y - 1)^3$

$= (y - 1)^3[x^3 - 1]$

$= (y - 1)^3[x^3 - 1^3] = (y - 1)^3 (x - 1)(x^2 + x + 1)$

$= (y - 1)^3 (x - 1)(x^2 + x + 1)$

- $(x^2 + x + 1)$: ***factor primo de mayor grado***
- $(x - 1)$: ***factor primo***
- $(y - 1)$: ***factor primo***

∴ El factor primo de mayor grado es: $(x^2 + x + 1)$ ***Rpta. a***

5. Factorizar e indicar un factor: $2(x^2 - 2x + 3)^2 + 5(x^2 - 2x) + 3$

a) $2x^2 - 2x + 3$ b) $x^2 - 2x - 7$ c) $x^2 - 2x + 2$

d) $2x^2 - 4x + 3$ e) $x^2 - 2x + 5$

Resolución:

• **Haciendo:** $\boxed{x^2 - 2x = a}$; obtenemos:

$$2(a + 3)^2 + 5(a) + 3 = 2(a^2 + 6a + 9) + 5a + 3$$

$$= 2a^2 + 12a + 18 + 5a + 3$$

$$= 2a^2 + 17a + 21 = (2a + 3)(a + 7)$$

$$\begin{array}{ll} 2a & +3 \\ a & +7 \end{array}$$

$$= [2(x^2 - 2x) + 3][x^2 - 2x + 7]$$

$$= \boxed{[2x^2 - 4x + 3][x^2 - 2x + 7]}$$

∴ $\boxed{\text{Uno de los factores es: } (2x^2 - 4x + 3)}$ ***Rpta. d***

6. Factorizar e indicar un factor: $x^3 - 2x^2y - xy^2 + 2y^3$

a) $x + 2y$ b) $y - 2x$ c) $x - y$ d) $2x + y$ e) $x^2 + y^2$

Resolución:

$$x^3 - 2x^2y - xy^2 + 2y^3 = x^2(x - 2y) - y^2(x - 2y)$$

$$= x^2(x - 2y) - y^2(x - 2y)$$

$$= (x - 2y)(x^2 - y^2)$$

$$= \boxed{(x - 2y)(x + y)(x - y)}$$

∴ $\boxed{\text{Uno de los factores es: } (x - y)}$ ***Rpta. c***

7. El polinomio: $(x^2 + 4x + 2)(x^2 + 4x + 6) + 4$, se puede factorizar como: $a(x + 2)^t$; entonces: $(a + t)$; es:

a) 7 b) 6 c) 2 d) 4 e) 5

Resolución:

En la expresión: $(x^2 + 4x + 2)(x^2 + 4x + 6) + 4$; **haciendo:** $\boxed{x^2 + 4x = a}$;

obtenemos: $(a + 2)(a + 6) + 4 = a^2 + 8a + 12 + 4$

$$(a + 2)(a + 6) + 4 = a^2 + 8a + 12 + 4$$

$$= a^2 + 8a + 16 = (a + 4)(a + 4) = (a + 4)^2$$

a ⟶ +4

a ⟶ +4

$$= [x^2 + 4x + 4]^2$$

$$= [(x + 2)^2]^2$$

$$= (x + 2)^4$$

Por condición: $1(x + 2)^{④} = a(x + 2)^{①}$

Por comparación de términos: $\boxed{a = 1}$; $\boxed{t = 4}$

$\therefore$ $\boxed{a + t = 1 + 4 = 5}$ ***Rpta. e***

8. Un factor primo de: $xyz^2 (xy + 2z) + (z^2 + w) (z^2 - w)$; es:

a) $x^2 + y^2$ b) $z^2 + xy - z$ c) $x^2 + yz - x$

d) $x + y + z$ e) $z^2 + xyz - w$

Resolución:

$$xyz^2(xy + 2z) + (z^2 + w)(z^2 - w) = x^2y^2z^2 + 2xyz^3 + [(z^2)^2 - w^2]$$

$$= (xyz)^2 + 2xyz^3 + z^4 - w^2$$

xyz ⟶ $+z^2$

xyz ⟶ $+z^2$

$$= (xyz + z^2)(xyz + z^2) - w^2$$

$$= (xyz + z^2)^2 - w^2$$

$$= (xyz + z^2 + w)(xyz + z^2 - w)$$

$\therefore$ $\boxed{\text{Uno de los factores es: } xyz + z^2 - w = (z^2 + xyz - w)}$ ***Rpta. e***

9. Señale el factor primo repetido de: $x^6 + x^4 - x^2 - 1$

a) $x + 1$ b) $x - 1$ c) $x^2 + 1$ d) $x^2 + 2$ e) x

Resolución:

$x^6 + x^4 - x^2 - 1 = x^4(x^2 + 1) - (x^2 + 1)$; **sacamos factor común: "$(x^2 + 1)$"**

$$= x^4(x^2 + 1) - (x^2 + 1)$$

$$= (x^2 + 1)(x^4 - 1)$$

$$x^6 + x^4 - x^2 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 + 1)(x^2 - 1)$$

$$= (x^2 + 1)^2(x + 1)(x - 1)$$

$\therefore$ El factor primo repetido es: $(x^2 + 1)$ **Rpta. c**

10. Factorizar: $ab^2 + d(c - b) - abc$; reconociendo uno de sus factores.

a) $ac - d$ b) $d - ab$ c) $b + c$ d) $d + ab$ e) $ac + b$

Resolución:

$$ab^2 + d(c - b) - abc = ab^2 + dc - bd - abc$$

$$= ab(b - c) + d(c - b)$$

$$= ab(b - c) - d(b - c)$$

$$= (b - c)(ab - d)$$; **cambiamos de signos a los términos de los dos factores.**

$$= (c - b)(d - ab)$$

> *Nota:*
>
> *Si cambio de signo a los términos del primer factor, también tendrán que cambiarse los signos del segundo factor.*

$\therefore$ Uno de los factores es: $(d - ab)$ **Rpta. b**

11. Si se factoriza: $(a + 1)(a^2 - a + 1) + (b - 1)(b^2 + b + 1) + 3ab(a + b) + 1$
Uno de sus factores es:

a) $a^2 + b^2 + 2ab - a - b + 1$ b) $a^2 + b^2 - 2ab - a - b - 1$

c) $a^2 - b^2 - 2ab - a - b - 1$ d) $a^2 - b^2 - 2ab + a - b - 1$

e) $a^2 + b^2 + 2ab - a + b - 1$

Resolución:

$$(a + 1)(a^2 - a + 1) + (b - 1)(b^2 + b + 1) + 3ab(a + b) + 1$$

$$(a^3 + \cancel{1}) + (b^3 - \cancel{1}) + 3a^2b + 3ab^2 + 1$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 1 = (a + b)^3 + 1^3$$

$$= [(a + b) + 1][(a + b)^2 - (a + b) + 1]$$

$$= (a + b + 1)(a^2 + 2ab + b^2 - a - b + 1)$$

$\therefore$ Uno de los factores es: $(a^2 + b^2 + 2ab - a - b + 1)$ **Rpta. a**

3.7. Expresiones Algebraicas Fraccionarias. Simplificación:

3.7.1. Simplificación de Expresiones Algebraicas:

Existen infinitas expresiones algebraicas equivalentes a una dada. Para obtener una expresión algebraica equivalente a una dada se aplica la siguiente:

> ***Propiedad fundamental:***
> *Si ambos términos de una expresión algebraica fraccionaria se multiplican o dividen por un mismo polinomio, se obtiene otra expresión algebraica equivalente a la dada.*

Ejemplos:

a) $\dfrac{x-1}{x+2} \sim \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x+2)(x+2)} \sim \dfrac{x^2+x-2}{x^2+4x+4}$ ➧ (***Son expresiones algebraicas fraccionarias equivalentes.***)

b) $\dfrac{x^2+6x+9}{x^2-9} \sim \dfrac{\left(x^2+6x+9\right):(x+3)}{\left(x^2-9\right):(x+3)} \sim \dfrac{x+3}{x-3}$ ➧ (***Son expresiones algebraicas fraccionarias equivalentes.***)

* Cuando se dividen ambos términos de una fracción algebraica por un mismo polinomio se dice que la fracción **se ha simplificado.**

Para simplificar expresiones algebraicas fraccionarias se procede de la misma forma que para simplificar números.

Por ejemplo: Simplificar: $\dfrac{32}{12}$

Se divide el numerador y el denominador por un mismo número **distinto de cero.**

a) dividimos ambos términos entre el **M.C.D.** de 32 y 12.

- Por divisiones sucesivas hallaremos el **M.C.D.** de los términos de la fracción 32/12. Veamos:

	2	1	2	
32	12	8	(4)	⇒ **M.C.D.**
8	4	0		

- Al dividir entre (4), ambos términos de la fracción, obtenemos:

$$\frac{32}{12}=\frac{32:4}{12:4}=\frac{8}{3} \Rightarrow \therefore \boxed{\frac{32}{12}=\frac{8}{3}}$$

b) También podemos descomponer cada número en sus factores primos y cancelar los factores comunes.

$$\frac{32}{12}=\frac{\cancel{2}.\cancel{2}.2.2.2}{\cancel{2}.\cancel{2}.3}=\frac{8}{3} \Rightarrow \therefore \boxed{\frac{32}{12}=\frac{8}{3}}$$

• Para simplificar fracciones algebraicas se procede en forma análoga.

a) Se divide el numerador y el denominador por el **M.C.D.**, de ambos términos, o bien

b) Se factoriza ambos términos y se cancelan los factores comunes.

* El segundo procedimiento resulta más conveniente y es el que usaremos.

* El primer procedimiento se utiliza cuando no se conoce la forma de factorizar el numerador y el denominador.

Ejemplo 1: Simplifica: $\dfrac{4x^2+16x+16}{2x^2-8}$

Resolución:

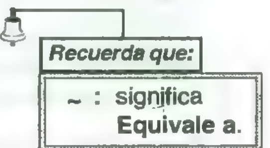
- Factorizamos el numerador y el denominador:

i) $4x^2+16x+16=4(x^2+4x+4)=4(x+2)^2=\boxed{4(x+2)(x+2)}$

ii) $2x^2-8=2(x^2-4)=2(x^2-2^2)=\boxed{2(x+2)(x-2)}$

- Entonces sustituimos y cancelamos los factores comunes del numerador y del denominador.

$$\frac{4x^2+16x+16}{2x^2-8}=\frac{\cancel{4}\cancel{(x+2)}(x+2)}{\cancel{2}\cancel{(x+2)}(x-2)}=\frac{2(x+2)}{(x-2)}$$



Luego; estas expresiones:

$\boxed{\dfrac{4x^2+16x+16}{2x^2-8}\sim\dfrac{2(x+2)}{x-2}}$; son equivalentes pero no iguales.

Ejemplo 2: Simplifica: $\dfrac{x^3-4x}{x^3+2x^2}$

Resolución:

- Factorizamos el numerador y denominador:

i) $x^3-4x=x(x^2-4)=x(x^2-2^2)=\boxed{x(x+2)(x-2)}$

ii) $x^3+2x^2=\boxed{x^2(x+2)}$

- Entonces sustituimos y cancelamos los factores comunes del numerador y denominador.

$$\frac{x^3-4x}{x^3+2x^2}=\frac{\cancel{x}\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{x^2}\cancel{(x+2)}}=\frac{x-2}{x}$$

Luego; estas expresiones:

$$\frac{x^3-4x}{x^3+2x^2} \sim \frac{x-2}{x}$$; **son equivalentes pero no iguales.**

Ejemplo 3: Simplifica: $\dfrac{x^2-6x+9}{5x-15}$

Resolución:

- Factorizamos el numerador y denominador:

i) $x^2 - 6x + 9 = \boxed{(x-3)(x-3)}$ **ii)** $5x - 15 = \boxed{5(x-3)}$

- Entonces sustituimos y cancelamos los factores comunes del numerador y denominador.

$$\frac{x^2-6x+9}{5x-15} = \frac{(x-3)\cancel{(x-3)}}{5\cancel{(x-3)}} = \frac{x-3}{5} \Rightarrow \therefore \boxed{\frac{x^2-6x+9}{5x-15} \sim \frac{x-3}{5}}$$

Ejemplo 4: Simplifica: $\dfrac{x^3-3x^2+x-3}{2x^2+2}$

Resolución:

- Factorizamos el numerador y denominador:

i) $x^3 - 3x^2 + x - 3 = x^2(x-3) + (x-3) = \boxed{(x-3)(x^2+1)}$

ii) $2x^2 + 2 = \boxed{2(x^2+1)}$

- Entonces sustituimos y cancelamos los factores comunes del numerador y denominador.

$$\frac{x^3-3x^2+x-3}{2x^2+2} = \frac{(x-3)\cancel{(x^2+1)}}{2\cancel{(x^2+1)}} = \frac{x-3}{2} \Rightarrow \therefore \boxed{\frac{x^3-3x^2+x-3}{2x^2+2} \sim \frac{x-3}{2}}$$

3.7.2. Adición de expresiones algebraicas racionales.

La adición de expresiones algebraicas racionales se define de la misma manera que la adición de números racionales.

Números Racionales	Expresiones Algebraicas Racionales
$\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{a.d+b.c}{b.d}$	$\dfrac{A}{B}+\dfrac{C}{D}=\dfrac{A.D+B.C}{B.D}$



I. Adición de Fracciones Algebraicas de Igual Denominador.

- Las fracciones tienen igual numerador:	$\dfrac{x+4}{x^2-1}+\dfrac{x-2}{x^2-1}$
- Se suman los numeradores. Se escribe el mismo denominador.	$=\dfrac{(x+4)+(x-2)}{x^2-1}=\dfrac{2x+2}{x^2-1}$
- Se factoriza el numerador y el denominador	$=\dfrac{2(x+1)}{(x+1)(x-1)}$
- Se simplifica.	$=\dfrac{2}{x-1}$

Recuerda que: *Cada vez que realices una operación debes verificar*

1º) Si cada término se puede simplificar.

2º) Si el resultado se puede simplificar.



II. Adición de Fracciones Algebraicas de distinto denominador.

Para sumar dos o más fracciones con distintos denominadores, se procede de la siguiente manera:

1º) Se simplifica cada fracción dada, si fuera posible.

2º) Se halla el mínimo común múltiplo **(m.c.m)** de los denominadores.

3º) Se divide el **m.c.m.** Hallado entre cada uno de los denominadores y el resultado se multiplica por el respectivo numerador.

4º) Se reducen los términos semejantes en el numerador y en el denominador.

5º) Se simplifica la fracción resultante, si fuera posible.

Ejemplo 1: Sumar: $\dfrac{x}{x^2-4}+\dfrac{2}{x^2+4x+4}$

Resolución:

- Factorizamos los denominadores; obteniendo:

$$\frac{x}{\underline{(x+2)}\,\underline{(x-2)}}+\frac{2}{\underline{(x+2)^2}}$$

Factorizamos:
$x^2-4=x^2-2^2=(x+2)(x-2)$
$x^2+4x+4=(x+2)^2$

- Hallamos el **m.c.m.** de los denominadores, siendo este el factor común $(x+2)$ con su mayor exponente multiplicado con el factor no común $(x-2)$. Osea: **M.C.M** $=(x+2)^2(x-2)$

$$\frac{x}{(x+2)(x-2)}+\frac{2}{(x+2)^2}=\frac{x(x+2)+2(x-2)}{(x+2)^2(x-2)}$$

$$=\frac{x^2+2x+2x-4}{(x+2)^2(x-2)}=\boxed{\frac{x^2+4x-4}{(x+2)^2(x-2)}}\ \textit{Rpta.}$$

Ejemplo 2: Sumar: $\frac{5}{x-1}+\frac{2x}{3x-3}$

Resolución:

$$\frac{5}{x-1}+\frac{2x}{3x-3}=\frac{5}{(x-1)}+\frac{2x}{3(x-1)}$$

- Hallamos el **m.c.m.** de los denominadores; siendo este: $\boxed{3(x-1)}$

$$\frac{5}{x-1}+\frac{2x}{3x-3}=\frac{5.3+2x}{3(x-1)}=\boxed{\frac{15+2x}{3(x-1)}}\ \textit{Rpta.}$$

Ejemplo 3: Sumar: $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}$

Resolución:

$$\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}=\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}$$

Recuerda que:

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{A.D+B.C}{B.D}$$

$$=\frac{(x^2+2x+1)+(x^2-2x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{2x^2+2}{(x-1)(x+1)}=\boxed{\frac{2(x^2+1)}{(x-1)(x+1)}}$$

Rpta.

Ejemplo 4: Sumar: $\frac{-2}{a-2}+\frac{12a-5a^2-4}{a^2-4a+4}$

Resolución:

$$\frac{-2}{(a-2)}+\frac{(12a-5a^2-4)}{(a^2-4a+4)}=\frac{-2}{(a-2)}-\frac{(5a^2-12a+4)}{(a^2-4a+4)}$$

Factorizamos:

$5a^2 - 12a + 4 = (5a - 2)(a - 2)$

5a -2

a -2

$$=\frac{-2}{(a-2)}-\frac{(5a-2)(a-2)}{(a-2)(a-2)}$$

$$=\frac{-2}{(a-2)}-\frac{(5a-2)}{(a-2)}$$

$$=\frac{-2-(5a-2)}{(a-2)}=\frac{-2-5a+2}{a-2}$$

Factorizamos:

$a^2 - 4a + 4 = (a - 2)(a - 2)$

a   -2

a   -2

$$\frac{-2}{(a-2)} + \frac{\left(12a - 5a^2 - 4\right)}{\left(a^2 - 4a + 4\right)} = \frac{-5a}{a-2} = \boxed{\frac{5a}{2-a}}$$

Rpta.

Ejemplo 5: Sumar: $\dfrac{2xy}{x-y} + \dfrac{3y^3}{x^2 - y^2} + \dfrac{4xy}{x+y}$

Resolución:

- Damos común denominador, siendo en este caso el producto de los términos no comunes osea: (x + y)(x - y)

$$\frac{2xy}{x-y} + \frac{3y^2}{x^2-y^2} + \frac{4xy}{x+y} = \frac{2xy(x+y) + 3y^2 + 4xy(x-y)}{(x+y)(x-y)}$$

$$= \frac{2x^2y + 2xy^2 + 3y^2 + 4x^2y - 4xy^2}{(x+y)(x-y)}$$

$$= \frac{6x^2y - 2xy^2 + 3y^3}{(x+y)(x-y)} = \boxed{\frac{y\left(6x^2 - 2xy + 3y^2\right)}{(x+y)(x-y)}}$$

Rpta.

3.7.3. Sustracción de Expresiones Algebraicas Racionales.



1. Sustracción de Fracciones que tienen igual denominador.

Para restar una fracción de otra fracción y teniendo ambas igual denominador se busca la diferencia entre sus numeradores, dejando el mismo denominador.

Ejemplo 1:

De: $\dfrac{3y}{2x^2}$ restar $\dfrac{5y}{2x^2}$

Resolución:

$$\frac{3y}{2x^2} - \frac{5y}{2x^2} = \frac{3y - 5y}{2x^2}$$

Ejemplo 2:

De: $\dfrac{2z}{3y^3}$ restar $\dfrac{z^2}{3y^3}$

Resolución:

$$\frac{2z}{3y^3} - \frac{z^2}{3y^3} = \frac{2z - z^2}{3y^3}$$

- **El Signo Negativo delante de una fracción:** Cuando delante de una fracción algebraica hay el signo - ; este signo afecta a todos los términos del numerador osea al efectuar la resta se cambian los signos en el numerador.

Ejemplo:

$$\frac{3x-1}{y+3} - \frac{x-2}{y+3} = \frac{(3x-1)-(x-2)}{y+3} = \frac{3x - 1 - x + 2}{y+3} = \boxed{\frac{2x+1}{y+3}}$$

II. Sustracción de fracciones algebraicas de distinto denominador.

Para restar una fracción de otra que tienen distinto denominador, se procede de la siguiente manera:

1º) Se simplifica cada fracción dada, si fuera posible.
2º) Se halla el **m.c.m.** de los denominadores.
3º) Se divide el **m.c.m.** Hallado entre cada uno de los denominadores y el resutaldo se multiplica por el respectivo numerador.
4º) Se reducen los términos semejantes en el numerador y en el denominador.
5º) Se simplifica la fracción resultante, si fuera posible.

Ejemplo 1: Restar:

$$\frac{x-2y}{x+y}-\frac{xy+3y^2}{x^2+2xy+y^2}$$

Resolución:

$$\frac{x-2y}{x+y}-\frac{xy+3y^2}{x^2+2xy+y^2}=\frac{(x-2y)}{(x+y)}-\frac{y(x+3y)}{(x+y)^2}$$

- Hallamos el **m.c.m.** de los denominadores, siendo el término común con su mayor exponente; osea: $\boxed{(x+y)^2}$:

$$\frac{x-2y}{x+y}-\frac{xy+3y^2}{x^2+2xy+y^2}=\frac{(x-2y)(x+y)-y(x+3y)}{(x+y)^2}$$

$$=\frac{x^2+\cancel{xy}-2xy-2y^2-\cancel{xy}-3y^2}{(x+y)^2}$$

$$=\boxed{\frac{x^2-2xy-5y^2}{(x+y)^2}}\ \textit{Rpta.}$$

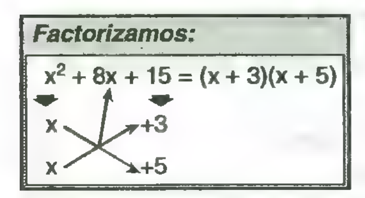
Ejemplo 2: Restar: $\dfrac{x+2}{x^2+8x+15}-\dfrac{x-3}{x^2-2x-15}$

Resolución:

$$\frac{x+2}{x^2+8x+15}-\frac{x-3}{x^2-2x-15}=\frac{(x+2)}{(x+3)(x+5)}-\frac{(x-3)}{(x-5)(x+3)}$$

- Hallamos el **m.c.m.** de los denominadores, siendo este:

$$\boxed{(x+3)(x+5)(x-5)}$$



$$= \frac{(x+2)(x-5)-(x-3)(x+5)}{(x+3)(x+5)(x-5)}$$

$$= \frac{\left(x^2-5x+2x-10\right)-\left(x^2+5x-3x-15\right)}{(x+3)(x+5)(x-5)}$$

$$= \frac{\left(x^2-3x-10\right)-\left(x^2+2x-15\right)}{(x+3)(x+5)(x-5)}$$

Factorizamos:

$x^2 - 2x - 15 = (x + 3)(x - 5)$

x +3

x -5

$$= \frac{\cancel{x^2}-3x-10-\cancel{x^2}-2x+15}{(x+3)(x+5)(x-5)}$$

$$= \frac{-5x+5}{(x+3)(x+5)(x-5)} = \boxed{\frac{-5(x-1)}{(x+3)(x+5)(x-5)}}$$

Rpta.

3.7.4. Multiplicación de Expresiones Algebraicas Racionales.

La multiplicación de expresiones algebraicas fraccionarias se define en forma análoga a la multiplicación de números racionales.



Números Racionales	Expresiones Algebraicas Racionales
$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a.c}{b.d}$	$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A.C}{B.D}$

Ejemplo 1: Efectuar: $\frac{x-1}{x^2-4}\cdot\frac{x+2}{x-1}$

Resolución:

$$\frac{x-1}{x^2-4}\cdot\frac{x+2}{x-1} = \frac{(x-1)(x+2)}{\left(x^2-4\right)(x-1)}$$

Factorizamos:

$x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x + 2)(x - 2)$

$$= \frac{\cancel{(x-1)}\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(x-2)\cancel{(x-1)}}$$; Simplificando, obtenemos:

$$= \boxed{\frac{1}{x-2}}$$

Ejemplo 2: Efectuar: $\frac{15x-30}{2x}\cdot\frac{3x}{5x-10}$

Resolución:

$$\frac{15x-30}{2x}\cdot\frac{3x}{5x-10} = \frac{(15x-30).3x}{2x(5x-10)}$$

Factorizamos:

$15x - 30 = 15(x - 2)$

$5x - 10 = 5(x - 2)$

$$\frac{15x-30}{2x}\cdot\frac{3x}{5x-10}=\frac{15(x-2).3x}{2x.5(x-2)}$$; Simplificando, obtenemos:

$$=\frac{3.3x}{2x}=\boxed{\frac{9}{2}}$$ ***Rpta.***

Ejemplo 3: Efectuar: $\frac{5a+5}{2a^2+4a+2}\cdot\frac{2a^2-2}{10(a^2-1)}$

Resolución:

$$\frac{5a+5}{2a^2+4a+2}\cdot\frac{2a^2-2}{10(a^2-1)}=\frac{5(a+1)[2(a^2-1)]}{2(a^2+2a+1)[10(a^2-1)]}$$

$$=\frac{5(a+1)}{10(a^2+2a+1)}$$

Factorizamos:

$a^2+2a+1=(a+1)(a+1)$

$$=\frac{(a+1)}{2(a+1)(a+1)}=\boxed{\frac{1}{2(a+1)}}$$ ***Rpta.***

3.7.5. División de Expresiones Algebraicas Racionales.

Para dividir una expresión algebraica racional por otra se multiplica la primera por la inversa de la segunda.

$$\boxed{\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}}$$

Ejemplo 1: Efectuar: $\frac{x-1}{x^2-4}:\frac{x+1}{x+2}$

Resolución:

$$\frac{x-1}{x^2-4}:\frac{x+1}{x+2}=\frac{(x-1)}{(x+2)(x-2)}\cdot\frac{(x+2)}{(x+1)}$$

Factorizamos:

$x^2-4=x^2-2^2=(x+2)(x-2)$

$$=\boxed{\frac{(x-1)}{(x-2)(x+1)}}$$ ***Rpta.***

Ejemplo 2: Efectuar: $\frac{x^2+10x+16}{x^2+9x+20}:\frac{x^2+9x+8}{x^2+6x+5}$

Resolución:

$$\frac{x^2+10x+16}{x^2+9x+20}:\frac{x^2+9x+8}{x^2+6x+5}=\frac{(x^2+10x+16)}{(x^2+9x+20)}\cdot\frac{(x^2+6x+5)}{(x^2+9x+8)}$$

Factorizamos:

$x^2 + 10x + 16 = (x + 8)(x + 2)$

$x^2 + 9x + 20 = (x + 4)(x + 5)$

$x^2 + 6x + 5 = (x + 1)(x + 5)$

$x^2 + 9x + 8 = (x + 1)(x + 8)$

$$= \frac{\cancel{(x+8)}(x+2)}{(x+4)\cancel{(x+5)}} \cdot \frac{\cancel{(x+1)}(x+5)}{\cancel{(x+1)}(x+8)}$$

$$= \boxed{\frac{x+2}{x+4}}$$ ***Rpta.***

Ejemplo 3: Efectuar: $\dfrac{36-a^2}{a^2-7a+12} : \dfrac{36+12a+a^2}{a^2-5a+6}$

Resolución:

$$\frac{36-a^2}{a^2-7a+12} : \frac{36+12a+a^2}{a^2-5a+6} = \frac{\left(36-a^2\right)}{\left(a^2-7a+12\right)} \cdot \frac{\left(a^2-5a+6\right)}{\left(36+12a+a^2\right)}$$

Factorizamos:

$36 - a^2 = 6^2 - a^2 = (6 + a)(6 - a)$

$a^2 - 7a + 12 = (a - 3)(a - 4)$

$a^2 - 5a + 6 = (a - 3)(a - 2)$

$36 + 12a + a^2 = (6 + a)(6 + a)$

$$= \frac{\cancel{(6+a)}(6-a)}{\cancel{(a-3)}(a-4)} \cdot \frac{\cancel{(a-3)}(a-2)}{\cancel{(6+a)}(6+a)}$$

$$= \boxed{\frac{(6-a)(a-2)}{(a-4)(6+a)}}$$ ***Rpta.***

3.7.6. Potenciación y Radicación:

La potenciacion y la radicación de expresiones algebraicas fraccionarias se resuelven aplicando la propiedad distributiva con respecto a la división

Potenciación	*Radicación*
$\left(\dfrac{P}{Q}\right)^n = \dfrac{P^n}{Q^n}$	$\sqrt[n]{\dfrac{P}{Q}} = \dfrac{\sqrt[n]{P}}{\sqrt[n]{Q}}$

Ejemplos:

a) $\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^2 = \dfrac{(x+3)^2}{(x-1)^2} = \boxed{\dfrac{x^2+6x+9}{x^2-2x+1}}$

b) $\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^3 = \dfrac{(x-1)^3}{x^3} = \boxed{\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3}}$

c) $\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{3}{x}\right)^2 = \left(\dfrac{x^2-9}{3x}\right)^2 = \dfrac{\left(x^2-9\right)^2}{(3x)^2} = \boxed{\dfrac{x^4-18x^2+81}{9x^2}}$

Ejemplos:

a) $\sqrt{\dfrac{x^2+2x+1}{4x^2}}=\dfrac{\sqrt{x^2+2x+1}}{\sqrt{4x^2}}=\dfrac{\sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt{2^2x^2}}=\boxed{\dfrac{x+1}{2x}}$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{x^2-2}{x^5-2x^3}}=\dfrac{\sqrt[3]{x^2-2}}{\sqrt[3]{x^5-2x^3}}=\dfrac{\sqrt[3]{x^2-2}}{\sqrt[3]{x^3(x^2-2)}}=\dfrac{\sqrt[3]{x^2-2}}{\sqrt[3]{x^3}\cdot\sqrt[3]{(x^2-2)}}=\boxed{\dfrac{1}{x}}$

c) $\sqrt{(x^2+1)^2-(x^2-1)^2}=\sqrt{(x^4+2x^2+1)-(x^4-2x^2+1)}=\sqrt{4x^2}$

$=\sqrt{4}.\sqrt{x^2}=\boxed{2x}$

• Operaciones Combinadas con Fracciones Algebraicas:

1. Efectuar: $\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{6}{x}+9\right):\dfrac{3x-1}{x}$

Resolución:

$$\left(\frac{1}{x^2}-\frac{6}{x}+9\right):\frac{3x-1}{x}=\left(\frac{1}{x^2}-\frac{6}{x}+9\right)\cdot\left(\frac{x}{3x-1}\right)$$

Damos común denominador

$$=\left(\frac{1-6x+9x^2}{x^2}\right)\cdot\left(\frac{x}{3x-1}\right)$$

Factorizamos:

$1-6x+9x^2=(1-3x)(1-3x)$

$=(3x-1)(3x-1)$

$$=\frac{(1-3x)(1-3x)}{x^2}\cdot\frac{x}{(3x-1)}$$

$$\left(\frac{1}{x^2}-\frac{6}{x}+9\right):\frac{3x-1}{x}=\frac{(3x-1)(3x-1)}{x^2}\cdot\frac{x}{(3x-1)}=\boxed{\frac{3x-1}{x}}$$ ***Rpta.***

2. Efectuar: $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2-4(x-1)^{-1}\cdot\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Resolución:

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2-4(x-1)^{-1}\cdot\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}-4\cdot\frac{1}{(x-1)}\cdot\frac{(x^2+1)}{(x+1)(x-1)}$$

• Primero efectuamos la potencia, luego la multiplicación y por último la resta.

$$=\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}-\frac{4(x^2+1)}{(x+1)(x-1)^2}$$

Dando común denominador, obtenemos:

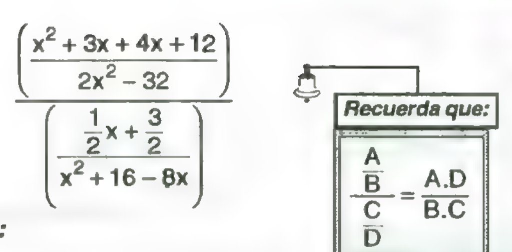
$$=\frac{(x+1)^2(x+1)-4(x^2+1)}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{(x^2+2x+1)(x+1)-4x^2-4}{(x+1)(x-1)^2}$$

$$=\frac{x^3+\cancel{x^2}+\cancel{2x^2}+2x+x+1-\cancel{4x^2}-4}{(x+1)(x-1)^2}$$

$$=\frac{x^3-x^2+3x-3}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{x^2\overline{(x-1)}+3\overline{(x-1)}}{(x+1)(x-1)^2}$$

$$=\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+3)}{(x+1)\cancel{(x-1)^2}}=\boxed{\frac{x^2+3}{(x+1)(x-1)}}\quad \textit{Rpta.}$$

3. Efectuar:



$$\frac{\left(\dfrac{x^2+3x+4x+12}{2x^2-32}\right)}{\left(\dfrac{\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}{x^2+16-8x}\right)}$$

Recuerda que:

$$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}}=\frac{A.D}{B.C}$$

Resolución:

$$\frac{\left(\dfrac{x^2+3x+4x+12}{2x^2-32}\right)}{\left(\dfrac{\frac{x+3}{2}}{x^2+16-8x}\right)}=\frac{(x^2+7x+12)(x^2-8x+16)}{(2x^2-32)\left(\frac{x+3}{2}\right)}$$

$$=\frac{\cancel{(x+3)}(x+4)(x-4)(x-4)}{\cancel{2}(x^2-16)\left(\frac{\cancel{x+3}}{\cancel{2}}\right)}=\frac{\cancel{(x+4)}\cancel{(x-4)}(x-4)}{\cancel{(x+4)}\cancel{(x-4)}}$$

$$=\boxed{x-4}\quad \textit{Rpta.}$$

4. Efectuar: $\left(\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}\right)\cdot\dfrac{x+1}{x-1}$

Resolución:

Recuerda que:

$$\frac{A}{B}-\frac{C}{D}=\frac{A.D-B.C}{B.D}$$

$$\left(\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}\right)\cdot\frac{x+1}{x-1}=\left[\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x-1)\cancel{(x+1)}}\right]\cdot\left(\frac{\cancel{x+1}}{x-1}\right)$$

$$\left(\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}\right)\cdot\frac{x+1}{x-1}=\frac{(x^2+2x+1)-(x^2-2x+1)}{(x-1)(x-1)}$$

$$=\boxed{\frac{4x}{(x-1)^2}}\ \textit{Rpta.}$$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 50

1. Simplificar las siguientes expresiones racionales.

a) $\dfrac{4x-4}{x-1}=$	f) $\dfrac{x^2-4}{x+2}=$
b) $\dfrac{3x^2-3x}{2x^3-2x^2}=$	g) $\dfrac{xm+2n+xn+2m}{2x+4}=$
c) $\dfrac{3x^2-6ax+3a^2}{6x^2-6ax}=$	h) $\dfrac{x^4-a^4}{x^4+x^2a-x^2a^2-a^3}=$
d) $\dfrac{5x^2-5x+5}{x^3+1}=$	i) $\dfrac{x^3+x^2-x^2y-xy+xy^2+y^2}{x^4+xy^3}=$
e) $\dfrac{x^6+1}{x^2+1}=$	j) $\dfrac{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{64}}=$

2. Factoriza y simplifica mentalmente:

a) $\dfrac{x^2-y^2}{x-y}=$	d) $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x+y}=$
b) $\dfrac{x^2-4x+4}{x-2}=$	e) $\dfrac{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}{x^2+2xy+y^2}=$
c) $\dfrac{x^3-1}{x-1}=$	f) $\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^3-y^3}=$

3. Para simplificar las siguientes expresiones racionales no es necesario realizar la factorización completa. Resuelve por el camino mas corto.

a) $\dfrac{x^4-y^4}{x^2-y^2}=$	d) $\dfrac{x^4-y^4}{x^3-x^2y+xy^2-y^3}=$
b) $\dfrac{x^6-y^6}{x^3-y^3}=$	e) $\dfrac{5x^2-10x+5}{x^2-2x+1}=$

4. Halla el resultado de cada una de las operaciones siguientes:

a) $\frac{x+7}{5}+\frac{2x-3}{5}+\frac{2x+1}{5}=$

b) $\frac{x-3}{x}+\frac{2x+4}{x}+\frac{x-1}{x}=$

c) $\frac{5x-1}{x^2}+\frac{3x^2-2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}=$

d) $\frac{x^2+1}{(x^3+1)}-\frac{x}{(x^3+1)}=$

e) $\frac{x^2-2x}{x^2-6x+9}-\frac{9-2x}{x^2+9-6x}=$

f) $-\frac{x^2-4}{x^2-4}+\frac{2x+2x^2}{x^2-4}-\frac{2x+8}{x^2-4}=$

g) $-\frac{x^2(4+x)}{x^3-8}+\frac{x^2(x-1)}{x^3-8}-\frac{2x(1-2x)}{x^3-8}+\frac{4}{x^3-8}=$

h) $-\frac{x+2}{x-3}+\frac{4(x+1)}{x-3}-\frac{x(x+3)}{x-3}-\frac{2-x^2}{x-3}=$

i) $\frac{(x+5)(x-3)}{x^2-4}-\frac{(x-1)^2}{x^2-4}+\frac{8}{x^2-4}=$

j) $\frac{(x-1)^2}{x^2-2x}-\frac{(x-1)^3}{x^2-2x}+\frac{x-2}{x^2-2x}=$

5. Halla el resultado de cada una de las operaciones siguientes:

a) $\frac{3x-2}{3}+\frac{1-5x}{5}=$

b) $\frac{x+2}{x}+\frac{5-x^2}{x^2}+\frac{3-2x^2}{x^3}=$

c) $\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+1}{x-1}=$

d) $\frac{4x}{x+1}+\frac{(2x+1)^2}{x^2-1}=$

e) $\frac{x+3}{2}-\frac{4x+2}{4}=$

f) $\frac{x+2}{x}-\frac{5}{2}-\frac{2x^2-3x}{x^2}=$

g) $\frac{-2}{x-2}-\frac{12x-5x^2-4}{x^2-4x+4}=$

h) $\frac{2x^3+2x}{x^3}-\frac{3x+1}{x}+\frac{x-2}{x^2}=$

i) $\frac{3x}{x^2-9}-\frac{x}{x-3}=$

j) $\frac{x-2}{(x+2)^3}-\frac{3}{x^2+4x+4}=$

k) $\frac{x}{x-1}-\frac{3}{x^2-1}+\frac{x+3}{x+1}=$

l) $\frac{x^2+x-2}{x^2-4}-\frac{x+5}{x-2}=$

m) $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2+2x+1}+1-\frac{x}{(x+1)^2}=$

n) $\frac{x-6}{x^2-3x+9}-\frac{1}{x^3+27}+1=$

ñ) $\frac{x^2}{x+1}-\frac{x}{2}+\frac{x(x+1)}{2x+2}=$

o) $2x-\frac{7x^2+4}{(x+2)^2}-\frac{x-2}{x+2}=$

p) $\dfrac{x+10}{x^2-4}+\dfrac{2x+4}{x^2+4x+4}=$	q) $\dfrac{2x+\frac{3}{2}}{2x+1}+\dfrac{x-\frac{1}{2}}{4x^2-1}=$

6. Multiplicar las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x^2+1+2x}{x^2+1+x}\cdot\dfrac{x^3-1}{x^2-1}=$	e) $\dfrac{x+2}{x^2-2x}\cdot\dfrac{x^2-4}{x^3-8}\cdot\dfrac{x^3+2x^2+4x}{x^2+4x+4}=$
b) $\dfrac{4-x^2}{2x-4}\cdot\dfrac{6}{x^2+4x+4}=$	f) $\dfrac{9x^2+12x+4}{3x+2}\cdot\dfrac{3x-2}{9x^3-6x^2+9x-6}=$
c) $\dfrac{x^2+5x+ax+5a}{x^2+25+10x}\cdot\dfrac{x^2-a^2}{(x+a)^3}\cdot(x+5)=$	g) $\dfrac{4}{x^2-9}\cdot\dfrac{x^2+9-6x}{2x^2-18}\cdot\dfrac{x^2+9}{2}=$
d) $\dfrac{x^2+2x+1}{5x^2+5x+5}\cdot\dfrac{x^3-1}{x^2-1}=$	h) $\dfrac{x^2+2x}{3x^4+12x^2}\cdot\dfrac{x^4-16}{x^2+4+4x}\cdot\dfrac{6x}{4x+8}=$

7. Dividir las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x^2+2x+4}{(x+2)^2}:\dfrac{(x^3-8)}{(x^2-4)}=$	e) $\dfrac{x^4-16}{3x+6}:\dfrac{\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}}{x-2}=$
b) $(x-1):\dfrac{x^2-1}{x+1}=$	f) $\dfrac{x^2+ax+2x+2a}{x^2+4x+4}:\dfrac{(x+a)^2}{x^2-4}=$
c) $\dfrac{\frac{4x+8}{x^2-4}}{\frac{(x-2)(x+3)}{4x+12}}=$	g) $\dfrac{2x+5}{x^2-1}\cdot\dfrac{x+1}{x-3}:\dfrac{x+\frac{5}{2}}{2}=$
d) $\left(\dfrac{x-1}{x^2-1}\right):(x+1)=$	h) $\dfrac{x^2}{3x-1}:\dfrac{x-1}{x-\frac{1}{3}}\cdot\dfrac{x^2-2x+1}{x}=$

8. Halla el resultado de cada una de las operaciones siguientes:

a) $\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2=$	d) $\left(x^2+1\right)^{-2}=$
b) $\left(\dfrac{x^2}{2x-1}\right)^3=$	e) $\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)^{-1}=$
c) $\left(\dfrac{2}{x^2-1}\right)^2=$	f) $x^2+x^{-1}=$

g) $\left[\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{2}\right]^{-1}=$

h) $\sqrt{\left(x^{2}+2x+1\right)^{-1}}=$

i) $\sqrt{\dfrac{x-1}{x^{3}+x^{2}-x-1}}=$

j) $\sqrt{\dfrac{x^{3}-3x^{2}+4}{x+1}}=$

9. Halla el resultado de cada una de las operaciones combinadas siguientes:

a) $\left(\dfrac{x^{2}+2x-8}{x-2}-2\right):3=$

b) $\dfrac{x^{2}-2x+1}{xa+2x-a-2}\cdot\dfrac{5}{x-1}+1=$

c) $\dfrac{\dfrac{x+2}{x-1}-\dfrac{x+1}{x-2}}{\dfrac{-6}{x-2}}=$

d) $\left(\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{x+2}{x+1}\right)\cdot\dfrac{2+x}{2x+3}=$

e) $\dfrac{x-1}{x^{2}-4}\cdot\left(x+\dfrac{4-x^{2}}{x-1}\right)=$

f) $\sqrt{x+\dfrac{x^{2}-4x}{4}}=$

g) $\dfrac{3x}{x^{2}+4x+4}:\left(\dfrac{x-1}{x+2}-\dfrac{x+1}{x-2}\right)=$

h) $\sqrt{\dfrac{(x-3)^{2}}{9}+\dfrac{4x}{3}}=$

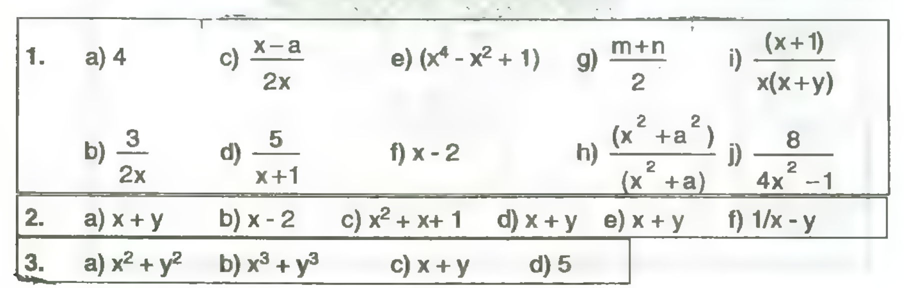
i) $\dfrac{\sqrt{\left(x^{2}+y^{2}\right)^{2}-\left(x^{2}-y^{2}\right)^{2}}}{4x}+\dfrac{1}{2}y=$

j) $\dfrac{\sqrt{\left(x^{2}+4\right)^{2}-16x^{2}}}{\sqrt{\left(x^{2}+4\right)^{2}}-\sqrt{16x^{2}}}=$

k) $\sqrt{\dfrac{x^{2}+2x+1}{x^{4}}\cdot\dfrac{16x^{6}}{15x^{2}-6x^{2}}}$

l) $\sqrt{(x+1)^{2}\cdot(x-1)^{2}+4x^{2}}=$

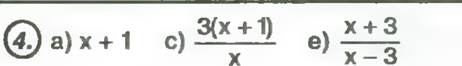
RESPUESTAS TALLER



1. a) 4 b) $\dfrac{3}{2x}$ c) $\dfrac{x-a}{2x}$ d) $\dfrac{5}{x+1}$ e) (x^4-x^2+1) f) $x-2$ g) $\dfrac{m+n}{2}$ h) $\dfrac{(x^{2}+a^{2})}{(x^{2}+a)}$ i) $\dfrac{(x+1)}{x(x+y)}$ j) $\dfrac{8}{4x^{2}-1}$

2. a) $x+y$ b) $x-2$ c) x^2+x+1 d) $x+y$ e) $x+y$ f) $1/x-y$

3. a) x^2+y^2 b) x^3+y^3 c) $x+y$ d) 5



4. a) $x+1$ c) $\frac{3(x+1)}{x}$ e) $\frac{x+3}{x-3}$ g) $\frac{1}{x-2}$ i) $\frac{4}{x+2}$

b) 4 d) $x+1$ f) 1 h) 0 j) $2-x$

5. a) -7/15 g) $\frac{5x}{2-x}$ m) $\frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)}$

b) $\frac{5x+3}{x^3}$ h) -1 n) $\frac{1}{x+3}$

c) $\frac{2(x^2+2)}{(x+1)(x-1)}$ i) $\frac{x^2}{(x+3)(3-x)}$ ñ) $\frac{x}{1-x}$

d) $\frac{8x^2+1}{(x+1)(x-1)}$ j) $\frac{-2(x+4)}{(x+2)^3}$ o) $\frac{2x(x^2+4)}{(x+2)^2}$

e) $\frac{2-x}{2}$ k) $\frac{x(2x+3)}{(x+1)(x-1)}$ p) $\frac{3}{x-2}$

f) $\frac{10-7x}{2x}$ l) $\frac{6}{2-x}$ q) 1

6. a) $x+1$ c) $\frac{x-a}{x+a}$ e) $\frac{1}{x-2}$ g) $\frac{x^2+9}{(x+3)^2}$

b) $\frac{3}{x+2}$ d) $\frac{x+1}{5}$ f) $\frac{3x+2}{3(x^2+1)}$ h) $\frac{x-2}{2(x+2)}$

7. a) $\frac{1}{x+2}$ c) $\frac{16}{(x-2)^2}$ e) $(x-2)^2$ g) $\frac{4}{(x-1)(x-3)}$

b) 1 d) $\frac{1}{(x+1)^2}$ f) $\frac{x-2}{x+a}$ h) $\frac{x^3}{3(x-1)^3}$

8. a) $\frac{x^2+2x+1}{x^2}$ d) $\frac{1}{x^4+2x^2+1}$ g) $\frac{x^2}{x^2-4x+4}$ j) $(x-2)^2$

b) $\frac{x^6}{8x^3-12x^2+6x-1}$ e) x h) $\frac{1}{x+1}$

c) $\frac{4}{x^4-2x^2+1}$ f) $\frac{x^3+1}{x}$ i) $\frac{1}{x+1}$

9. a) $\frac{x+2}{3}$ e) $\frac{4-x}{(x+2)(x-2)}$ i) y

b) $\frac{a+7}{a+2}$ f) $\frac{x}{2}$ j) $\frac{x-4}{(x-2)^2}$

c) $\frac{1}{2(x-1)}$ g) $\frac{2-x}{2}$ k) $\frac{4}{3}(x+1)$

d) $\frac{-1}{x+1}$ h) $\frac{x+3}{3}$ l) x^2+1

Ejercicios tomados en los concursos de matematica para escolares organizados por las Academias: Cesar Vallejo, Trilce, Pitagoras, Alfa, Sigma.

Ejemplo 1: Simplificar la expresión siguiente:

$$\left(\frac{x^2-4x-32}{x^2-16}\right)\cdot\left(\frac{x^2-9x+20}{x^2-12x+32}\right):\left(\frac{x^2-11x+30}{x^2-10x+24}\right)$$

a) $\frac{x-4}{x+4}$ b) $\frac{x-5}{x-4}$ c) $\frac{x-8}{x-6}$ d) 1 e) 0

Resolución:

$$\left[\frac{(x-8)(x+4)}{(x+4)(x-4)}\cdot\frac{(x-4)(x-5)}{(x-4)(x-8)}\right]:\left[\frac{(x-5)(x-6)}{(x-4)(x-6)}\right]$$

$$\left[\frac{x-5}{x-4}\right]:\left[\frac{(x-5)(x-6)}{(x-4)(x-6)}\right]=\frac{(x-5)}{(x-4)}\cdot\frac{(x-4)}{(x-5)}=\boxed{1}$$

Rpta. d

Ejemplo 2: Efectuar el producto

$$\left(\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}\right)\left(\frac{3}{4x}+\frac{x}{4}-x\right)$$

a) 0 b) 1 c) 3 d) $\frac{3-16x}{4}$ e) $\frac{3+16x}{3}$

Resolución:

$$\left(\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}\right)\left(\frac{3}{4x}+\frac{x}{4}-x\right)=\left[\frac{(1+x)^2-(1-x)^2}{(1-x)(1+x)}\right]\left[\frac{3+x^2-4x^2}{4x}\right]$$

$$=\left[\frac{\left(1+2x+x^2\right)-\left(1-2x+x^2\right)}{(1-x)(1+x)}\right]\left[\frac{3-3x^2}{4x}\right]$$

$$\left(\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}\right)\left(\frac{3}{4x}+\frac{x}{4}-x\right)=\left[\frac{\left(1+2x+x^2\right)-\left(1-2x+x^2\right)}{(1-x)(1+x)}\right]\left[\frac{3-3x^2}{4x}\right]$$

$$=\left[\frac{4x}{1-x^2}\right]\left[\frac{3\left(1-x^2\right)}{4x}\right]=\boxed{3}$$ ***Rpta. c***

Ejemplo 3: Efectuar:

$$A=\frac{1}{x^2-xy}-\frac{1}{x^2+xy}-\frac{2y}{x^3-xy^2}$$

a) x b) $\frac{x}{x-y}$ c) $\frac{y}{x^3-xy^2}$ d) 1 e) 0

Resolución:

- Factorizando los denominadores, se tiene

$$A=\frac{1}{x(x-y)}-\frac{1}{x(x+y)}-\frac{2y}{x\left(x^2-y^2\right)}$$

$$A=\frac{1}{x(x-y)}-\frac{1}{x(x+y)}-\frac{2y}{x(x+y)(x-y)}$$ **; dando común denominador, obtenemos:**

$$A=\frac{1(x+y)-1(x-y)-2y}{x(x-y)(x+y)}=\frac{x+y-x+y-2y}{x(x-y)(x+y)}$$

$$A=\frac{2y-2y}{x(x-y)(x+y)}=\frac{0}{x(x-y)(x+y)}=0\Rightarrow\therefore\ \boxed{A=0}$$ ***Rpta. e***

Ejemplo 4: Efectuar:

$$\left(\sqrt{1-x}+\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right):\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

a) $\sqrt{1+x}$ b) $\sqrt{1-x^2}$ c) $\sqrt{1+x^2}$ d) $\sqrt{1-x}$ e) 1

Resolución: *La expresión dada, se puede escribir de la manera siguiente:*

$$\left(\frac{\sqrt{1-x}}{1}+\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right):\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$\left(\frac{\sqrt{1-x}.\sqrt{1+x}+1}{1.\sqrt{1+x}}\right):\left(\frac{1.\sqrt{1-x^2}+1}{1.\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$\left(\frac{\sqrt{(1-x)(1+x)}+1}{\sqrt{1+x}}\right):\left(\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

Recuerda que:

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{A.D+B.C}{B.D}$$

$$\frac{\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)}{\sqrt{1+x}}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}}{\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)}=\frac{\sqrt{(1+x)(1-x)}}{\sqrt{1+x}}=\frac{\sqrt{1+x}.\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$$

$$=\boxed{\sqrt{1-x}}$$ ***Rpta. d***

Ejemplo 5: Simplificar:

$$\frac{\dfrac{x-a}{x-b}-\dfrac{x+b}{x+a}}{1-\dfrac{x+a}{x-b}}+\frac{x+b}{x+a}+1$$

a) 1　　b) $x+1$　　c) 2

d) $x+2$　　e) $a+b$

Resolución:

$$\frac{\left[\dfrac{(x-a)(x+a)-(x+b)(x-b)}{(x-b)(x+a)}\right]}{\left[\dfrac{(x-b)-(x+a)}{(x-b)}\right]}+\frac{x+b}{x+a}+1$$

$$\frac{\left[\dfrac{\left(x^2-a^2\right)-\left(x^2-b^2\right)}{(x+a)}\right]}{[x-b-x-a]}+\frac{x+b}{x+a}+1=\frac{\left(-a^2+b^2\right)}{(x+a)(-b-a)}+\frac{x+b}{x+a}+1$$

$$=\frac{-\left(a^2-b^2\right)}{-(x+a)(b+a)}+\frac{x+b}{x+a}+1$$

$$=\frac{-(a+b)(a-b)}{-(x+a)(a+b)}+\frac{x+b}{x+a}+1$$

$$=\frac{(a-b)}{(x+a)}+\frac{(x+b)}{(x+a)}+1$$

$$=\frac{a-b+x+b+x+a}{(x+a)}$$

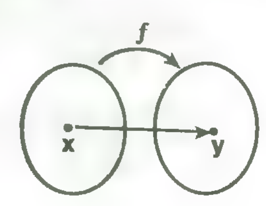
$$=\frac{2(a+x)}{(x+a)}=\boxed{2}$$ ***Rpta. c***

3.8 Aplicaciones diversas de las Expresiones Algebraicas. Ecuaciones e Inecuaciones de Primer Grado con una incógnita.

Ecuaciones:

Dada una función:

$$\boxed{f:\ x\rightarrow y\quad ó\quad y=f(x)}$$



Se presentan dos problemas:

1). Conocido **x** ; calcular **y** 2). Conocido **y** ; calcular **x**

Sea por ejemplo: $\boxed{y = 5x + 3}$ .... **(función)**

1) Sabiendo que: $\boxed{x = 2}$; calcular: **y**

$$y = 5x + 3 \Rightarrow y = 5(2) + 3 \Rightarrow \boxed{y = 13}$$

2) Sabiendo que: $\boxed{y = 23}$; calcular: **x**

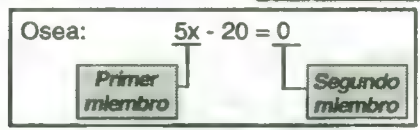
Si: $23 = 5x + 3$ .... **(ecuación)**

$$23 - 3 = 5x \Rightarrow 20 = 5x \Rightarrow \frac{20}{5} = x \Rightarrow \therefore \boxed{4 = x}$$

** Resolver la ecuación significa encontrar los valores de **x** que verifican la igualdad.*

Donde la ecuación: $5x + 3 = 23$

Se puede escribir en la forma: $\boxed{5x + 3 - 23 = 0}$



** El primer miembro es un polinomio en **x**. entonces la denominamos ecuación polinomica y podemos expresarla de la siguiente forma.*

$$\boxed{P(x) = 0}$$

> ***En consecuencia:***
>
> *Resolver una ecuación polinomica es encontrar los ceros o raices de **P(x)**, es decir, los valores de **x** que anulan el polinomio.*

x se llama incognita de la ecuación.

El conjunto de raices o soluciones de P(x) se llama **conjunto solución** se designa por **C.S.**

Para la ecuación polinomica: $5x - 20 = 0$; el conjunto solución es C.S. = {4}

**** Veamos otros ejemplos sobre ecuaciones polinomicas.***

Ejemplo 1: Resolver: $x^2 - 9 = 0$

Resolución:

$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2$$
$$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$$

Factorizando se tiene: $(x + 3)(x - 3) = 0$

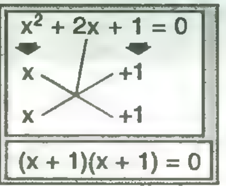
Donde: **i)** $(x + 3) = 0 \Rightarrow$ $\boxed{x = -3}$
ii) $(x - 3) = 0 \Rightarrow$ $\boxed{x = 3}$

Son los valores de x que anulan el polinomio

$\therefore$ Conjunto solución de la ecuación: $x^2 - 9 = 0$; es C.S. = {-3 ; 3}

Ejemplo 2: Resolver: $x^2 + 2x + 1 = 0$

Resolución:



Factorizando se tiene: $(x + 1)(x + 1) = 0$

$$(x + 1)^2 = 0$$

Donde: **i)** $(x + 1) = 0 \Rightarrow$ $\boxed{x = -1}$ **(es el valor que anula al polinomio)**

$\therefore$ El conjunto solución de la ecuación: $x^2 + 2x + 1 = 0$; es C.S. = {-1}

Ejemplo 3: Resolver la ecuación: $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

Resolución:

Factorizando se tiene: $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

$$x^2(x + 2) - (x + 2) = 0$$

$$(x + 2)(x^2 - 1) = 0 \text{ ; pero: } (x^2 - 1) = (x + 1)(x - 1)$$

$$(x + 2)(x + 1)(x - 1) = 0$$

Donde: **i)** $(x + 2) = 0 \Rightarrow$ $\boxed{x = -2}$
ii) $(x + 1) = 0 \Rightarrow$ $\boxed{x = -1}$
iii) $(x - 1) = 0 \Rightarrow$ $\boxed{x = 1}$

Son los valores que anulan el polinomio

El conjunto solución de la ecuación: $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$
es C.S. = {-2 ; -1 ; 1}

Grado de una Ecuación:

El **Grado de una Ecuación** se llama **Grado de la Ecuación Polinomica.**

Ejemplos:

a) $3x - 12 = 0 \Rightarrow$ ***es una ecuación de primer grado***

b) $2x^2 + 5x - 4 = 0 \Rightarrow$ ***es una ecuación de segundo grado***

c) $x^4 + 2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow$ ***es una ecuación de cuarto grado***

Ejercicios de Aplicación:

Factoriza los polinomios y encuentra su conjunto solución.

a) $x^2 - 1 = 0$	c) $x^2 - 4x + 4 = 0$	e) $x^3 - 5x^2 + x - 5 = 0$
b) $x^2 - 4 = 0$	d) $x^2 - 6x + 9 = 0$	f) $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x = 0$

3.8.1 Ecuaciones Racionales de Primer Grado

Dada la función racional $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$; siendo: P(x) y Q(x) polinomios, la ecuación racional es R(x) = 0

Resolver la ecuación es encontrar los ceros de la función racional.

Si: P(x) es un polinomio de primer grado, decimos que la ecuación racional es de primer grado.

Los Ceros de R(x) son los ceros del numerador P(x) que no anulan al denominador Q(x)

Es decir, las raices de R(x) son los valores de **x** que anulan a P(x) y pertenecen al dominio de R(x).

El dominio de R(x) es el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) exeptuados los que anulan al denominador Q(x).

Ejemplo 1: Resolver: $\dfrac{x+1}{x^2-4} = 0$

Resolución:

Factorizando la expresión del denominador Q(x).

$$x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x + 2)(x - 2)$$

Luego: $\dfrac{x+1}{(x+2)(x-2)} = 0$; los valores de **x** que anulan al denominador Q(x), son -2 y 2

- El dominio de R(x) es: $\mathbb{R} - \{-2 ; 2\}$

- Calculamos los ceros del numerador P(x).

$P(x) = 0 \Rightarrow (x + 1) = 0 \Rightarrow \therefore$ $\boxed{x = -1}$; como $-1 \in$ al dominio de R(x).

Entonces: C.S. = {-1}; **-1 es la raíz de la ecuación**

Ejemplo 2: Resolver: $\dfrac{x-3}{x^2-6x+9} = 0$

Resolución:

Factorizando la expresión del denominador Q(x).

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)(x - 3) = (x - 3)^2$$

Luego: $\dfrac{x-3}{(x-3)^2} = 0$; el valor de **x** que anula al denominador Q(x) ; es: 3

- El dominio de R(x) es: $\mathbb{R} - \{3\}$

- Calculamos los ceros del numerador P(x).

$P(x) = 0 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 3}$; como $3 \notin$ al dominio de R(x).

Entonces: 3 no es raíz de la ecuación.

En consecuencia; la ecuación no tiene raices: $\boxed{C.S. = \phi}$

Ejemplo 3: Resolver: $\dfrac{3x}{x^2-1} = \dfrac{x+1}{x-1} - 1$

Resolución:

> ***Nota:***
>
> *Como en el caso de las ecuaciones polinomicas, la ecuación no siempre aparece "preparada" y hay que transformarla en una ecuación de la forma: R(x) = 0. A veces se presenta como una igualdad entre dos expresiones algebraicas fraccionarias*

- La ecuación dada, se puede escribir así:

$\dfrac{3x}{x^2-1} - \dfrac{x+1}{x-1} + 1 = 0$; pero: $\boxed{x^2 - 1 = (x+1)(x-1)}$

$\dfrac{3x}{(x+1)(x-1)} - \dfrac{(x+1)}{(x-1)} + 1 = 0$; damos común denominador

$$\frac{3x - (x+1)(x+1) + (x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = 0$$

$$\frac{3x - \left(x^2 + 2x + 1\right) + \left(x^2 - 1\right)}{(x+1)(x-1)} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{x-2}{(x+1)(x-1)} = 0}$$

Los valores de **x** que anulan al denominador Q(x) son: -1 y 1, entonces el dominio de R(x) es: $\mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$

- Calculamos los ceros del numerador P(x).

$$P(x) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 2}$$

> Como $2 \in$ al dominio de R(x) el conjunto solución de la ecuación es: **C.S. = {2}**

Ejemplo 4: Resolver: $\dfrac{3-x}{x}+\dfrac{x^2-1}{x^2}=5-\dfrac{5x+1}{x}$

Resolución:

- Transponiendo los términos del segundo miembro al primer miembro, obtenemos:

$$\frac{3-x}{x}+\frac{x^2-1}{x^2}+\frac{5x+1}{x}-5=0$$

Damos común denominador:

$$\frac{x(3-x)+x^2-1+x(5x+1)-5x^2}{x^2}=0$$

$$\frac{3x-\cancel{x^2}+\cancel{x^2}-1+\cancel{5x^2}+x-\cancel{5x^2}}{x^2}=0$$

$\boxed{\dfrac{4x-1}{x^2}=0}$; El valor de x que anula al denominador Q(x) es: 0, entonces el dominio de R(x) es: $\mathbb{R}-\{0\}$

- Calculamos los ceros del numerador P(x).

$$P(x)=0 \Rightarrow 4x-1=0 \Rightarrow 4x=1 \Rightarrow \therefore \boxed{x=\frac{1}{4}}$$

Como 1/4 $\in$ al dominio de R(x) el conjunto solución de la ecuación es: **C.S. = {1/4}**



TALLER DE EJERCICIOS Nº 51



1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x+5=9$	g) $3+x-(5-2x)-1=3$	m) $(x+5)(x-3)+7=(4+x)^2-12$
b) $-2x+3=3$	h) $6-(-x+3-2)-3x=-5$	n) $(x-1)^2-(x^2-1)=2(1-x)$
c) $7=3x-2$	i) $7(x+3)=35$	ñ) $5+4x^2+3x=(2x+1)^2$
d) $9{,}2=4x+8$	j) $5(x+0{,}4)-2{,}8=11$	o) $(3x-2)^2=(4+3x)^2$
e) $x=2x$	k) $5+3(3x+1)=17{,}2$	p) $(5+x)(3+x)=(5-x)(3-x)-32$
f) $3x=x+6$	l) $4(x-1)=3(2+\frac{2}{3}x)$	q) $\frac{1}{2}(4x+6)-(x-2)=2$

2. Completa:

a) $x=-5 \Rightarrow 2x+1=\square$	c) $x=\square \Rightarrow \frac{2}{5}x+\frac{1}{2}=-\frac{1}{10}$
b) $x=-2 \Rightarrow 12x+\square=-20$	d) $x=0{,}3 \Rightarrow 0{,}2x+0{,}16=\square$

e) $\frac{2}{5}x = -4 \Rightarrow -0{,}36x + 0{,}6 = \square$	g) $x = 5 \Rightarrow 4x - \square = 18$
f) $x = \square \Rightarrow \frac{3}{2}x - 2 = 7$	h) $x = -6 \Rightarrow 5x - 4 = \square$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{3(5x+2)}{17} = x$	e) $\frac{3}{4} - \frac{2-3x}{3} + \frac{x}{2} = x - 0{,}5$
b) $\frac{x+2}{3} - 4 = -1$	f) $\frac{2(x+1)+7{,}2}{2{,}4} = 4$
c) $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} + \frac{x}{2} = x - 5$	g) $\frac{2x-3}{4} - \frac{x}{3} = 2 + x$
d) $\frac{5x-2}{4} - x + \frac{2}{7} = 0$	h) $2x - 4 = \frac{x}{6} - \frac{2x-1}{9}$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones fraccionarias:

a) $\frac{2(14-x)}{5x} = 1$	f) $\frac{-\frac{2}{5}+x}{x} + \frac{\frac{3}{2}}{x^2} = 1$
b) $\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{5x-2}{x} = 5$	g) $\frac{x-4}{x-1} + 2 = 5$
c) $\frac{x+2}{x-2} = \frac{x+5}{x+2}$	h) $\frac{x^2+5}{x^2+4x+4} = \frac{2x+1}{2x+9}$
d) $\frac{6x-1}{3x-5} = \frac{2x+1}{x-\frac{1}{2}}$	i) $\frac{x+\frac{3}{2}}{2x} = \frac{2x+3}{4x-1}$
e) $\frac{3x}{x+1} + \frac{2x}{x+2} = 5$	j) $\frac{(x+2)^3 + x^2}{x+1} = (x+3)^2$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones fraccionarias:

a) $\frac{x+2}{x-5} = \frac{2x-3}{x+5} - 1$	d) $\frac{5x+3}{x-2} = \frac{10-4x^2}{x^2-4} - 1$
b) $\frac{x+2}{x+3} + \frac{3}{x-3} = 1$	e) $\frac{3x}{x+1} + \frac{2x}{x+2} = 5$
c) $\frac{3}{x^2-1} + \frac{x+2}{x-1} = \frac{x}{x+1}$	f) $\frac{x+5}{x^2-4} - \frac{x-4}{x^2+4x+4} = 0$

g) $\frac{8}{x^2-1}-\frac{x-3}{x+1}=\frac{5-x}{x-1}$

h) $\frac{6}{5-x}-\frac{7}{5+x}=\frac{21}{25-x^2}$

i) $\frac{3}{x-3}-\frac{2}{3+x}=\frac{5}{9-x^2}$

j) $\frac{xa+xb+a+b}{a^2-b^2}=\frac{1}{a-b}$

k) $\frac{x^2+xm+2x+2m}{3x+6}=4m$

l) $\frac{y-6}{y+1}=\frac{21}{(y+1)^2}+1$

RESPUESTAS TALLER

1.

a) C.S. = {2}   g) C.S. = {2}   m) C.S. = {-2}

b) C.S. = {0}   h) C.S. = {5}   n) C.S. = {ℝ}

c) C.S. = {3}   i) C.S. = {2}   ñ) C.S. = {4}

d) C.S. = {0,3}   j) C.S. = {3;6}   o) C.S. = {-1/3}

e) C.S. = {0}   k) C.S. = {1/3}   p) C.S. = {-2}

f) C.S. = {3}   l) C.S. = {5}   q) C.S. = {-3}

2.

a) -9   e) 4,2

b) 4   f) 6

c) -3/2   g) 2

d) 0,1   h -34

3.

a) C.S. = {3}   e) C.S. = {-7/6}

b) C.S. = {7}   f) C.S. = {0,2}

c) C.S. = {12}   g) C.S. = {-3;3}

d) C.S. = {6/7}   h) C.S. = {2}

4.

a) C.S = {4}   f) C.S. = {15/4}

b) C.S. = {2}   g) C.S. = {-1/2}

c) C.S. = {-14}   h) C.S. = {41/2}

d) C.S. = {-11/6}   i) C.S. = {-3/10}

e) C.S. = {-10/7}   j) C.S. = {-1/3}

5.

a) C.S. = {3/2}   g) C.S. = {R}

b) C.S = {-6}   h) C.S. = {2}

c) C.S. = {-5/4}   i) C.S. = {-20}

d) C.S. = {-20/13}   j) C.S. = {0}

e) C.S. = {-10/7}   k) C.S. = {11m}

f) C.S. = {-2/13}   l) C.S. = {-4}

3.8.2 Inecuaciones Polinomicas de Primer Grado

Hasta ahora habiamos tratado de hallar los valores de **x** que anulan a un polinomio. pero puede interesarnos conocer cuales son los valores de **x** para los que el valor del polinomio es mayor o menor que cero.

$$\boxed{P(x) > 0} \text{ ó } \boxed{P(x) < 0}$$

Estas expresiones se llaman **inecuaciones.**

- Para resolver una inecuación debes recordar las leyes de monotonia de la adición y de la multiplicación.

*** Ley de Monotonia de la Adición:**

$$\boxed{a < b \Rightarrow a + c < b + c}$$

Ejemplo:
$$\begin{cases} 4 < 9 \Rightarrow 4 + 3 < 9 + 3 & \text{Osea: } (7 < 12) \\ 4 < 9 \Rightarrow 4 + (-6) < 9 + (-6) & \text{Osea: } (-2 < 3) \end{cases}$$

*** Leyes de la Monotonia de la Multiplicación:**

1) $\boxed{a < b \Rightarrow a.c < b.c \; ; \; \text{Si: } c > 0}$ **(c positivo)**

Ejemplo: $3 < 5 \Rightarrow 3.4 < 5.4$; pues: $4 > 0$;(4 positivo)

$12 < 20$

2) $\boxed{a < b \Rightarrow a.c > b.c \; ; \; \text{Si: } c < 0}$ **(c negativo)**

Ejemplo: $3 < 5$ $3.(-6) > 5.(-6)$; pues: $-6 < 0$; (6 es negativo)

$-18 > -30$

Estas mismas leyes sirven para la división

Observa atentamente el cuidado que debes poner cuando multiplicas o divides ambos miembros de una desigualdad por un número.

- *Si el número es **positivo**, la desigualdad **conserva** el sentido.*
- *Si el número es **negativo**, la desigualdad **cambia** el sentido.*

Estas propiedades se extienden a las relaciones $\leq$ y $\geq$ y te mostraremos con algunos ejemplos cómo se aplican estas reglas a la resolución de inecuaciones polinómicas de primer grado.

Ejemplo 1: Resolver: $2x - 8 > 0$

Resolución:

Sumamos 8 a ambos miembros: $2x - \cancel{8} + \cancel{8} > 0 + 8$

$$2x > 8$$

Dividimos por 2 ambos miembros: $\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} > \frac{\cancel{8}}{\cancel{2}} \Rightarrow \boxed{x > 4}$

Hemos obtenido el conjunto solución: $\boxed{C.S = \{x \in \mathbb{R} / x > 4\}}$

Ejemplo 2: Resolver: $12 - 3x > 0$

Resolución:

Restamos 12 a ambos miembros: $\cancel{12} - 3x - \cancel{12} > -12$

$$-3x > -12$$

Dividimos por -3 ambos miembros: $\frac{\cancel{-3}x}{\cancel{-3}} < \frac{-\cancel{12}}{\cancel{-3}} \Rightarrow \boxed{x < 4}$

Cambió el sentido de la desigualdad

Hemos obtenido el conjunto solución: $\boxed{C.S = \{x \in \mathbb{R} / x < 4\}}$

Las inecuaciones pueden presentarse en forma más complicada, veamos:

Ejemplo 3: Resolver: $x^2 - \frac{1}{2}x + 1 \geq (x - 1)(x + 2)$

Resolución:

Operando en el segundo miembro, se obtiene:

$$x^2 - \frac{1}{2}x + 1 \geq (x - 1)(x + 2) \Rightarrow x^2 - \frac{1}{2}x + 1 \geq x^2 + 2x - x - 2$$

Transponemos los términos del segundo miembro al primer miembro:

$$\cancel{x^2} - \frac{1}{2}x + 1 - \cancel{x^2} - 2x + x + 2 \geq 0$$

$$-\frac{3}{2}x + 3 \geq 0$$

$$-\frac{3}{2}x \geq -3$$

Recuerda que:

- ***Transponer términos:***
  En toda ecuación o inecuación, lo que esta sumando, restando, multiplicando y dividiendo en un miembro, pasa restando, sumando, dividiendo y multiplicando, respectivamente al otro miembro.

Multiplicamos ambos miembros por $-\frac{2}{3}$ (Cambia de sentido la desigualdad)

$$-\frac{3}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)x \leq -3\left(-\frac{2}{3}\right) \Rightarrow \boxed{x \leq 2}$$

$$\therefore \boxed{C.S. = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 2\}}$$

Ejemplo 4: Resolver: $(x - 2)^2 > x^2 - 3x + 1$

Resolución:

- Aplicamos: $\boxed{(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2}$; en el primer miembro, obtenemos:

$$x^2 - 4x + 4 > x^2 - 3x + 1$$

- Transponemos términos: $\cancel{x^2} - 4x + 4 - \cancel{x^2} + 3x - 1 > 0$

$$-x + 3 > 0 \Rightarrow -x > -3$$

- Multiplicamos por -1 a ambos miembros: $-1(-x) < -1(-3) \Rightarrow \boxed{x < 3}$

Cambió el sentido de la desigualdad

$$\therefore \boxed{C.S. = \{x \in \mathbb{R} / x < 3\}}$$

Ejemplo 5: Resolver: $(x + 2)(x - 3) \geq x^2 - 1$

Resolución:

- Operando en el primer miembro, se obtiene:

$$x^2 - 3x + 2x - 6 \geq x^2 - 1$$

- Transponemos términos: $\cancel{x^2} - 3x + 2x - 6 - \cancel{x^2} + 1 \geq 0$

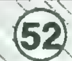
$$-x - 5 \geq 0 \Rightarrow -x \geq 5$$

- Mutiplicamos por -1 a ambos miembros: $-1(-x) \leq -1(5) \Rightarrow \boxed{x \leq -5}$

$$\therefore \boxed{C.S. = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -5\}}$$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 52



1. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a). $2x + 4 > 0$	i). $3 - 4x \geq 0$
b). $\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} < 0$	j). $2x + 3(x - 1) \leq 7$
c). $x - 1 \geq 2x + 3$	k). $4(x + 1) - 2(x + 3) > 8$
d). $x - 2 \leq 2x + 4$	l). $(x - 1)(x + 1) < x^2 + x$
e). $2x + 1 \leq 0$	m). $x^2 - (2 - x) \leq (x + 1)(x - 4)$
f). $-3x + 6 < 0$	n). $x^2 - 4x + 1 < (x - 2)^2$
g). $\frac{1}{2}x - 1 < 0$	ñ). $3[x - (3 - 0,\hat{2}x)] \leq x + (3 - \frac{1}{3}x)$
h). $2x - 3 > 0$	o). $(x + 1)(x - 1) \leq x^2 - 1$

RESPUESTAS TALLER

1.	a) C.S. = $\{x \in \mathbb{R} / x > -2\}$	i) C.S. = $\{x \in \mathbb{R} / x \leq 3/4\}$
	b) C.S. = $\{x \in \mathbb{R} / x < 3\}$	j) C.S. = $\{x \in \mathbb{R} / x \leq 2\}$
	c) C.S. = $\{x \in \mathbb{R} / x \leq -4\}$	k) C.S. = $\{x \in \mathbb{R} / x > 5\}$
	d) C.S. = $\{x \in \mathbb{R} / x \geq -6\}$	l) C.S. = $\{x \in \mathbb{R} / x > -1\}$
	e) C.S. = $\{x \in \mathbb{R} / x \leq -1/2\}$	m) C.S. = $\{x \in \mathbb{R} / x \leq -2\}$
	f) C.S. = $\{x \in \mathbb{R} / x > 2\}$	n) C.S. = $\{x \in \mathbb{R}\}$
	g) C.S. = $\{x \in \mathbb{R} / x < 2\}$	ñ) C.S. = $\{x \in \mathbb{R} / x \leq 4\}$
	h) C.S. = $\{x \in \mathbb{R} / x > 3/2\}$	o) C.S. = $\{x \in \mathbb{R}\}$

3.8.3 Interpretación de problemas

Las ecuaciones y las inecuaciones tienen una enorme aplicación a la Resolución de Problemas. La mayor dificultad se encuentra, en estos casos, en la interpretación de los enunciados y de los resultados.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1: La diferencia entre un número y el doble de su consecutivo es -4. ¿Cuáles son dichos números?

Resolución:

Sea: $\begin{cases} x = \text{uno de dichos números} \\ x + 1 = \text{su consecutivo del número } x. \end{cases}$

Según el enunciado: Número - doble de su consecutivo = -4

$x - 2(x + 1) = -4$; resolvemos la ecuación:

$x - 2x - 2 = -4 \Rightarrow -x = -4 + 2 \Rightarrow \therefore \boxed{-x = -2}$

- Multiplicamos por -1, a ambos miembros de esta última expresión:

$-1(-x) = -1(-2) \Rightarrow \therefore \boxed{x = 2}$ **(es uno de los números).**

Rpta: Los números pedidos son: * $x = 2$
* $x + 1 = 2 + 1 = 3$

Ejemplo 2: Si al cuadarado de un número natural se le resta su sucesor se obtiene el cuadrado de su antecesor. Hallar dicho número.

Resolución:

* Llamemos **x** al número.

- Entonces su sucesor es: $x + 1$
  y su antecesor es: $x - 1$

Según el enunciado: x^2 - sucesor de x = (antecesor de x)^2

Osea: $x^2 - (x + 1) = (x - 1)^2$; resolvemos la ecuación:

$\cancel{x^2} - x - 1 = \cancel{x^2} - 2x + 1$; simplificando se obtiene:

$-x - 1 = -2x + 1$; transponemos términos.

$-x + 2x = 1 + 1 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 2}$

Rpta: El número pedido es: 2

Ejemplo 3: La suma de tres números pares consecutivos es igual a 300. ¿Cuáles son dichos números?

Resolución:

Sean los tres números pares consecutivos: $\begin{cases} x \\ x + 2 \\ x + 4 \end{cases}$

Según el enunciado: $x + (x + 2) + (x + 4) = 300$

$3x = 300 - 6$

$3x = 294 \Rightarrow x = \dfrac{294}{3} \Rightarrow \therefore \boxed{x = 98}$

Rpta: Los tres números pedidos son:
$x = 98$; $x + 2 = 100$; $x + 4 = 102$

> ***Nota:***
>
> *Otra forma de representar los tres números pares consecutivos es:*
> $2K$; $(2K + 2)$ y $(2K + 4)$

Ejemplo 4: Si a la edad de un señor la multiplico por 2 y luego le sumo su cuadrado más 1, obtengo el cuadrado de la edad que ese señor tendrá dentro de un año. ¿Qué edad tiene el Señor?

Resolución:

Llamemos x a la edad del señor

- Dentro de un año la edad será: $x + 1$

Según el enunciado: $x.2 + (x^2 + 1) = (x + 1)^2$; resolvemos la ecuación.

$2x + x^2 + 1 = x^2 + 2x + 1$; transponemos términos.

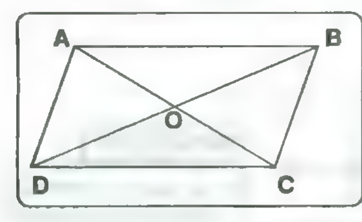
$$\cancel{2x} + \cancel{x^2} + 1 - \cancel{x^2} - \cancel{2x} - 1 = 0 \Rightarrow \therefore \boxed{0 = 0}$$

El resultado es **indeterminado.**

Esto significa que cualquiera sea la edad del señor siempre se verifica el enunciado.

Osea que los datos que nos dan son insuficientes para determinar su edad.

Ejemplo 5: En la figura mostrada:



$\overline{AO} = 2x + 2$

$\overline{BO} = 6x - 3$

$\overline{OC} = 5x - 4$

*Hallar la longitud de las diagonales del paralelogramo.

Resolución:

Por propiedad: i) $\overline{AO} = \overline{OC}$ y ii) $\overline{BO} = \overline{OD}$

De (I) Obtenemos: $\overline{AO} = \overline{OC}$

$2x + 2 = 5x - 4$; resolvemos la ecuación:

- Transponiendo términos se tiene: $2 + 4 = 5x - 2x$

$$6 = 3x \Rightarrow \therefore \boxed{x = 2}$$

Luego, hallamos los valores de $\overline{AO}$; $\overline{OC}$; $\overline{BO}$ y $\overline{OD}$; reemplazando el valor de **x**, veamos:

$\overline{AO} = 2x + 2 = 2(2) + 2 = 6$; $\overline{BO} = 6x - 3 = 6(2) - 3 = 9$

$\overline{OC} = 5x - 4 = 5(2) - 4 = 6$; $\overline{BO} = \overline{OD} = 9$

Rpta: Longitud de las diagonales: $\overline{AC} = \overline{AO} + \overline{OC} = 6 + 6 = 12$

$\overline{BD} = \overline{BO} + \overline{OD} = 9 + 9 = 18$

Ejemplo 6: Si al cuadruple de la edad que tenia hace 3 años; le resto el doble de la edad que tendré dentro de 4 años, obtengo mi edad. ¿Cuál es mi edad?

Resolución:

• Llamemos; **x** a mi edad actual

- Hace 3 años mi edad era: (x - 3)	- Dentro de 4 años mi edad será: (x + 4)

Según el enunciado: $4(x - 3) - 2(x + 4) = x$; resolvemos la ecuación.'

$$4x - 12 - 2x - 8 = x$$

$$2x - 20 = x \Rightarrow \therefore \boxed{x = 20}$$

Rpta: Mi edad es de 20 años

Ejemplo 7: Gaste los 2/7 de lo que tenia y S/. 20 más, quedándome con la quinta parte de lo que tenia y S/. 16 más. ¿Cuánto tenía?

Resolución:

- Llamemos x lo que tenia

- Gaste los 2/7 de lo que tenia y S/. 20 más = $\frac{2}{7}x + 20$

Quedándome: $\boxed{x - \left(\frac{2}{7}x + 20\right) = \frac{5}{7}x - 20}$ ...... (I)

Recuerda que:

- Lo que queda es igual a los que tenia menos lo gastado.

- Quedandome con la quinta parte de lo que tenia y S/. 16 más, osea:

$$\boxed{\frac{1}{5}x + 16} \text{ ...... (II)}$$

Luego; igualamos **(I)** y **(II)**:

$$\frac{5}{7}x - 20 = \frac{1}{5}x + 16 \text{ ; Resolvemos la ecuación:}$$

$$\frac{5}{7}x - \frac{1}{5}x = 16 + 20$$

$$\frac{5(5x) - 7(1x)}{7.5} = 36 \Rightarrow \frac{18x}{35} = 36 \Rightarrow x = 2.35 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 70}$$

Rpta: El dinero que tenia era de: 70 soles.

Ejemplo 8: A un alambre de 65 metros de longitud se le dá tres cortes, de manera que la longitud de cada trozo es igual a la del inmediato anterior aumentado en su mitad. ¿Cuál es la longitud del trozo más pequeño?

Resolución: *Para su mejor comprensión, construimos el gráfico siguiente:*

1er corte — 2do corte — 3er corte

$$x \;\vdash x + \frac{1}{2}x = \frac{3}{2}x \dashv \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}x\right) = \frac{9}{4}x \dashv \frac{9}{4}x + \frac{1}{2}\left(\frac{9}{4}x\right) = \frac{27}{8}x \dashv$$

Luego: $\underbrace{x}_{1^{er}\text{ trozo}} + \underbrace{\frac{3}{2}x}_{2^{do}\text{ trozo}} + \underbrace{\frac{9}{4}x}_{3^{er}\text{ trozo}} + \underbrace{\frac{27}{8}x}_{4^{to}\text{ trozo}} = 65$ metros ; resolvemos la ecuación:

Dando común denominador, en el primer miembro, obtenemos:

$$\frac{8x+12x+18x+27x}{8}=65 \Rightarrow \cancel{65}x=\cancel{65}.8 \Rightarrow \therefore \boxed{x=8}$$

Rpta: La longitud del trozo más pequeño es de 8 metros.

Ejemplo 9: La suma de tres números es 53, el segundo es $\frac{1}{3}$ del tercero y el primero excede al tercero en 4. Hallar el menor.

Resolución:

Sean los tres números: a = **primero** ; b = **segundo** ; c = **tercero**

- Según el enunciado:

i) Suma de los tres números es 53: $\boxed{a+b+c=53}$

ii) El segundo es 1/3 del tercero: $\boxed{b=\frac{1}{3}c}$

iii) El primero excede al tercero en 4: $a-c=4 \Rightarrow \boxed{a=c+4}$

Reemplazamos (ii) y (iii) en (i):

$(c+4)+\frac{1}{3}c+c=53$; transponemos términos

$$2c+\frac{1}{3}c=53-4 \Rightarrow \frac{7}{3}c=49 \Rightarrow c=7.3 \Rightarrow \therefore \boxed{c=21}$$

Luego, reemplazamos el valor de c = 21; en (ii) y (iii):

En (ii): $b=\frac{1}{3}c \Rightarrow b=\frac{1}{3}.21 \Rightarrow \therefore \boxed{b=7}$

En (iii): $a=c+4 \Rightarrow a=21+4 \Rightarrow \therefore \boxed{a=25}$

Rpta: El menor de dicho número es el segundo cuy o valor es 7.

Ejemplo 10: El numerador de una fracción excede en 5 unidades al triple del denominador. Cuando simplificamos la fracción nos queda 17/4. Dar el denominador de dicha fracción.

Resolución:

Sea la fracción: $\boxed{\frac{N}{D}}$ .... (1)

Según el enunciado:

- El numerador de la fracción excede en 5 unidades al triple del denominador

$$N-5=3D$$

Donde: $\boxed{N = 3D + 5}$ .... **(2)**

Reemplazamos **(2)** en **(1)**; obtenemos: $\dfrac{3D+5}{D}$; ***por dato:*** $\boxed{\dfrac{3D+5}{D} = \dfrac{17}{4}}$

Resolviendo la ecuación se tiene:

$$4(3D + 5) = 17D \Rightarrow 12D + 20 = 17D \Rightarrow 20 = 5D \Rightarrow \therefore \boxed{D = 4}$$

Rpta: El denominador de dicha fracción es: 4

Ejemplo 11: Si la edad de Nataly es 3 veces la edad de Vanessa si sus edades suman 48 años. ¿Dentro de cuántos años, será la edad de Vanessa la mitad de la edad de Nataly?

Resolución:

* Sean las edades actuales — Nataly = 3x ; Vanessa = x

• ***Según el enunciado:*** $3x + x = 48 \Rightarrow 4x = 48 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 12}$

Luego, las edades actuales son:

Edad de Nataly = 3x = 3(12) = 36 años
Edad de Vanessa = x = 12 años

** Edades dentro de "n" años: — Nataly = (36 + n) ; Vanessa = (12 + n)

• ***Según el enunciado:***

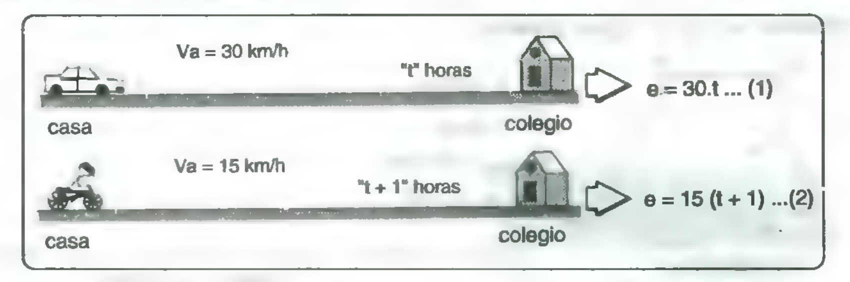
Dentro de cuántos años, será la edad de Vanessa la mitad de la edad de Nataly; obtenemos:

$$(12 + n) = \frac{1}{2}(36 + n) \Rightarrow 24 + 2n = 36 + n \Rightarrow \therefore \boxed{n = 12}$$

Rpta: Dentro de 12 años, la edad de Vanessa, será la mitad de la edad de Nataly.

Ejemplo 12: Nataly y Vanessa salen de su casa en dirección a su colegio, Nataly va en su automovil a 30 km/h y Vanessa va en su motocicleta a 15 km/h. ¿Cuántos kilométros hay entre su casa y el colegio, si ambas parten juntas, llegando Vanessa a su colegio una hora después de Nataly?

Resolución:



• Igualamos las ecuaciones **(1)** y **(2)**:

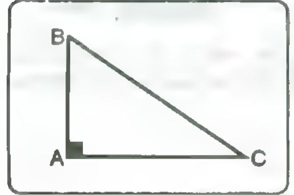
$$30.t = 15(t+1) \Rightarrow 30t = 15t + 15 \Rightarrow 15t = 15 \Rightarrow \therefore \boxed{t = 1}$$

Reemplazamos el valor de t = 1; en la ecuación **(1)**:

$$e = 30(1) \Rightarrow \therefore \boxed{e = 30 \text{ Km}}$$

Rpta. Entre su casa y el colegio hay 30 km.

Ejemplo 13: En la figura mostrada:



* $\overline{AB} = x + 1$
* $\overline{AC} = x + 2$
* $\overline{BC}^2 = 2x^2 + 17$

Calcula la longitud de los catetos y de la hipotenusa.

Resolución:

Por el Teorema de Pitágoras:

$$(\text{Hipotenusa})^2 = (\text{cateto})^2 + (\text{cateto})^2$$

Recuerda que:

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$; Reemplazando valores se obtiene:

$$2x^2 + 17 = (x+1)^2 + (x+2)^2$$

$$2x^2 + 17 = (x^2 + 2x + 1) + (x^2 + 4x + 4)$$

$$\cancel{2x^2} + 17 = \cancel{2x^2} + 6x + 5 \Rightarrow 17 - 5 = 6x$$

$$12 = 6x$$

$$\therefore \boxed{x = 2}$$

Luego, hallamos la longitud de los catetos y de la hipotenusa:

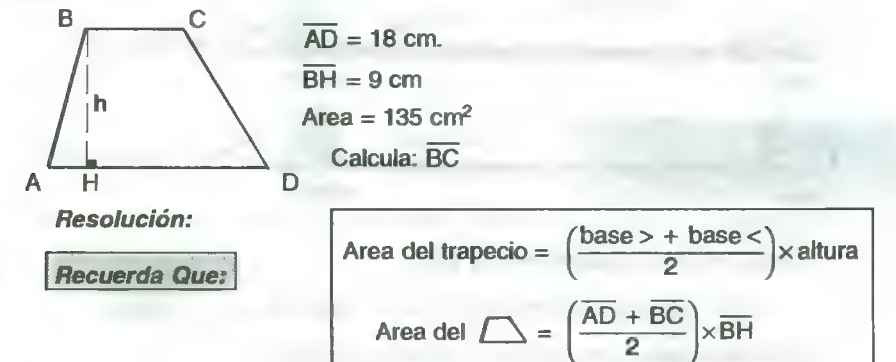
Rpta:

Cateto $\overline{AB} = x + 1 = 2 + 1 = 3$

Cateto $\overline{AC} = x + 2 = 2 + 2 = 4$

Hipotenusa $\overline{BC} = \sqrt{2x^2 + 17} = \sqrt{2(2)^2 + 17} = \sqrt{25} = 5$

Ejemplo 14: En la figura mostrada:



$\overline{AD} = 18$ cm.

$\overline{BH} = 9$ cm

Area = 135 cm^2

Calcula: $\overline{BC}$

Resolución:

Recuerda Que:

$$\text{Area del trapecio} = \left(\frac{\text{base} > + \text{ base} <}{2}\right) \times \text{altura}$$

$$\text{Area del } \triangle = \left(\frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2}\right) \times \overline{BH}$$

Reemplazando valores, obtenemos:

$$135 = \frac{(18 + \overline{BC})}{2} \times 9 \text{ cm} \Rightarrow \frac{\cancel{135}.2}{\cancel{9}} = 18 + \overline{BC}$$

$$15.2 = 18 + \overline{BC} \Rightarrow 30 = 18 + \overline{BC} \Rightarrow \therefore \boxed{\overline{BC} = 12} \text{ ***Rpta.***}$$

Ejemplo 15: Un sastre hace un cierto número de ternos, vende 5, y le quedan por vender más de 6; luego hace 6 temos más, vende 9 y le quedan por vender menos de 5. ¿Cuántos ternos hizo el sastre?

Resolución:

Sea: x = número de temos que hizo el sastre.

Según el enunciado:

Un sastre hace un cierto número de ternos, vende 5, y le que quedan por vender más de 6, obtenemos:

$$x - 5 > 6 \Rightarrow \boxed{x > 11} \text{ ...... (1)}$$

Luego hace 6 ternos más, vende 9 y le quedan por vender menos de 5, obteniendo:

$$[(x - 5) + 6] - 9 < 5 \Rightarrow x - 8 < 5 \Rightarrow \boxed{x < 13} \text{ ...... (2)}$$

(x - 5): ***Lo que le quedo de la venta anterior.***

De las expresiones (1) y (2); obtenemos:

$$x > 11 \text{ y } x < 13 \Rightarrow 11 < x < 13 \Rightarrow \text{ ***Donde:*** } \boxed{x = 12}$$

Rpta: El sastre hizo 12 ternos.

Ejemplo 16: Sabiendo que el quintuplo del número de monedas que hay dentro de una bolsa es tal que aumentado en 7 no es menor que 50 y que el cuádruplo del mismo número de monedas disminuido en 8 no puede exceder a 30. ¿Cuántas monedas hay en la bolsa?

Resolución:

Sea: x = número de monedas que hay en la bolsa

Según el enunciado:

- El quintuplo del número de monedas que hay dentro de la bolsa es tal que aumentado en 7 no es menor que 50; obtenemos:

$$5x + 7 \geq 50 \Rightarrow 5x \geq 43 \Rightarrow \therefore \boxed{x \geq 8{,}6} \text{ ...... (1)}$$

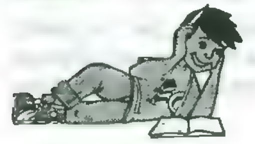
- Y que el cuádruplo del mismo número de monedas disminuido en 8 no puede exceder a 30, obteniendo:

$$4x - 8 \leq 30 \Rightarrow 4x \leq 38 \Rightarrow \therefore \boxed{x \leq 9{,}5} \text{ ...... (2)}$$

De las expresiones **(1)** y **(2)**; obtenemos:

$$x \geq 8{,}6 \text{ y } x \leq 9{,}5 \Rightarrow 8{,}6 \leq x \leq 9{,}5 \Rightarrow \textit{Donde: } \boxed{x = 9}$$

Rpta: En la bolsa hay 9 monedas



TALLER DE PROBLEMAS Nº 53

Problema 1 : Hallar el número que; aumentado en 20, equivale al triple del mismo número.

Resolución:

Rpta. 10

Problema 2 : El cuádruplo de un número excede en 12 al triple del mismo número. ¿ Cuál es el número ?

Resolución:

Rpta. 12

Problema 3 : Hallar tres números enteros consecutivos tales, que la suma de los 3/5 del menor con los 5/6 del mayor excede en 31 al mediano.

Resolución:

Rpta. 70 ; 71 y 72

Problema 4 : Antonio tiene 18 años más que Fidel. Hace 18 años, la edad de Antonio equivalía a los 5/2 de la edad de Fidel. Hallar la edad que tiene Antonio.

Resolución:

Rpta.

Problema 5 : Patricia tiene 52 años y Teresa 48. ¿Hace cuánto tiempo la edad de Teresa era los 9/10 de la edad de Patricia?

Resolución:

Rpta. 12 años

Problema 6 : La suma de dos números es 200. Dividiendo el primero por 16 y el segundo por 10, la diferencia de los cocientes es 6. ¿Cuáles son los números?

Resolución:

Rpta. 160 y 40

Problema 7 : Si a un número se le suma 5, se multiplica la suma por 3, se resta 6 del producto y se divide la diferencia por 7, se obtiene un número que tiene 5 unidades menos que el número inicial. ¿Cuál es el número?

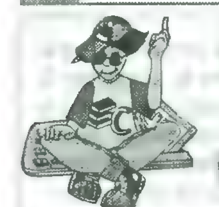
Resolución:

Rpta. 11

Problema 8 : El denominador de una fracción excede al doble del númerador en 1. Si al númerador se resta 4, el valor de la fracción es 1/3. Halle la fracción.

Resolución:

Rpta. 13/27





PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

NIVEL I

Problema 1 : La suma de tres números consecutivos es igual a 111. ¿Cuál es el mayor?

A) 36 **B)** 39 **C)** 38 **D)** 37 **E)** 35

Problema 2 : Las dos quintas partes de un número, mas 5 es igual a la mitad de dicho número. ¿Cuál es dicho número?

A) 30 **B)** 40 **C)** 60 **D)** 50 **E)** 80

Problema 3 : En un gallinero hay 5 pavos más que gallinas y 3 patos más que pavos. Si en total hay 49 aves. ¿Cuántas gallinas hay?

A) 20 **B)** 17 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 15

Problema 4 : La edad de Pedro es el doble de la edad de María, Si en cinco años más la suma de sus edades será 43 años. ¿Qué edad tiene actualmente Pedro?

A) 11 años **B)** 22 años **C)** 24 años
D) 26 años **E)** 28 años.

Problema 5 : El doble de un número aumentado en 12 es igual a su triple disminuido en 5. ¿Cuál es el número?

A) 27 **B)** 32 **C)** 39 **D)** 34 **E)** 29

Problema 6 : Tres números impares consecutivos suman 81. ¿Cuál es el menor?

A) 26 **B)** 25 **C)** 27 **D)** 28 **E)** 24

Problema 7 : ¿Qué número debe restarse de "p + 2" para obtener 5?

A) p + 2 **B)** p + 3 **C)** p - 3
D) p - 4 **E)** p + 7

Problema 8 : Un número multiplicado por 5; sumado con el mismo número multiplicado por 6 da 55. ¿Cuál es el número?

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

Problema 9 : La edad de Pedro excede a la de su hermano Luis en 10 años. Si la suma de dichas edades es de 50 años. Hallar la edad de Luis.

A) 30 años **B)** 20 años **C)** 10 años
D) 50 años **E)** 40 años

Problema 10 : Obtener un número que sumado al numerador y al denominador de la fracción 11/13; produzca la fracción 18/19

A) 24 **B)** 25 **C)** 35 **D)** 26 **E)** 28

Problema 11 : El cuádruple de la edad de Manuel aumentado en 3 años es igual al triple de su edad, aumentado en 28 años. ¿Cuál será la edad de Manuel dentro de 6 años?

A) 24 años **B)** 18 años **C)** 28 años
D) 22años **E)** 26 años

Problema 12 : Un número sumado

con su quinta parte es 12. La ecuación que representa esta situación es:

A) $x + 12 = x/5$
B) $x + x/5 = 12$
C) $12 + x/5 = x$
D) $x - x/5 = 12$
E) $x - 12 = x/5$

Problema 13 : "La suma de dos números pares consecutivos es 106". Esta se representa mediante la ecuación:

A) $2n + (2n + 1) = 106$
B) $4n + 1 = 106$
C) $4n + 2 = 106$
D) $n + n + 1 = 106$
E) $2n + 1 = 106$

Problema 14 : Si un niño tiene el triple de la edad que tenía hace 6 años. ¿Cuántos años tiene en la actualidad?

A) 3 años B) 6 años C) 9 años
D) 12 años E) 18 años

Problema 15 : Un poste está enterrado 2/5 de su longitud, 2/7 del resto está bajo agua y sobresalen 3m. ¿Cuál es la longitud del poste?

A) 6m B) 7m C) 9m
D) 9,5m E) 10 m.

Problema 16 : El doble de un número más el triple de su sucesor, más el doble del sucesor de éste es 147. Hallar el número.

A) 19 B) 20 C) 22 D) 30 E) 40

Problema 17 : La diferencia entre los cuadrados de dos números consecutivos es 103. ¿ Cuál es el mayor ?

A) 50 B) 51 C) 52 D) 53 E) 55

Problema 18 : En el triángulo ABC los lados AB = 3BC y BC = 1/2 CA. Si su perímetro es 84m. ¿Cuánto mide el lado mayor?

A) 14m B) 18m C) 42m
D) 28m E) 24m

Problema 19 : Un padre tiene 20 años más que su hijo. Dentro de 12 años, el padre tendrá el doble de la edad del hijo. ¿Cuántos años tiene el padre?

A) 24 años B) 28 años C) 26 años
D) 32 años E) 40 años

Problema 20 : Las dimensiones de un rectángulo están en la razón de 3 a 5 y su perímetro es 80m. Calcular cuanto mide de largo.

A) 15m B) 20m C) 25m
D) 30m E) 35m

Clave de Respuestas

1. C	2. D	3. C	4. B
5. C	6. A	7. C	8. A
9. B	10. B	11. D	12. B
13. C	14. C	15. B	16. B
17. C	18. C	19. B	20. C

NIVEL II

Problema 1 : La suma de dos múltiplos consecutivos de 6 es igual a 66. Hallar uno de los números ?

A) 24 B) 42 C) 36 D) 56 E) N.A.

Problema 2 : Iván ha resuelto $(2x + 3)$ problemas de ecuaciones, Alberto $(4x - 5)$ problemas y Jaime $(3x + 4)$ proble-

mas. Si en total se han resuelto 47 problemas. ¿Cuántos resolvió Iván?

A) 13 **B)** 15 **C)** 19 **D)** 21 **E)** 17

Problema 3 : El numerador de una cierta fracción es 8 menos que el denominador. Si los dos términos de dicha fracción se aumenta en 9 la fracción resultante es 2/3. Hallar la fracción original.

A) 5/13 **B)** 3/11 **C)** 7/15
D) 9/17 **E)** 11/19

Problema 4 : El denominador de una fracción es 14 más que el numerador. Si al numerador y al denominador se aumentan en 5, la nueva fracción es 11/18. Determinar la fracción original.

A) 11/25 **B)** 13/27 **C)** 15/29
D) 17/31 **E)** 19/33

Problema 5 : La suma de tres números enteros consecutivos es igual a la unidad aumentada en el doble del mayor. Calcular el menor de dichos números.

A) 4 **B)** 6 **C)** 2 **D)** 8 **E)** 3

Problema 6 : Al preguntársele a María por su edad, responde: "Si al quíntuplo de mi edad le quitas 8 años, obtendrás lo que me falta para tener 80 años". ¿Qué edad tuvo hace 5 años?

A) 20 años **B)** 16 años **C)** 18 años
D) 15 años **E)** 24 años

Problema 7 : En la figura mostrada:

ABCD es un rectángulo:

. $\overline{AB} = (8/5)x - 5,5$. $\overline{CD} = 0,4x + 1/2$

Calcular: $\overline{CD}$.

A) 4,5 **B)** 2,5 **C)** 6,5 **D)** 4 **E)** 3,5

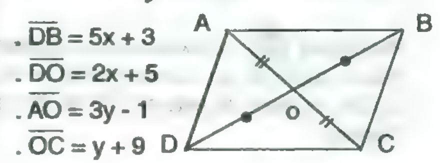
Problema 8 : Una persona gasta la mitad de su jornal diario en alimentarse y la tercera parte en otros gastos. Al cabo de 40 días ha ahorrado 600 soles. ¿Cuál es su jornal?

A) S/.60 **B)** S/.80 **C)** S/.90
D) S/.50 **E)** S/.70

Problema 9 : Lucila tiene "x" hermanos, Cecilia tiene "2x" hermanos; Patricia tiene "3x - 6" hermanos y Carolina tiene "2x + 1" hermanos. El único dato que te dan es que una de ellas es hija única. ¿Cuántos hermanos tiene Carolina?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

Problema 10 : En la figura mostrada:



Hallar la longitud de la diagonal $\overline{DB}$.

A) 36 **B)** 38 **C)** 34 **D)** 40 **E)** 42

Problema 11 : Si las edades de Nataly; Vanessa y Karina están representados por tres números pares consecutivos, siendo la suma de dichas edades 78 años. ¿Qué edad tiene la mayor?

A) 26 años B) 27 años C) 28 años
D) 29 años E) 25 años

Problema 12 : Si el lado de un cuadrado se duplica, su perímetro aumenta 40m. Calcular la medida del lado del cuadrado.

A) 8m B) 9m C) 10m
D) 12m E) 11m

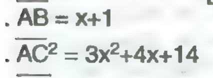
Problema 13 : A qué hora del día se cumple que las horas transcurridas y las horas que faltan son dos números enteros impares consecutivos.

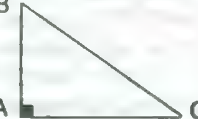
A) 10a.m B) 11p.m C) 11a.m
D) 9a.m E) 10p.m

Problema 14 : Una señora tuvo a los 28 años dos hijos mellizos, hoy las edades de los tres suman 73 años. ¿Qué edad tienen los mellizos?

A) 12 años B) 16 años C) 11 años
D) 15 años E) 18 años

Problema 15 : En la figura mostrada:





. Calcula la longitud de la hipotenusa

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

Problema 16 : Un señor distribuye su capital de la forma siguiente: 1/3 para sus herederos, 3/5 del resto para un hospital y 1/2 del nuevo resto para los pobres, quedándole todavía 200 dólares. ¿Cuál era su capital?

A) 1 200 dólares B) 1 400 dólares
C) 1 500 dólares D) 1 800 dólares
E) 1 600 dólares

Problema 17 : Si el lado de un cuadrado es aumentado en 8 unidades, su perímetro se triplica. ¿Cuánto mide el lado?

A) 6u B) 8u C) 4u D) 12u E) 5u

Problema 18 : Las edades de un matrimonio suman 62 años. Si se casaron hace 10 años y la edad de la novia era 3/4 de la edad del novio. ¿Qué edad tiene actualmente ella

A) 34 años B) 30 años C) 28 años
D) 26 años E) 24 años

Problema 19 : El numerador de una fracción excede en dos unidades al denominador. Si al numerador se le suma 3, la fracción queda equivalente a 4/3. Hallar la fracción.

A) 13/11 B) 19/17 C) 15/13
D) 17/15 E) 21/19

Problema 20 : Antonio tiene el doble de dinero que Gladiz y el triple de María. Si Antonio regala 14 soles a Gládiz y 35 soles a María los tres quedarían con igual cantidad. ¿Cuánto dinero tiene Gladys?

A) S/.126 B) S/.63 C) S/.42
D) S/.48 E) S/.76

Clave de Respuestas

1. C	2. A	3. C	4. D
5. C	6.D	7. B	8. C
9. D	10. B	11. C	12. C
13. C	14. D	15. C	16. C
17. C	18. C	19. D	20. B





PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE INECUACIONES



Problema 1: ¿Cuántos números naturales no cumplen la condición de que su tercera parte, más 8 sea menor que su quíntuplo?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3
D) Todos **E)** Ninguno

Problema 2: ¿Cuántos números naturales cumplen la condición de que su décima parte es mayor o igual que su mitad, disminuida en dos?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 5 **E)** 6

Problema 3: "La quinta parte de un número disminuido en 3, es mayor que el doble de él". Esta proposición se escribe algebraicamente como:

A) $\frac{x-3}{5}>2x$ **B)** $\frac{x}{5}-3>2x$

C) $\frac{x}{5}-3<2x$ **D)** $\frac{x-3}{5}<2x$

E) $x - 10 < 2x$

Problema 4: Los números enteros tales que su cuarta parte es menor que su mitad, disminuido en 2; son los números:

A) menores que - 8
B) menores que 8
C) mayores que - 8
D) mayores que 8
E) no hay

Problema 5: Si al duplo de la edad de una persona se resta 17 el resultado es menor que 35; pero si a la mitad de la edad, se suma 3 el resultado es mayor que 15. ¿Cuál es su edad?

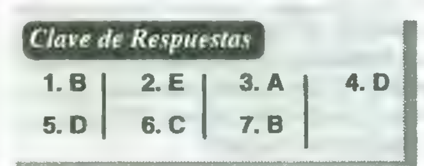
A) 26 años **B)** 23 años **C)** 24 años
D) 25 años **E)** 28 años

Problema 6: Se sabe que el cuádruplo de un número de objetos, que hay dentro de un depósito es tal que disminuido en 5; no puede exceder de 35, y que el quíntuplo del mismo número de objetos, aumentedo en dos, no es menor que 50, este número es:

A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 14

Problema 7: Un comerciante adquirió cierto número de artículos, de los que vendió 70 y le quedaron más que la mitad, al día siguiente le devolvieron 6; pero logró vender 36, después de lo cual le quedaron menos que 42. ¿Cuántos artículos formaban el lote?

A) 140 **B)** 141 **C)** 142
D) 151 **E)** 161



Clave de Respuestas

1. B	2. E	3. A	4. D
5. D	6. C	7. B	

Ejercicios tomados en los concursos de matemática para escolares organizados por las Academias: César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Alfa, Sigma.

1. ¿Cuál es el número que multiplicado por 5, añadiendo 6 a este producto y dividiendo esta suma entre 2, se obtiene 23.

   a) 5 b) 12 c) 7 d) 15 e) 8

Resolución:

Sea el número pedido = x

• **Del enunciado**, planteamos la ecuación:

$$\frac{x.5+6}{2}=23 \Rightarrow 5x+6=46 \Rightarrow \not{5}x=4\not{0} \Rightarrow \therefore \boxed{x=8}$$

Luego: El número pedido es: 8 ***Rpta. e***

2. Hallar tres números enteros consecutivos tales que la suma de los 2/13 del mayor con los 2/3 del número intermedio equivalga al número menor disminuido en 8. Dar como respuesta el número intermedio.

   a) 48 b) 49 c) 50 d) 51 e) 52

Resolución:

Sean los tres números enteros consecutivos:

x = número menor	**x + 1** = número intermedio	**x + 2** = número mayor

• **Del enunciado**, planteamos la ecuación:

$$\frac{2}{13}(x+2)+\frac{2}{3}(x+1)=x-8$$

$$\frac{6(x+2)+26(x+1)}{39}=x-8$$

Recuerda que:

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{A.D+B.C}{B.D}$$

$$6(x+2)+26(x+1)=39(x-8)$$

$$6x+12+26x+26=39x-312 \Rightarrow 38+312=39x-32x$$

$$350=7x \Rightarrow \therefore \boxed{x=50}$$

Luego: El número intermedio es: 51 ***Rpta. d***

3. Liz tenía cierta suma de dinero. Gasto S/. 30 en libros y los 3/4 de lo que le quedaba después del gasto anterior en ropa. Si le quedan S/. 30. ¿Cuánto tenía al principio?

   a) S/. 100 b) S/. 120 c) S/. 250 d) S/. 150 e) S/. 180

Resolución:

Sea: x = Suma de dinero que tenia al principio

Del enunciado; obtenemos:

- Gasto S/. 30 en libros ⇒ **Quedándole: (x - 30)**

- Gasta en ropa: $\frac{3}{4}(x-30)$ ⇒ **Quedándole: $(x-30)-\frac{3}{4}(x-30)$**

$$30 = \frac{1}{4}(x-30)$$

Resolviendo está ecuación; se tiene:

$30.4 = (x - 30) \Rightarrow \therefore$ $\boxed{x = S/.\ 150}$

Luego: La suma de dinero que tenía al principio era de S/. 150 ***Rpta. d***

4. Hace 2 años tenía la cuarta parte de la edad que tendré dentro de 22 años. Dentro de cuántos años tendré el doble de la edad que tenía hace 4 años?

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 10

Resolución:

Sea: x = mi edad actual

	Edad hace 2 años	*Edad actual*	*Edad dentro de 22 años*
	x - 2	x	x + 22

- **Del enunciado:** Hace 2 años tenía la cuarta parte de la edad que tendré dentro de 22 años; obtenemos:

$$(x-2) = \frac{1}{4}(x+22) \Rightarrow 4x - 8 = x + 22 \Rightarrow 3x = 30 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 10}$$

Luego: Mi edad actual es de 10 años

- **Del enunciado:** Dentro de cuántos años tendré el doble de la edad que tenía hace 4 años, planteamos la ecuación:

	Edad hace 4 años	*Edad actual*	*Edad dentro de "n" años*
	10 - 4 = 6 años	10 años	(10 + n)

$$(10 + n) = 2(6) \Rightarrow \therefore \boxed{n = 2}$$ ***Rpta. a***

5. En 3 días juanita ganó 185 soles. Si cada día ganó los 3/4 de lo que ganó el día anterior. ¿Cuánto gano el primer día? Dar como respuesta la suma de los digitos del número encontrado.

a) 12 b) 7 c) 9 d) 6 e) 8

Resolución:

Sea: - Lo que ganó el primer día = x

- Lo que ganó el segundo día = $\frac{3}{4}x$

- Lo que ganó el tercer día = $\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}x\right) = \frac{9}{16}x$

• **Del enunciado:** En 3 días juanita ganó 185 soles, obtenemos:

$$x + \frac{3}{4}x + \frac{9}{16}x = 185$$

Damos común denominador en el primer miembro:

$$\frac{16x + 12x + 9x}{16} = 185 \Rightarrow \frac{37x}{16} = 185 \Rightarrow x = \frac{\cancel{185}.16}{\cancel{37}} \Rightarrow \therefore \boxed{x = 80}$$

Luego; el primer día ganó 80 soles; siendo la suma de sus cifras del número encontrado: 8 + 0 = 8

Rpta. e

6. Hace 5 años la edad de un padre era 6 veces la edad de su hijo. ¿Qué edad tiene el padre actualmente si dentro de 15 años la edad del hijo será la mitad de la edad de su padre?

a) 30 años b) 36 años c) 35 años

d) 45 años e) 60 años

Resolución:

	Edad hace (5) años	*Edad actual*	*Edad dentro de "n" años*
Padre	6x	(6x + (5))	(6x + 5) + 15 = 6x + 20
Hijo	x	(x + (5))	(x + 5) + 15 = x + 20

• **Del enunciado, obtenemos:** $(x + 20) = \frac{1}{2}(6x + 20)$

$$2x + 40 = 6x + 20$$

Luego:

$$20 = 4x \Rightarrow \therefore \boxed{x = 5}$$

La edad actual del padre es: 6x + 5 = 6(5) + 5 = 35 años

Rpta. c

7. Un padre va al cine con sus hijos. Si compra entradas de 5 soles, entran sólo los hijos, pero si compra de 4 soles, entra él también. ¿Cuánto pagó por las entradas de todos?

a) 18 soles b) 28 soles c) 25 soles d) 20 soles e) 24 soles

Resolución:

Sea: x = número de hijos

- **Del enunciado:** Si compra entradas de 5 soles, entran sólo los hijos.

$$\boxed{\text{Lo que pagó} = 5x} \quad \text{.........} \ \mathbf{(1)}$$

- **Del enunciado:** pero si compra de **4** soles entra él también.

$$\boxed{\text{Lo que pagó} = 4(x+1)} \quad \text{.........} \ \mathbf{(2)}$$

Igualamos las ecuaciones **(1)** y **(2)**:

$$5x = 4(x+1) \Rightarrow 5x = 4x + 4 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 4}$$

- Reemplazamos el valor de **x = 4**, en **(1)** ó **(2)**.

En (1): Lo que pagó = 5(4) = 20 soles

Luego: $\boxed{\text{Lo que pagó por las entradas de todos es 20 soles}}$ ***Rpta. d***

6. Resolver: $\dfrac{x+m}{m} - \dfrac{x+n}{n} = \dfrac{m^2+n^2}{mn} - 2$

a) m b) n c) m + n d) m - n e) n - m

Resolución:

Damos común denominador en los dos miembros:

$$\frac{(x+m)n-(x+n)m}{\cancel{mn}} = \frac{m^2+n^2-2mn}{\cancel{mn}}$$

$$xn + \cancel{mn} - xm - \cancel{nm} = \underbrace{m^2 - 2mn + n^2}$$

$$x(n-m) = (m-n)^2$$

$$x(n-m) = (n-m)^2 \Rightarrow \therefore \boxed{x = n - m} \ \textit{\textbf{Rpta. e}}$$

Recuerda que:

$(m - n)^2 = (n - m)^2$

Sistemas de Ecuaciones de Primer Grado

Ecuación de Primer Grado con dos incógnitas

Ya has visto que:

Si: P(x) es un polinomio, la expresión:

P(x) = 0, es una ecuación con una incógnita.

Si además P(x) es un polinomio de primer grado, entonces:

$P(x) = 0$, es una **ecuación de primer grado con una variable.**

Ejemplo: $3x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{3} \Rightarrow \therefore x = 2 \Rightarrow \therefore$ $\boxed{C.S. = \{2\}}$

La ecuación de primer grado con una incógnita tiene una sola raíz. El conjunto solución es unitario.

Consideremos ahora el polinomio $P(x ; y)$; entonces la expresión:

$P(x ; y) = 0$; es una ecuación con dos incógnitas.

Si en particular, $P(x ; y)$ es un polinomio de primer grado, entonces la expresión:

$P(x, y) = 0$, es una **ecuación de primer grado con dos incógnitas**

Ejemplos:

a) $5x - 3y + 2 = 0$
b) $x + 2y = 0$
c) $3x - y = 6$

Son ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Consideremos la tercera ecuación osea: $3x - y = 6$ que podemos escribir bajo la forma $P(x ; y) = 0$, veamos:

$$3x - y = 6 \Rightarrow 3x - y - 6 = 0$$

Para encontrar los pares de valores $(x ; y)$ que verifican la ecuación **(c)**; conviene despejar "y".

$3x - y = 6 \Rightarrow -y = 6 - 3x$; cambiamos de signo a cada término.

$$\boxed{y = 3x - 6} \;\; .... \; (I)$$

Donde a cada valor de "x" corresponde un valor para "y"; veamos:

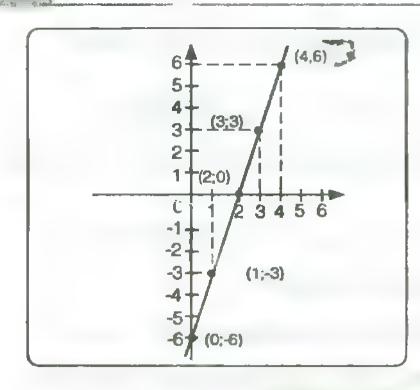
x	y = 3x - 6	pares ordenados
0	$y = 3(0) - 6 = -6$	$(0; -6)$
1	$y = 3(1) - 6 = -3$	$(1; -3)$
2	$y = 3(2) - 6 = 0$	$(2; 0)$
3	$y = 3(3) - 6 = 3$	$(3; 3)$
4	$y = 3(4) - 6 = 6$	$(4; 6)$

Cada par $(x ; y)$ que verifica la igualdad **(I)**, es una raíz de la ecuación. La ecuación de primer grado con dos incógnitas tiene **infinita raices.**

Luego:

$C.S. = \{(0; -6), (1; -3), (2; 0), (3; 3), (4; 6), ...\}$

El conjunto solución (C.S) está representado por el conjunto de puntos de la recta $\mathbf{y = 3x - 6}$.



** **Las coordenadas de cualquier punto de la recta verifican la ecuación.***

Ejercicios de Aplicación

- Halla tres elementos del conjunto solución de cada una de las siguientes ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

a) $-x + 2y - 2 = 0$	c) $-2x - y + 4 = 0$
b) $3x - y + 5 = 0$	d) $-x + y + 3 = 0$

Representa gráficamente el conjunto solución en cada caso

3.9 Sistemas de dos Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Consideremos un conjunto de dos ecuaciones con dos incógnitas:

Ejemplo 1: $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(x\,;\,y) = 0 \\ Q(x\,;\,y) = 0 \end{cases}$

El conjunto de dos ecuaciones $P(x\,;\,y) = 0$ y $Q(x\,;\,y) = 0$ se llama sistema de dos ecuaciones. Si ambas ecuaciones son de primer grado, decimos que es un **Sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.** Para indicar que forman un sistema, se abarcan con una llave.

Resolución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas significa hallar el conjunto de raices comunes, es decir, la intersección de los conjuntos solución de ambas ecuaciones.

Si: $C.S_1$. es el conjunto solución de $P(x\,;\,y) = 0$
y $C.S_2$. es el conjunto solución de $Q(x\,;\,y) = 0$

Entonces, el conjunto solución del sistema se expresa:

$$\boxed{C.S. = C.S_1 \cap C.S_2}$$

Hallamos las raices de la ecuación:

$2x - y = 0 \Rightarrow$ ***Donde:*** $\boxed{y = 2x}$

x	y = 2x
-3	$y = 2(-3) = -6$
-2	$y = 2(-2) = -4$
-1	$y = 2(-1) = -2$
0	$y = 2(0) = 0$
1	$y = 2(1) = 2$
2	$y = 2(2) = 4$
3	$y = 2(3) = 6$
4	$y = 2(4) = 8$

Hallamos las raices de la ecuación:

$x + y - 9 = 0 \Rightarrow$ ***Donde:*** $\boxed{y = 9 - x}$

x	y = 9 - x
-3	$y = 9 - (-3) = 12$
-2	$y = 9 - (-2) = 11$
-1	$y = 9 - (-1) = 10$
0	$y = 9 - (0) = 9$
1	$y = 9 - (1) = 8$
2	$y = 9 - (2) = 7$
3	$y = 9 - (3) = 6$
4	$y = 9 - (4) = 5$

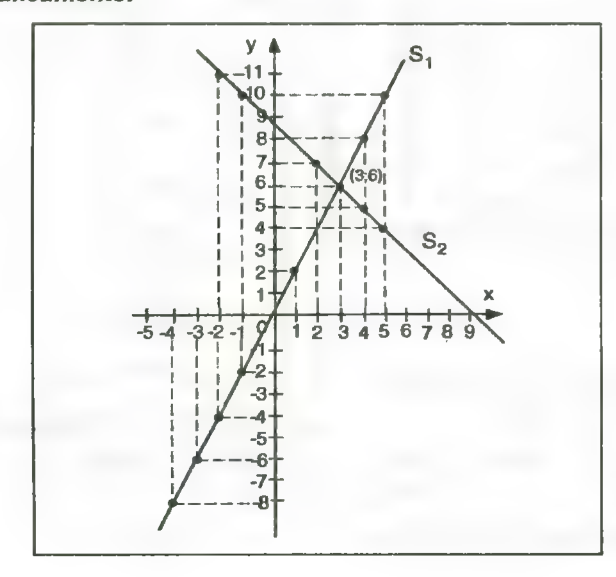
Luego escribimos los conjunto solución $C.S_1$ y $C.S_2$.

$C.S_1 = \{....(-3; -6), (-2; -4), (-1; -2), (0; 0), (1; 2), (2; 4), (3; 6), (4; 8) ....\}$

$C.S_2 = \{....(-3; 12), (-2; 11), (-1; 10), (0 ; 9), (1 ; 8), (2; 7), (3; 6), (4; 5) ......\}$

$$\boxed{C.S. = S_1 \cap S_2 = \{(3; 6)\}}$$

Gráficamente:



En este caso las rectas se cortan en un punto.

El conjunto solución es unitario. Existe un sólo par de valores (x ; y) que verifica la ecuación.

$\boxed{x = 3}$; $\boxed{y = 6}$

Decimos que el sistema es **determinado.**

Ejemplo 2:
$$\begin{cases} x - y = 3 & \text{........ (I)} \\ 2x - 2y - 6 = 0 & \text{........ (II)} \end{cases}$$

Resolución:

De la ecuación (I): ➧ $x - y = 3$; despejamos "y"

$$\boxed{y = x - 3}$$

De la ecuación (II): ➧ $2x - 2y - 6 = 0$; despejamos "y"

$$2y = 2x - 6 \Rightarrow \boxed{y = \frac{2x-6}{2}}$$

Hallamos las raices de la ecuación:

$$\boxed{y = x - 3}$$

x	y = x - 3
-2	$y = -2 - 3 = -5$
-1	$y = -1 - 3 = -4$
0	$y = 0 - 3 = -3$
1	$y = 1 - 3 = -2$
2	$y = 2 - 3 = -1$
3	$y = 3 - 3 = 0$

Hallamos las raices de la ecuación:

$$\boxed{y = \frac{2x-6}{2}}$$

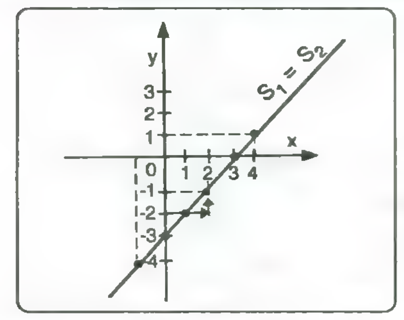
x	$y = \frac{2x-6}{2}$
-2	$y = \frac{2(-2)-6}{2} = -5$
-1	$y = \frac{2(-1)-6}{2} = -4$
0	$y = \frac{2(0)-6}{2} = -3$
1	$y = \frac{2(1)-6}{2} = -2$
2	$y = \frac{2(2)-6}{2} = -1$
3	$y = \frac{2(3)-6}{2} = 0$

Luego escribimos los conjuntos solución $C.S_1$ y $C.S_2$

$C.S_1$ = {...... (-2; -5), (-1; -4), (0; -3), (1; -2), (2; -1), (3; 0) ....}
$C.S_2$ = {...... (-2; -5), (-1; -4), (0; -3), (1; -2), (2; -1), (3; 0) ....}

Los conjuntos solución son iguales; osea: $C.S_1 \cap C.S_2 = C.S_1$

Las rectas que representan ambas ecuaciones coinciden.



El conjunto solución del sistema tiene infinito pares que satisfacen ambas ecuaciones.

Se dice que el sistema es **indeterminado.**

Ejemplo 3:
$$\begin{cases} x - y - 3 = 0 & \text{......... (I)} \\ 2x - 2y = -4 & \text{......... (II)} \end{cases}$$

Resolución:

De la ecuación (I): $x - y - 3 = 0$; despejamos "y"

$$\boxed{y = x - 3}$$

De la ecuación (II): $2x - 2y = -4$; sacamos mitad a cada término

$x - y = -2$, despejamos "y"

$$\boxed{y = x + 2}$$

Hallamos las raices de la ecuación: $\boxed{y = x - 3}$

x	y = x - 3
-3	y = -3 - 3 = -6
-2	y = -2 - 3 = -5
-1	y = -1 - 3 = -4
0	y = 0 - 3 = -3
1	y = 1 - 3 = -2
2	y = 2 - 3 = -1
3	y = 3 - 3 = 0

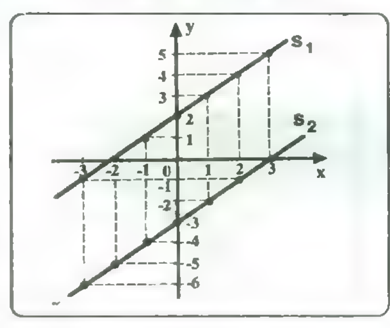
Hallamos las raices de la ecuación: $\boxed{y = x + 2}$

x	y = x + 2
-3	y = -3 + 2 = -1
-2	y = -2 + 2 = 0
-1	y = -1 + 2 = 1
0	y = 0 + 2 = 2
1	y = 1 + 2 = 3
2	y = 2 + 2 = 4
3	y = 3 + 2 = 5

Luego escribimos los conjuntos solución $C.S_1$ y $C.S_2$.

$C.S_1$ = {....(-3; -6), (-2; -5), (-1; -4), (0; -3), (1; -2), (2; -1), (3; 0) ....}

$C.S_2 = \{.... (-3; -1), (-2; 0), (-1; 1), (0; 2), (1; 3), (2; 4), (3; 5) ....\}$



Los conjuntos solución no tienen elementos comunes; osea:

$$C.S = C.S_1 \cap C.S_2 = \phi$$

El conjunto solución del sistema es vacio ningún par (x ; y) satisface ambas ecuaciones. Se dice que el sistema es **incompatible.**

En General, diremos:

Dos o más ecuaciones forman un sistema o son simultáneas cuando tienen las mismas soluciones.

Ejercicios de Aplicación

- Escribe el conjunto solución del sistema. Represéntalo gráficamente y decide si es determinado, indeterminado o incompatible.

a) $\begin{cases} x + y = -1 \\ 2x - 2y = -6 \end{cases}$	c) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = -4 \end{cases}$	e) $\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x - 4y = 2 \end{cases}$
b) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x - 4y = 2 \end{cases}$	d) $\begin{cases} 2x - y = 10 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$	f) $\begin{cases} -2x + y = 3 \\ x - y = 2 \end{cases}$

3.9.1 Métodos de Resolución de un Sistema de dos Ecuaciones de Primer Grado con dos incógnitas

Existen diversos métodos para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

En los ejemplos anteriores has representado gráficamente el conjunto solución.

La representación grafica de las ecuaciones constituye uno de los procedimientos para encontrar el conjunto solución.
Ahora te mostraremos algunos métodos algebraicos más usuales. Generalmente se procede de la manera siguiente:

1. **Se elimina una de las incógnitas** para transformar el sistema de dos ecuaciones con dos incóngitas en una ecuación de primer grado con una incógnita.

2. **Se resuelve la ecuaciónes de primer grado** con una incógnita por los métodos conocidos.

3. **Se reemplaza la raíz hallada** en una de las ecuaciones del sistema y la expresión resultante permite calcular la otra incógnita.

Observa que el nombre de cada uno de los métodos deriva del recurso utilizado para eliminar una de las incógnitas.

I. Método por sustitución:

Sea el sistema: $\begin{cases} 4x + y = 4 \\ 2x - 3y = -5 \end{cases}$

*1. Despejemos **y** en la primera ecuación:*

$$\boxed{y = 4 - 4x} \quad \text{.......} \ \textbf{(I)}$$

***Sustituimos** el valor de **y** en la segunda ecuación:*

$2x - 3y = -5 \Rightarrow 2x - 3(4 - 4x) = -5$; hemos obtenido **por sustitución** una ecuación de primer grado con una incógnita.

2. Resolviendo la ecuación, se obtiene:

$$2x - 12 + 12x = -5$$

$$14x = -5 + 12 \Rightarrow 14x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{14} \Rightarrow \therefore \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

*3. Reemplazamos el valor de **x** en la ecuación **(I)**:*

$$y = 4 - 4x \Rightarrow y = 4 - 4\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = 4 - 2 \Rightarrow \therefore \boxed{y = 2}$$

Luego: **El conjunto solución del sistema es: C.S = {1/2; 2}**

¿Hubieras obtenido el mismo resultado despejando cualquiera de las incógnitas en cualquiera de las dos ecuaciones?

> ***Observación:***
>
> *Si alguna de las incógnitas carece de coeficiente conviene despejar esta incógnita porque evitamos las denominadores. Por eso hemos elegido eliminar en la primera ecuación. Entonces:*
>
> $\boxed{y = 4 - 4x}$ *; no tiene deminadores.*

II. Método por igualación:

Sea el sistema: $2x + y = -1$
$5x + 3y = -5$

*1. Despejamos **x** en ambas ecuaciones:*

De la primera ecuación: $\boxed{x = \frac{-1-y}{2}}$ .... **(1)**

De la segunda ecuación: $\boxed{x = \frac{-5-3y}{5}}$ .... **(2)**

Igualamos los dos valores de ***x****.*

$\frac{-1-y}{2} = \frac{-5-3y}{5}$; Hemos obtenido **por igualación** una ecuación de primer grado con una incógnita.

2. *Resolvemos la ecuación obtenida:*

$$5(-1 - y) = 2(-5 - 3y)$$

$$-5 - 5y = -10 - 6y \Rightarrow -5y + 6y = -10 + 5 \Rightarrow \therefore \boxed{y = -5}$$

3. *Reemplazamos el valor de y en la ecuación **(I)** ó **(II)**:*

En la ecuación (I): $x = \frac{-1-y}{2} \Rightarrow x = \frac{-1-(-5)}{2} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 2}$

Luego: El conjunto solución del sistema es: C.S. = {2 ; -5}

III. Método de las sumas o restas (Reducción)

a) *Sea el sistema:* $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ -x - 3y = -7 \end{cases}$

1. Es facil ver que puede eliminarse la incógnita **"x" sumando** miembro a miembro.

$$\begin{array}{r} x + 2y = 4 \\ -x - 3y = -7 \\ \hline \textbf{Σ.M.A.M: } -y = -3 \Rightarrow \boxed{y = 3} \end{array}$$

2. Reemplazamos el valor de y en la primera ó segunda ecuación:

En la primera ecuación: $x + 2(3) = 4$

$$x = 4 - 6 \Rightarrow \boxed{x = -2}$$

Luego: El conjunto solución del sistema es: C.S. = {-2, 3}

b) *Sea el sistema:* $\begin{cases} 3x + 3y = 9 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$

1. Es fácil ver que puede eliminarse la incógnita **y** restando miembro a miembro.

Para restar las dos ecuaciones, sumamos a la primera la opuesta de la segunda.

$$3x + \cancel{3y} = 9$$
$$-x - \cancel{3y} = -1$$

$$\Sigma.M.A.M: \; 2x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{2} \Rightarrow \boxed{x = 4}$$

2. Reemplazamos el valor de **x** en la primera o segunda ecuación.

En la segunda ecuación: $x + 3y = 1$

$$4 + 3y = 1 \Rightarrow 3y = -3 \Rightarrow \boxed{y = -1}$$

Luego: El conjunto solución del sistema es: C.S. = {4; -1}

c) *Sea el sistema:* $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x - 3y = 17 \end{cases}$

Si quieres eliminar una incógnita debes lograr que sus coeficientes sean números opuestos.

1. Para eliminar "**x**" se multiplica la primera ecuación por -2.

por -2 $\Rightarrow \quad 2x + y = 1 \quad \Rightarrow \quad \cancel{-4x} - 2y = -2$

$\qquad 4x - 3y = 17 \quad \Rightarrow \quad \cancel{4x} - 3y = 17$

$$\Sigma.M.A.M: \; -5y = 15 \Rightarrow y = \frac{15}{-5} \Rightarrow \therefore \boxed{y = -3}$$

2. Reemplazamos el valor de **y** en la primera o segunda ecuación:

En la primera ecuación: $2x + y = 1$

$$2x + (-3) = 1 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 2}$$

Luego: El conjunto solución del sistema es: C.S. = {2, -3}

d) *Consideremos el sistema del ejemplo anterior:*

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x - 3y = 17 \end{cases}$$

Si ahora queremos eliminar **y** debemos lograr que sus coeficientes sean números opuestos.

1. *Para eliminar "y" multiplicamos la primera ecuación por 3.*

$$\text{por 3} \Rightarrow \quad 2x + y = 1 \quad \Rightarrow \quad 6x + \cancel{3y} = 3$$
$$4x - 3y = 17 \quad \Rightarrow \quad 4x - \cancel{3y} = 17$$
$$\Sigma.\text{M.A.M:} \quad 10x = 20 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

2. *Reemplazamos "**x**" en la primera o segunda ecuación:*

En la primera ecuación: $2x + y = 1$

$$2(2) + y = 1 \Rightarrow \boxed{y = -3}$$

Luego: El conjunto solución del sistema es: C.S. = {2; -3}

e) *Sea el sistema:* $\begin{cases} 2x - 2y = -12 \\ 3x + 5y = 6 \end{cases}$

Si pretendemos eliminar **x**, no existe un número natural que multiplicado por **2** sea igual a **3**.

1. En este caso multiplicamos la primera ecuación por 3 (coeficiente de **x** en la segunda ecuación), y la segunda ecuación por -2 (coeficiente de **x**; cambiando de signo, en la primera) para poder reducir.

$$\text{por 3} \Rightarrow \quad 2x - 2y = -12 \Rightarrow \cancel{6x} - 6y = -36$$
$$\text{por -2} \Rightarrow \quad 3x + 5y = 6 \quad \Rightarrow -\cancel{6x} - 10y = -12$$
$$\Sigma.\text{M.A.M:} \ -16y = -48 \Rightarrow y = \frac{\cancel{-48}}{\cancel{-16}} \Rightarrow \therefore \boxed{y = 3}$$

2. Reemplazamos el valor de **y** en la primera ecuación o segunda ecuación:

En la primera ecuación: $2x - 2y = -12$

$$2x - 2(3) = -12 \Rightarrow 2x = -12 + 6$$
$$2x = -6 \Rightarrow \therefore \boxed{x = -3}$$

¿Cómo procedemos para eliminar **y**? Resuélvelo y compara los resultados.

Ejercicios Resueltos

1. Resolver el sistema: $\begin{cases} 3x + 2y = 16 \\ 5x - 3y = -5 \end{cases}$

Resolución:

Multiplicamos la primera ecuación por 3 y la segunda por 2, se tiene el sistema equivalente.

por 3 $\Rightarrow$ $3x + 2y = 16 \Rightarrow 9x + 6y = 48$

por 2 $\Rightarrow$ $5x - 3y = -5 \Rightarrow 10x - 6y = -10$

Σ.M.A.M: $19x = 38 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 2}$

Reemplazamos el valor de "x" en la primera ecuación:

$$3x + 2y = 16 \Rightarrow 3(2) + 2y = 16 \Rightarrow 2y = 10 \Rightarrow \therefore \boxed{y = 5}$$

Luego: El conjunto solución del sistema es: C.S. {2 ; 5}

2. Resolver el sistema: $\begin{cases} x - y = -1 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$

Multiplicamos la primera ecuación por 2.

por 2 $\Rightarrow$ $x - y = -1 \Rightarrow 2x - 2y = -2$

$3x + 2y = 12 \Rightarrow 3x + 2y = 12$

Σ.M.A.M: $5x = 10 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 2}$

Reemplazamos el valor de "x" en la primera ecuación:

$$x - y = -1 \Rightarrow 2 - y = -1 \Rightarrow \therefore \boxed{y = 3}$$

Luego: El conjunto solución del sistema es: C.S. {2 ; 3}

3. Resolver el sistema: $\begin{cases} \dfrac{x+3}{y} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{x}{y-4} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$

Resolución:

De la primera ecuación: $\dfrac{x+3}{y} = \dfrac{1}{3}$; obtenemos:

$$3(x + 3) = y.1 \Rightarrow 3x + 9 = y$$

$$\boxed{3x - y = -9} \quad .... \text{(I)}$$

De la segunda ecuación: $\dfrac{x}{y-4} = \dfrac{1}{4}$; obtenemos:

$$4x = 1.(y - 4) \Rightarrow \therefore \boxed{4x - y = -4} \quad ...... \text{(II)}$$

Restamos miembros a miembro las ecuaciones **(I)** y **(II)**:

$$3x - y = -9$$
$$4x - y = -4$$

–.M.A.M: $-x = -5 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 5}$

Reemplazamos el valor de "x" en la ecuación **(I)**:

$$3x - y = -9 \Rightarrow 3(5) - y = -9 \Rightarrow 15 - y = -9 \Rightarrow \therefore \boxed{y = 24}$$

Luego: El conjunto solución del sistema es: C.S. {5 ; 24}

4. Resolver el sistema: $\begin{cases} \dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}=16 \\ \dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{y}=-7 \end{cases}$

Resolución:

Este sistema se convierte en lineal o de primer grado, tomando nuevas incógnita; veamos:

$$\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=16 \Rightarrow 3\left(\frac{1}{x}\right)+2\left(\frac{1}{y}\right)=16 \quad \text{.......... (I)}$$

$$\frac{4}{x}-\frac{3}{y}=-7 \Rightarrow 4\left(\frac{1}{x}\right)-3\left(\frac{1}{y}\right)=-7 \quad \text{.......... (II)}$$

Hacemos: $\boxed{\frac{1}{x}=a}\ ;\ \boxed{\frac{1}{y}=b}$

Reemplazamos estos valores en **(I)** y **(II)**:

$$3a + 2b = 16 \quad \text{.......... (I)}$$
$$4a - 3b = -7 \quad \text{.......... (II)}$$

Multiplicamos por 3 la primera ecuación y por 2 la segunda ecuación:

por 3 $\Rightarrow 3a + 2b = 16 \Rightarrow 9a + 6b = 48$

por 2 $\Rightarrow 4a - 3b = -7 \Rightarrow 8a - 6b = -14$

Σ.M.A.M: $17a = 34 \Rightarrow \therefore \boxed{a = 2}$

Reemplazamos el valor de "a" en la ecuación **(I)**:

$$3a + 2b = 16 \Rightarrow 3(2) + 2b = 16 \Rightarrow 2b = 10 \Rightarrow \therefore \boxed{b = 5}$$

Volviendo a las primeras incógnitas; osea:

i) $\boxed{\frac{1}{x}=a} \Rightarrow \frac{1}{x}=2 \Rightarrow \therefore \boxed{x=\frac{1}{2}}$ ii) $\boxed{\frac{1}{y}=b} \Rightarrow \frac{1}{y}=5 \Rightarrow \therefore \boxed{y=\frac{1}{5}}$

Luego: El conjunto solución del sistema es: C.S. {1/2 ; 1/5}

5. Resolver el sistema: $\begin{cases} (a+c)x - y = bc \\ x + y = a + b \end{cases}$

Resolución:

$$(a+c)x - y = bc$$
$$x + y = a + b$$

Σ.M.A.M: $(a+c)x + x = bc + a + b$; sacamos factor común "x" en el primer miembro.

$$x[(a+c)+1] = a + b + bc$$

$$\therefore \boxed{x = \frac{a+b+bc}{a+c+1}}$$

Reemplazamos el valor de "x" en la segunda ecuación:

$$x + y = a + b \Rightarrow \frac{a+b+bc}{a+c+1} + y = a + b \Rightarrow \therefore \boxed{y = a + b - \frac{a+b+bc}{a+c+1}}$$

Luego: El conjunto solución del sistema es:

$$C.S. = \left\{\frac{a+b+bc}{a+c+1} ; a + b - \frac{a+b+bc}{a+c+1}\right\}$$

6. Resolver el sistema: $\begin{cases} -2x - y = -\frac{1}{3} \quad \text{......... (1)} \\ 5x + \frac{1}{3}y = 3 \quad \text{......... (2)} \end{cases}$

Resolución:

De la segunda ecuación: $5x + \frac{1}{3}y = 3$; obtenemos:

$$\boxed{15x + y = 9} \quad \text{......... (I)}$$

Sumamos miembro a miembro las ecuaciones **(1)** y **(I)**:

$$-2x - y = -\frac{1}{3}$$

$$15x + y = 9$$

Σ.M.A.M: $13x = 9 - \frac{1}{3} \Rightarrow 13x = \frac{26}{3}$

$$x = \frac{26}{3 \cdot 13} \Rightarrow \therefore \boxed{x = \frac{2}{3}}$$

Reemplazamos el valor de "x" en **(1)**:

$$-2x - y = -\frac{1}{3} \Rightarrow -2\left(\frac{2}{3}\right) - y = -\frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{4}{3} + \frac{1}{3} = y \Rightarrow \therefore \boxed{-1 = y}$$

Luego: El conjunto solución del sistema es: C. S. = {2/3 ; -1}

7. Resolver el sistema: $\begin{cases} \dfrac{x-1}{y+1} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{x+1}{y-1} = 3 \end{cases}$

Resolución:

De la ecuación (1): $\dfrac{x-1}{y+1} = \dfrac{1}{3}$; obtenemos:

$$3(x - 1) = 1(y + 1) \Rightarrow 3x - 3 = y + 1$$

$$\boxed{3x - y = 4} \text{ .... (I)}$$

De la ecuación (2): $\dfrac{x+1}{y-1} = 3$; obtenemos:

$$x + 1 = 3(y - 1) \Rightarrow x + 1 = 3y - 3$$

$$\boxed{x - 3y = -4} \text{ .... (II)}$$

Multipilicamos por -3 a la ecuación **(I)**:

$$\textbf{por -3} \Rightarrow 3x - y = 4 \Rightarrow \boxed{-9x + 3y = -12} \text{ .... (III)}$$

Sumamos miembro a miembro las ecuaciones **(II)** y **(III)**:

$$x - 3y = -4$$
$$-9x + 3y = -12$$

$$\Sigma.\text{M.A.M}: -8x = -16 \Rightarrow x = \frac{-16}{-8} \Rightarrow \therefore \boxed{x = 2}$$

Reemplazamos el valor de "x" en la ecuación **(I)**:

$$3x - y = 4 \Rightarrow 3(2) - y = 4 \Rightarrow \therefore \boxed{y = 2}$$

Luego: El conjunto solución del sistema es: C.S. = {2 ; 2}



TALLER DE EJERCICIOS Nº 54



1. Resuelve por **igualación** los siguientes sistemas de ecuaciones. Despeja las incógnitas que te parezcan convenientes.

a) $\begin{cases} x + 6y = -1 \\ 2x + 2y = -7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - 2y = 7 \\ 2x + 4y = -4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3y = -\frac{4}{5} \\ 2x + y = -\frac{18}{5} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = -8 \\ x - 2y = 7 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ y + 4x = 5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ y - 3x = -2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2y + x + 10 = 0 \\ y - 4x = 13 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2x + 5y = 20 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 4x - y = 18 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 4x - y = -6 \\ -2x + 3y = 13 \end{cases}$

k) $\begin{cases} x + 5 = 2y \\ \frac{4y + 1}{5} = 3x - 3 \end{cases}$

l) $\begin{cases} x - 9y = 0 \\ \frac{x}{3} = 2y + \frac{1}{3} \end{cases}$

2. Resuelve por **sumas o restas** los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + 5y = 15 \\ -x + 3y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 4x + y = 11 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 3x - 4y = -8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x - 6y = -6 \\ 8x + 3y = -7 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ 3x + 3y = -12 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + 3y = -4 \\ 3x + 7y = -1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x + 3y = -3 \\ 5x + 6y = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 4x + y = 8 \\ 2x = 3y + 11 \end{cases}$

j) $\begin{cases} y + 2 = x \\ y - 2 = -x - 4 \end{cases}$

k) $\begin{cases} 3x - 4y = 12 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$

l) $\begin{cases} x - y = -1 \\ 3y + 2x + 2 = 0 \end{cases}$

3. Resuelve por **sustitución** los siguientes sistemas de ecuaciones. Despeja, en cada caso, la incógnita que creas conveniente.

a) $x - 3y = -3$
$\frac{1}{3}x + y = -1$

b) $2x - 4y - 3 = 0$
$3x = -y - \frac{3}{4}$

c) $3x + y - 1 = 0$
$-y = 2x - 4$

d) $\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ x + 5y = 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x + y = 3 \\ -3x + \frac{1}{2}y = 4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x - \frac{1}{3}y = -1 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x + \frac{5}{4}y = 4 \\ 2x - 5y = -9 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x - y = 8 \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x - \frac{y-2}{3} = 0 \\ 0{,}2x + 0{,}3y = 5 \end{cases}$

j) $\begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}y = 3 \\ \frac{3}{2}x + 2y = 1 \end{cases}$

k) $\begin{cases} 4x + 3y = -1{,}25 \\ 1{,}5x - y = -1 \end{cases}$

l) $\begin{cases} 3x - 4y - 1 = 3(2x - y + 2) \\ 2(4x + 2y + 3) = 7x + y + 9 \end{cases}$

4. Resuelve los siguientes sistemas por el método que creas más conveniente.

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 4 = y \\ \frac{1}{2}x - y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 6x + 2y = 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + 5y - 11 = 0 \\ 2x - 5y + 19 = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y = \frac{5}{3} - \frac{x}{2} \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{2} = y \end{cases}$

g) $\begin{cases} x = \frac{2y-1}{3} \\ 6x + 4 = 3y \end{cases}$

h) $\begin{cases} x = \frac{4-5y}{3} \\ x = \frac{8y+2}{-6} \end{cases}$

i) $\begin{cases} ax + bx = 1 \\ ax - by = 2 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 2(x + 2y) - 6 = 2 \\ x - 2(1 + y) = -\frac{1}{2}(4y + 2x) \end{cases}$

k) $\begin{cases} 0{,}\widehat{3}x - 2y = 3 \\ -x - 0{,}\widehat{6}y = -\frac{7}{3} \end{cases}$

l) $\begin{cases} \frac{x+y}{1-y} = \frac{2}{3} \\ \frac{2(x+y)}{y} = -3 + \frac{1}{y} \end{cases}$

5. Resuelve los siguietnes sistemas por el método que creas conveniente.

a) $\begin{cases} \frac{8}{x} + \frac{12}{y} = 8 \\ \frac{8}{x} - \frac{12}{y} = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{2}{x} - \frac{1}{y} = 11 \\ \frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 16 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = -10 \\ \frac{4}{x} + \frac{1}{y} = 49 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{10}{x} - \frac{10}{y} = 2 \\ \frac{8}{x} - \frac{15}{y} = -1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = \frac{25-5x}{2} \\ 3x + 4y = 29 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 2 \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = -2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 5x - 2y = 11 \\ 3x + 5y = 19 \end{cases}$	h) $\begin{cases} 9x + 11y = 40 \\ 5x = 7y - 4 \end{cases}$	i) $\begin{cases} 17x + 12y = -24 \\ 13x - 3y = 6 \end{cases}$
j) $\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ \frac{5}{2}x - 13y - 10 = 0 \end{cases}$	k) $\begin{cases} \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{4} = 8 \\ \frac{2(x+y)}{3} - \frac{3(x-y)}{4} = 2 \end{cases}$	l) $\begin{cases} \frac{x}{6} + \frac{2y}{9} = 1 \\ \frac{2x}{5} - \frac{12y}{20} = -1 \end{cases}$

RESPUESTAS TALLER

1.

a) C.S. = {-4; 1/2}	e) C.S. = {1; 1}	i) C.S. = {9/2; 0}
b) C.S. = {1; -3/2}	f) C.S. = {0; -2}	j) C.S. = {-1/2; 4}
c) C.S. = {-2; 2/5}	g) C.S. = {-4; -3}	k) C.S. = {2; 7/2}
d) C.S. = {-3; -5}	h) C.S. = {5; 2}	l) C.S. = {3; 1/3}

2.

a) C.S. = {5; 2}	e) C.S. = {-1; -3}	i) C.S. = {5/2 ; -2}
b) C.S. = {3; -1}	f) C.S. = {-5; 2}	j) C.S. = {0; -2}
c) C.S. = {-2; -1/5}	g) C.S. = {6; -5}	k) C.S. = {8; 3}
d) C.S. = {-1; 1/2}	h) C.S. = {-2; 3}	l) C.S. = {-1; 0}

3.

a) C.S. = {-3; 0}	e) C.S. = {-1/2 ; 5}	i) C.S. = {4; 14}
b) C.S. = {0; -3/4}	f) C.S. = {-1; -3}	j) C.S. = {-2; 2}
c) C.S. = {-3; 10}	g) C.S. = {1/2 ; 2}	k) C.S. = {-1/2 ; 1/4}
d) C.S. = {4; 0}	h) C.S. = {18; 10}	l) C.S. = {-3; 2}

4.

a) C.S. = {4; -1}	e) C.S. = {-2; 3}	i) C.S. = $\{\frac{3}{2a}; -\frac{1}{2b}\}$
b) C.S. = {2; 0}	f) C.S. = {1; 7/6}	j) C.S. = {1; 3/2}
c) C.S. = {0; 4}	g) C.S. = {-5/3 ; -2}	k) C.S. = {3; -1}
d) C.S. = {1/2 ; -1/2}	h) C.S. = {-7; 5}	l) C.S. = {1; -1/5}

(5.)			
	a) C.S. = {2; 3}	e) C.S. = {3; 5}	i) C.S. = {0; 2}
	b) C.S. = {3/20 ; 3/7}	f) C.S. = {1/2 ; -1/2}	j) C.S. = {4; 0}
	c) C.S. = {10/29 ; 2/97}	g) C.S. = {3; 2}	k) C.S. = {10; 2}
	d) C.S. = {7/4 ; 35/13}	h) C.S. = {2; 2}	l) C.S. = {2; 3}

3.10 Sistemas de tres Ecuaciones de Primer Grado con tres incógnitas

Para resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, se reduce a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por cualquiera de los métodos conocidos.

Se resuelve el sistema de ecuaciones con dos incógnitas por el método más conveniente. Conocido el valor de las dos incógnitas, se reemplazan en una cualquiera de las ecuaciones del sistema para obtener la tercera incógnita.

I. Método de Sustitución:

Ejemplo: Resolver:

$$2x - y + z = 0 \quad \text{.........} \ (1)$$
$$x + 2y - z = -3 \quad \text{.........} \ (2)$$
$$3x + y - 2z = -7 \quad \text{.........} \ (3)$$

Resolución:

Despejamos "x" en (2) $\Rightarrow$ $\boxed{x = -3 - 2y + z}$ .... **(4)**

Sustituimos **(4)** en **(1)** y en **(3)**; obteniendo:

En (1): $2(-3 - 2y + z) - y + z = 0 \Rightarrow \boxed{-5y + 3z = 6}$ .... **(I)**

En (3): $3(-3 -2y +z) + y - 2z = -7 \Rightarrow \boxed{-5y + z = 2}$ .... **(II)**

En la ecuación **(II)**; despejamos "z".

$$\boxed{z = 2 + 5y} \quad \text{.........} \ \textbf{(III)}$$

Sustituimos **(III)** en **(I)**: $-5y + 3(2 + 5y) = 6$

$$-5y + 6 + 15y = 6 \Rightarrow 10y = 0 \Rightarrow \therefore \boxed{y = 0}$$

- Reemplazamos el valor de **y = 0** ; en **(II)**:

$$-5y + z = 2 \Rightarrow -5(0) + z = 2 \Rightarrow \therefore \boxed{z = 2}$$

- Reemplazamos el valor de **y = 0** ; **z = 2** ; en **(4)**:

$$x = -3 - 2y + z \Rightarrow x = -3 - 2(0) + 2 \Rightarrow \therefore \boxed{x = -1}$$

Luego: El conjunto solución del sistema es: C.S. {-1 ; 0 ; 2}

Puedes verificar si la solución es correcta reemplazando los valores obtenidos en las ecuaciones del sistema.

II. Método de igualación:

Ejemplo: Resolver:

$$2x - y + z = 0 \quad \text{.........} (1)$$
$$x + 2y - z = -3 \quad \text{.........} (2)$$
$$3x + y - 2z = -7 \quad \text{.........} (3)$$

Resolución:

Despejamos cualquiera de las incógnitas en las tres ecuaciones: por ejemplo, despejamos "x".

En **(1)**: $2x - y + z = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{y-z}{2}}$ .... **(1)**

En **(2)**: $x + 2y - z = -3 \Rightarrow \boxed{x = -2y + z - 3}$ .... **(2)**

En **(3)**: $3x + y - 2z = -7 \Rightarrow \boxed{x = \frac{-y+2z-7}{3}}$ .... **(3)**

Igualamos **(1)** y **(2)**: $\frac{y-z}{2} = -2y + z - 3$

$$y - z = -4y + 2z - 6 \Rightarrow \boxed{y = \frac{3z-6}{5}} \quad \text{.........} (I)$$

Igualamos **(2)** y **(3)**: $-2y + z - 3 = \frac{-y+2z-7}{3}$

$$-6y + 3z - 9 = -y + 2z - 7 \Rightarrow \boxed{y = \frac{z-2}{5}} \quad \text{.........} (II)$$

Igualamos **(I)** y **(II)**: $\frac{3z-6}{5} = \frac{z-2}{5}$

$$3z - 6 = z - 2 \Rightarrow 2z = 4 \Rightarrow \therefore \boxed{z = 2}$$

- Reemplazamos el valor de **z = 2** ; en **(II)**:

$$y = \frac{z-2}{5} \Rightarrow y = \frac{2-2}{5} = \frac{0}{5} \Rightarrow \therefore \boxed{y = 0}$$

- Reemplazamos el valor de **z = 2** ; **y = 0** ; en **(1)**:

$$x=\frac{y-z}{2} \Rightarrow x=\frac{0-2}{2} \Rightarrow \therefore \boxed{x=-1}$$

Luego: El conjunto solución del sistema es: C.S. = {-1 ; 0 ; 2}

III. Método de Sumas o Restas (Reducción)

Consideremos el mismo sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 & \text{......... (1)} \\ x + 2y - z = -3 & \text{......... (2)} \\ 3x + y - 2z = -7 & \text{......... (3)} \end{cases}$$

Conviene reducir "**y**" o "**z**".

Sumamos las ecuaciones (1) y (2):

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = -3 \end{cases}$$

$$\boxed{3x + y = -3} \quad \text{......... (I)}$$

Multiplicamos por 2 a la ecuación: (1) y lo sumamos con la ecuación (3).

$$\begin{cases} 4x - 2y + \cancel{2z} = 0 \\ 3x + y - \cancel{2z} = -7 \end{cases}$$

$$\boxed{7x - y = -7} \quad \text{......... (II)}$$

Luego, sumamos las ecuaciones **(I)** y **(II)**:

$$\begin{cases} 3x + \cancel{y} = -3 \\ 7x - \cancel{y} = -7 \end{cases}$$

$$10x = -10 \Rightarrow \therefore \boxed{x=-1}$$

- Reemplazamos el valor de **x = -1** en **(I)**:

$$3x + y = -3 \Rightarrow 3(-1) + y = -3 \Rightarrow \therefore \boxed{y=0}$$

- Reemplazamos el valor de **x = -1** ; **y = 0** en **(1)**:

$$2x - y + z = 0 \Rightarrow 2(-1) - 0 + z = 0 \Rightarrow \therefore \boxed{z=2}$$

Luego: El conjunto solución del sistema es: C.S. = {-1 ; 0 ; 2}

Nota:

La eliminación sucesiva de las incógnitas puede hacerse por cualquiera de los métodos.

Si el sistema fuera de cuatro o más ecuaciones, se procedería de igual forma.

Problemas que se resuelven mediante sistemas de ecuaciones

Muchos problemas y cuestiones algebraicas pueden resolverse planteando ecuaciones o relaciones entre los datos del problema y las cantidades desconocidas que se pide determinar. Representamos estas cantidades desconocidas con las incógnitas: x ; y ; z; .... tantas cuantas sean necesarias. Escribimos mediante las condiciones que da el problema o se deducen del enunciado, tantas ecuaciones como incógnitas tengamos, procediendo a continuación a resolver el sistema de estas ecuaciones.

Problema 1: La suma de dos números más 22 es igual al doble del mayor y la diferencia de dichos números menos uno es igual al menor. Hallar dichos números?

Resolución:

Sean los dos números: $\begin{cases} \text{Número mayor} = x \\ \text{Número menor} = y \end{cases}$

• Del enunciado, planteamos las ecuaciones:

i) $(x + y) + 22 = 2x \Rightarrow \boxed{22 = (x - y)}$ .... **(I)**

ii) $\boxed{(x - y) - 1 = y}$ .... **(II)**

*** Sustituimos (I) en (II):** $22 - 1 = y \Rightarrow \therefore \boxed{21 = y}$

- Reemplazamos el valor de **y = 21** ; en **(I)**:

$$22 = x - y \Rightarrow 22 = x - 21 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 43}$$

Luego: $\boxed{\text{Los números pedidos son: 43 y 21}}$ ***Rpta.***

Problema 2: Dividir 1 000 en dos partes tales que si de los $\frac{5}{6}$ de la primera se resta $\frac{1}{4}$ de la segunda; se obtiene 10. Calcular la segunda parte?

Resolución:

Sea: $\begin{cases} \text{Primera parte} = x \\ \text{Segunda parte} = y \end{cases}$ ➧ $\boxed{x + y = 1\,000}$ .... **(I)**

- Del enunciado, planteamos las ecuaciones: $\boxed{\frac{5}{6}x - \frac{1}{4}y = 10}$ .... **(II)**

multiplicamos por 4 a cada término de la ecuación **(II)** ; obteniendo:

$$4\left(\frac{5}{6}x\right) - 4\left(\frac{1}{4}y\right) = 4(10) \Rightarrow \boxed{\frac{10}{3}x - y = 40} \text{ .... (III)}$$

• Sumamos las ecuaciones **(I)** y **(III)**:

$$\begin{cases} x + \not{y} = 1\,000 \\ \dfrac{10}{3}x - \not{y} = 40 \end{cases}$$

$$x + \frac{10}{3}x = 1\,040 \Rightarrow \frac{\not{13}}{3}x = \not{1}\not{0}\not{4}0 \Rightarrow \frac{x}{3} = 80 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 240}$$

- Reemplazamos el valor de x = 240, en **(I)**:

$$x + y = 1\,000 \Rightarrow 240 + y = 1\,000 \Rightarrow \therefore \boxed{y = 760}$$

Luego: **La segunda parte es: 760** ***Rpta.***

Problema 3: La suma de dos números es 65; su diferencia dividida entre el número menor, da 8 por cociente y 5 de residuo; ¿Cuáles son estos números?

Resolución:

Sean los dos números: $\begin{cases} x = \text{número mayor} \\ y = \text{número menor} \end{cases}$

• **Del enunciado**, planteamos las ecuaciones:

i) $x + y = 65$

ii) $(x - y) \,\lfloor y$, residuo 5, cociente 8

Por propiedad: De una división inexacta

D | d ; r, q ⇒ $\boxed{D = d.q + r}$

Obtenemos: $x - y = 8y + 5$

Donde: $\boxed{x = 9y + 5}$ .... **(I)**

Sustituimos **(I)** en **(i)**: $(9y + 5) + y = 65 \Rightarrow 10y = 60 \Rightarrow \therefore \boxed{y = 6}$

Reemplazamos el valor de **y = 6** ; en **(I)**:

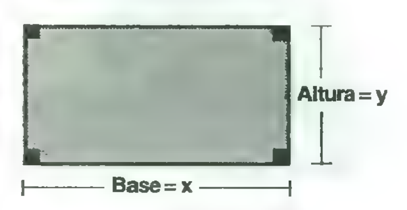
$$x = 9(6) + 5 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 59}$$

Luego: **Los números pedidos son: 59 y 6** ***Rpta.***

Problema 4: El perímetro de un rectángulo es de 24 cm. La diferencia entre la base y la altura es de 2 cm. Calcula su área.

Resolución:

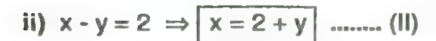
Sea: $\begin{cases} \text{base del rectángulo} = x \\ \text{altura del rectángulo} = y \end{cases}$



- **Del enunciado:**

i) Perímetro ▭ = Suma de sus 4 lados.

$$\boxed{24 = 2x + 2y} \text{ .... (I)}$$



ii) $x - y = 2 \Rightarrow \boxed{x = 2 + y}$ .... (II)

Sustituimos **(II)** en **(I)**: $24 = 2(2 + y) + 2y \Rightarrow 20 = 4y \Rightarrow \therefore \boxed{y = 5}$

Reemplazamos el valor de **y = 5** ; en **(II)**:

$$x = 2 + y \Rightarrow x = 2 + 5 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 7}$$

Luego: área ▭ = base×altura

área ▭ = 7.5 ⇒ ∴ $\boxed{\text{área ▭} = 35 \text{ cm}^2}$ ***Rpta.***

Problema 5: Añadiendo 1 a ambos términos de un quebrado, se hace igual a 2 tercios; restándole ese mismo número, se vuelve 1 medio. ¿Cuál es el quebrado?

Resolución:

Sea; el quebrado o fracción: $\dfrac{N}{D}$ N → ***Numerador***, D → ***Denominador***

- Del enunciado, planteamos las ecuaciones:

i) $\dfrac{N+1}{D+1} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow 3(N + 1) = 2(D + 1) \Rightarrow \boxed{3N = 2D - 1}$ .... **(I)**

ii) $\dfrac{N-1}{D-1} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2(N - 1) = 1(D - 1) \Rightarrow \boxed{2N - 1 = D}$ .... **(II)**

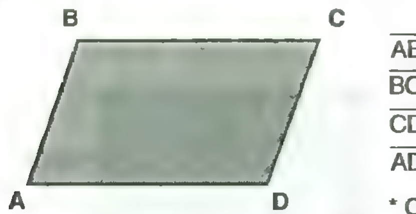
Sustituimos **(II)** en **(I)**: $3N = 2(2N - 1) - 1 \Rightarrow 3N = 4N - 3 \Rightarrow \therefore \boxed{N = 3}$

Reemplazamos el valor de **N = 3** ; en **(II)**:

$$2N - 1 = D \Rightarrow 2(3) - 1 = D \Rightarrow \therefore \boxed{5 = D}$$

Luego: El quebrado o fracción será: $\dfrac{N}{D} = \dfrac{3}{5}$ ***Rpta.***

Problema 6: Si: **ABCD**; es un paralelogramo



$\overline{AB} = 2x - 3y$
$\overline{BC} = 5y + 5cm$
$\overline{CD} = 5cm$
$\overline{AD} = 3x$

* Calcula la longitud de los lados.

Resolución:

Por propiedad:

i) $\overline{AB} = \overline{CD} \Rightarrow 2x - 3y = 5 \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{5+3y}{2}}$ .... **(I)**

ii) $\overline{BC} = \overline{AD} \Rightarrow \boxed{5y + 5 = 3x}$ .... **(II)**

- Sustituimos **(I)** en **(II)**: $5y + 5 = 3\left(\dfrac{5+3y}{2}\right)$

$$2(5y + 5) = 3(5 + 3y) \Rightarrow 10y + 10 = 15 + 9y$$

$$\therefore \boxed{y = 5}$$

Reemplazamos el valor de **y = 5** ; en **(I)**:

$$x = \frac{5+3y}{2} \Rightarrow x = \frac{5+3(5)}{2} \Rightarrow \therefore \boxed{x = 10}$$

Luego: La longitud de los lados son:
$\overline{AB} = 2x - 3y = 2(10) - 3(5) = 5cm$;
$\overline{BC} = 5(5) + 5 = 30$ cm ; $\overline{CD} = 5cm$ y $\overline{AD} = 3\ (10) = 30$ cm. ***Rpta.***

Problema 7: Un número entero consta de tres dígitos. El dígito de las centenas es igual a la suma de las otras dos, y el quintuplo de las unidades equivale a la suma de las decenas y de las centenas. Hállese este número; sabiendo que si se invierten los digitos resulta disminuido en 594.

Resolución:

Sea el número de tres dígitos: $\overline{cdu}$
- u — ***unidades***
- d — ***decenas***
- c — ***centenas***

Del enunciado; planteamos las ecuaciones:

$\boxed{\textbf{i)}\ \ c = d + u}$ $\boxed{\textbf{ii)}\ \ 5u = d + c}$

iii) $\overline{cdu} - \overline{udc} = 594 \Rightarrow (100c + 10d + u) - (100u + 10d + c) = 594$

$99c - 99u = 594$

$99(c - u) = 594$

$\therefore$ $\boxed{c - u = 6}$ .... (I)

Recuerda que:

$\overline{cdu} = 100c + 10d + u$

Ejemplo:

$236 = 100(2) + 10(3) + 6$

Reemplazamos **(i)** en **(ii)**: $5u = d + (d + u) \Rightarrow 4u = 2d \Rightarrow \therefore \boxed{2u = d}$ ... **(II)**

Reemplazamos **(i)** en **(I)**: $(d + u) - u = 6 \Rightarrow \therefore \boxed{d = 6}$

Reemplazamos el valor de **d = 6** ; en **(II)**:

$$2u = d \Rightarrow 2u = 6 \Rightarrow \therefore \boxed{u = 3}$$

Reemplazamos el valor de **u = 3** ; en **(I)**:

$$c - u = 6 \Rightarrow c - 3 = 6 \Rightarrow \therefore \boxed{c = 9}$$

Luego: El número de 3 dígitos será: $\overline{cdu} = 963$ ***Rpta.***

Problema 8: ¿Cuál es la edad actual de un padre que duplica la de su hijo y hace 24 años su edad era 10 veces que la edad de su hijo?

Resolución:

• ***Sean las edades actuales:***

Edad del padre = P
Edad del hijo = H

Del enunciado: $\boxed{P = 2H}$ .... (I)

• ***Edades hace 24 años:***

Edad del padre = (P - 24)
Edad del hijo = (H - 24)

Del enunciado:

$(P - 24) = 10(H - 24)$

$P - 24 = 10H - 240$

$\boxed{P + 216 = 10H}$ .... **(II)**

- Sustituimos **(I)** en **(II)**:

$2H + 216 = 10H$

$216 = 8H \Rightarrow \therefore \boxed{27 = H}$

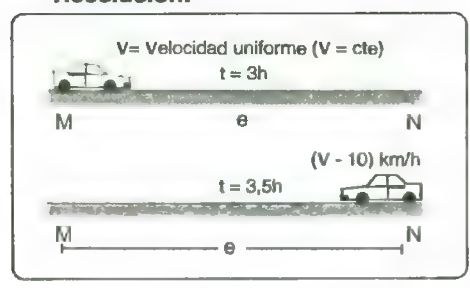
Reemplazamos el valor de **H = 27** ; en **(I)**:

$$P = 2H \Rightarrow P = 2(27) \Rightarrow \therefore \boxed{P = 54}$$

Luego: La edad actual del padre es de: 54 años ***Rpta.***

Problema 9: Un automovil va de la ciudad "M" a la ciudad "N" en 3 horas viajando a una velocidad uniforme. En el viaje de regreso el tren va a 10 km/h más despacio y la jornada toma media hora más. ¿Cuál es la distancia de la ciudad "M" a la ciudad "N"?

Resolución:



Sabemos que:

Espacio = velocidad x tiempo
$e = V \,.\, 3 ...(I)$

Sabemos que:
Espacio = velocidad x tiempo

$e = (V - 10) \,.\, 3,5 ...(II)$

Igualamos las ecuaciones **(I)** y **(II)**:

$$V.3 = (V - 10).3,5 \Rightarrow 3V = 3,5V - 35 \Rightarrow 35 = 0,5V$$

$$35 = \frac{1}{2}V \Rightarrow \therefore \boxed{70 = V}$$

Reemplazamos el valor de **V = 70** ; en **(I)**:

$$e = V.3 \Rightarrow e = 70.3 \Rightarrow \therefore \boxed{e = 210}$$

Luego: La distancia de la ciudad "M" a la ciudad "N" es de: 210 km. ***Rpta.***

Problema 10: En una reunión hay doble número de mujeres que de hombres y triple número de niños que de hombres y de mujeres. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños hay en la reunión si en total son 156 personas?

Resolución:

Sea:
- x = número de hombres
- y = número de mujeres
- z = número de niños

Del enunciado, planteamos las ecuaciones:

i) $y = 2x$ **ii)** $z = 3(x + y)$ **iii).** $x + y + z = 156$

Sustituimos la ecuación **(ii)** en **(iii)**:

$$x + y + 3(x + y) = 156 \Rightarrow 4(x + y) = 156 \Rightarrow \boxed{x + y = 39} \text{ .... (I)}$$

Sustituimos **(i)** ; en **(I)**: $x + 2x = 39 \Rightarrow 3x = 39 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 13}$

Reemplazamos el valor de **x = 13** ; en **(I)**:

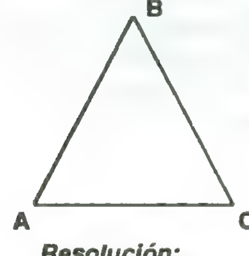
$$x + y = 39 \Rightarrow 13 + y = 39 \Rightarrow \therefore \boxed{y = 26}$$

Reemplazamos el valor de **x = 13** ; **y = 26** ; en **(iii)**:

$$x + y + z = 156 \Rightarrow 13 + 26 + z = 156 \Rightarrow \therefore \boxed{z = 117}$$

Luego: **En la reunión hay: 13 hombres; 26 mujeres y 117 niños.** ***Rpta.***

Problema 11: En el Δ ABC:



Datos: $\hat{A} = \hat{C}$

$\overline{AB} = 3x + 4y$

$\overline{BC} = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y$

$\overline{AC} = y - x$

Perímetro = 12 cm ; Calcular: "x" e "y"

Resolución:

- Como los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{C}$ son iguales los lados que se oponen a dichos ángulos deben ser iguales, osea:

$$\overline{AB} = \overline{BC} \Rightarrow 3x + 4y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y$$

$$3x + 4y = \frac{x + 3y}{2} \Rightarrow 6x + 8y = x + 3y$$

$$5x = -5y \Rightarrow \boxed{x = -y} \text{ .... (I)}$$

Sustituimos: x = -y ; en:

$$\overline{AB} = 3x + 4y \Rightarrow \overline{AB} = 3(-y) + 4y \Rightarrow \therefore \boxed{\overline{AB} = y}$$

$$\overline{BC} = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y \Rightarrow \overline{BC} = \frac{1}{2}(-y) + \frac{3}{2}y \Rightarrow \therefore \boxed{\overline{BC} = y}$$

$$\overline{AC} = y - x \Rightarrow \overline{AC} = y - (-y) \Rightarrow \therefore \boxed{\overline{AC} = 2y}$$

Además: **Perímetro Δ ABC = Suma de sus tres lados.**

Perímetro Δ ABC = Suma de sus tres lados.

$$12 = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$$

$$12 = y + y + 2y \Rightarrow 12 = 4y \Rightarrow \therefore \boxed{3 = y}$$

Reemplazamos el valor de **y = 3** ; en **(I)**:

$$x = -y \Rightarrow \therefore \boxed{x = -3}$$

Luego: Los valores de "x" e "y" es: -3 y 3 ***Rpta.***



TALLER DE PROBLEMAS Nº 55

Problema 1 : Un cuarto de la suma de dos números es 152 y un tercio de su diferencia es 66. ¿Cuáles son los números?

Resolución:

Rpta. 403 y 205

Problema 2 : La edad de Teresa es 15 años menos que el doble de la edad de María y la séptima parte de la edad de Teresa es 20 años menos que la edad de María. Calcule la edad de Teresa.

Resolución:

Rpta. 35 años

Problema 3 : Si el doble de un número entero se suma con el triple de otro se obtiene 26. Si al triple del primero se le resta el segundo se obtiene 28. Determine los números.

Resolución:

Rpta. 10 y 2

Problema 4 : Sergio tiene S/.1950 en billetes de S/.100 y de S/.50. En total tiene 24 billetes. Determine cuántos son de S/.100 y cuántos de S/.50.

Resolución:

Rpta. 15 y 9

Problema 5 : La suma de dos números es 240. Si se divide el número mayor por el menor, el cociente es 3 y el resto es 8. Hallar el mayor.

Resolución:

Rpta. 182

Problema 6 : Dos números están en la razón de 6 a 4, si se resta 6 del primero y se suma 6 al segundo, quedan en la razón de 2 a 3. Hallar uno de los números.

Resolución:

Rpta. 18 y 12

Problema 7 : La edad de Liliana es 1/5 de la edad de Miguel y hace 5 años, la edad de Liliana era 1/10 de la edad de Miguel. Determine la edad de Liliana.

Resolución:

Rpta. 9 años

Problema 8 : La suma de la cifra de las docenas y la cifra de las unidades de un número de los cifras es 4. Si al número se le resta 18 las cifras se invierten. ¿Cuál es el número?

Resolución:

Rpta. 31



PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE ECUACIONES DE PRIMER GRADO



NIVEL I

Problema 1 : Hallar dos números que sumen 54; tales que la quinta parte del mayor sea igual a la cuarta parte del menor. (Dar como respuesta el triple del menor).

A) 76 **B)** 72 **C)** 84 **D)** 78 **E)** 82

Problema 2 : 4/5 de la suma de los dos números es igual a 32 y 10/9 de su diferencia es 20. Encuentre el menor.

A) 29 **B)** 13 **C)** 11 **D)** 27 **E)** 14

Problema 3 : Dividir 32 en dos partes tales que dividiendo la mayor de las partes entre la menor se obtenga por cociente 5 y por resto 2. Calcular una de las partes.

A) 6 **B)** 9 **C)** 15 **D)** 27 **E)** 18

Problema 4 : José y Antonio tienen 45 manzanas, José le díce a Antonio: "dame 5 manzanas, y así tendré el doble que tú". ¿Cuántas manzanas tiene Antonio?

A) 25 **B)** 20 **C)** 35 **D)** 30 **E)** N.A.

Problema 5 : La mitad de un número es igual a la tercera parte de otro. ¿Cuáles son dichos números si su suma es igual a 10?

A) 4 y 6 **B)** 2 y 8 **C)** 1 y 9
D) 3 y 7 **E)** N.A.

Problema 6 : Añadiendo el primero de dos números a la mitad del segundo, o añadiendo el segundo al tercio del primero, la suma da 10 en ambos casos. Hallar uno de los números.

A) 7 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 12

Problema 7 : Un número dividido entre otro dá como cociente 13. Si la diferencia de ambos es 180. ¿Cuál es el mayor de los números?

A) 196 **B)** 190 **C)** 195
D) 205 **E)** 225

Problema 8 : Si la mitad del número menor se resta del mayor de dos números, el resultado es 65. Hallar los números, si difieren en 35.

A) 70 y 105 **B)** 80 y 115 **C)** 60 y 95
D) 90 y 155 **E)** N.A.

Problema 9 : Hallar dos números cuya suma y cuyo cociente sean respectivamente 169 y 12 (Dar como respuesta el menor).

A) 12 **B)** 13 **C)** 14 **D)** 15 **E)** 17

Problema 10 : Un padre reparte entre sus dos hijos S/.1 200. Si el doble de lo que recibe uno de ellos excede en S/.300 a lo que recibe el otro. ¿Cuánto recibe cada uno?

A) S/.500 y S/.700 **B)** S/.400 y S/.800
C) S/.450 y S/.750 **D)** S/.350 y S/.850
E) N.A.

Problema 11 : Dos números están en la razón de 10 a 5 si se resta 20 al primero y se suma 20 al segundo, la razón de ellos se invierte. Cuáles son los números?

A) 80 y 40 **B)** 60 y 30 **C)** 40 y 20
D) 20 y 10 **E)** N.A.

Problema 12 : Dividir 260 en dos partes de modo que el doble de la mayor dividido por el triple de la menor dé 2 como cociente y 40 de resto. Hallar una de las partes.

A) 80 **B)** 70 **C)** 200 **D)** 180 **E)** 220

Problema 13 : El doble de la edad de Ángela sobrepasa en 14 años la edad de sergio. Y un quinto de la edad de Sergio es 13 años menos que la edad de Ángela. Calcule la edad de Ángela.

A) 15 años **B)** 18 años **C)** 16 años
D) 17 años **E)** 20 años

Problema 14 : Andrés le pagó a Carlos S/.1 550 en billetes de S/.100 y de S/.50. En total le dio 21 billetes. ¿Cuántas eran de S/.50?

A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 15

Problema 15 : La suma de las cifras de un número de dos cifras es 7. Si se invierten las cifras, el nuevo número es igual a dos veces el número anterior, más dos unidades. Calcule el número.

A) 24 **B)** 26 **C)** 25 **D)** 28 **E)** 27

Problema 16 : Determina dos números sabiendo que, agregando 12 al mayor se obtiene el duplo de la suma de 5 más el menor, y que, sustrayendo 2 al mayor, se obtiene el triple de la diferencia entre el menor y 3. Dar como respuesta uno de los números.

A) 6 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 7 **E)** 9

Problema 17 : Un comerciante vende 84 pares de medias a dos precios distintos, unos pares a S/.4,50 cada uno y los otros a S/.3,60 cada uno, obteniendo en total de la venta S/.310,50 ¿ Cuántos pares de S/.4,50 vendió dicho comerciante ?

A) 12 **B)** 9 **C)** 15 **D)** 10 **E)** N.A.

Problema 18 : El numerador de una fracción supera en 1 al triple del denominador. Si se sustraen 4 unidades de ambos términos de la fracción, se obtiene una fracción equivalente a 6. Determina la fracción dada.

A) 19/6 **B)** 22/7 **C)** 16/5 **D)** 13/4 **E)** 25/8

Problema 19 : La división de un número por otro da 10 por cociente y 9 de residuo. Calcular el mayor de ambos números sabiendo que sumados dan 438.

A) 372 **B)** 402 **C)** 300 **D)** 399 **E)** 350

Problema 20 : Determinar dos números tales que el mayor exceda al doble del menor en 1 y el doble del mayor exceda al menor en 23. Dar como respuesta la suma de ellos.

A) 20 **B)** 21 **C)** 22 **D)** 23 **E)** 24

Clave de Respuestas

1. B	2. C	3. D	4. B
5. A	6. B	7. C	8. C
9. B	10. A	11. C	12. C
13. D	14. B	15. C	16. B
17. B	18. B	19. D	20. C

NIVEL II

Problema : Descomponer 51 en dos partes, de manera que la parte mayor sea 3 más que el duplo de la parte menor. Hallar la parte mayor.

A) 36 **B)** 16 **C)** 35 **D)** 38 **E)** 19

Problema : Se compran patos a 8 dólares cada uno y gallinas a 7 dólares cada uno. Si con 166 dólares se compró 22 de tales aves. ¿Cuántos son patos?

A) 10 **B)** 9 **C)** 11 **D)** 12 **E)** 13

Problema : Dos hermanos se reparten una herencia de 2 000 dólares. Si el cuádruple de la parte menor excede en 60 a la parte mayor aumentado en 30. ¿Cuánto le tocó a uno de ellos?

A) 814 **B)** 418 **C)** 1682
D) 1852 **E)** N.A.

Problema : Al invertir el orden de las cifras de un número de dos cifras, el número queda disminuido en 36 unidades. Sabiendo que dichas cifras suman 12. Hallar el número.

A) 75 **B)** 48 **C)** 93 **D)** 84 **E)** 39

Problema : Un padre tiene seis veces la edad de su hijo, y la suma de las edades de los dos es 91 años. ¿Cuántos años tiene el padre?

A) 68 **B)** 78 **C)** 87 **D)** 31 **E)** 47

Problema : Determinar una fracción, sabiendo que se hace igual a 1, si se disminuye en 5 unidades al numerador y se aumenta 8 al denominador, y se hace igual a 3 si al denominador se disminuye en 7.

A) 28/17 **B)** 30/19 **C)** 30/17
D) 31/18 **E)** N.A.

Problema : La suma de los dígitos de un número representado con dos dígitos en 12. Si el dígito de las unidades es 2 más que el de las decenas, determinar el número.

A) 48 **B)** 75 **C)** 57 **D)** 84 **E)** N.A.

Problema : Dos jugadores se ponen a jugar con una misma cantidad de dinero; el primero pierde 400 soles y el segundo 220 soles; resultando que la cantidad que le queda al primero es la mirad de la que le queda al segundo. ¿Con cuánto se pusieron a jugar?

A) 480 **B)** 520 **C)** 580 **D)** 600 **E)** 540

Problema : Una persona depositó en un banco S/.1 480. Si su depósito consistió en 60 billetes; Algunos de a 10 soles y al resto de a cincuenta soles. ¿Cuántos billetes de mayor denominación depositó?

A) 38 **B)** 28 **C)** 22 **D)** 24 **E)** 32

Problema : El dígito de las unidades de un número representado con dos dígitos es 1 más; que el duplo del dígito de las decenas. Determinar el número si la suma de los dígitos es 10.

A) 28 **B)** 73 **C)** 46 **D)** 37 **E)** 82

Problema : En una juguetería donde se venden bicicletas y triciclos. Percy dijo: hay 60 llantas. Oscar agregó: hay 5 bicicletas más que triciclos. ¿Cuántas bicicletas hay ?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

Problema 12: En el triángulo rectángulo ABC.

A = 2x - y

B = 2x + 4y

C = 2y - x /2



. Calcular el valor de "x"

A) 22,5° B) 37,5° C) 45,6°
D) 67,5° E) N.A.

Problema 13: Dos automóviles parten al mismo tiempo de una Ciudad "A" con velocidades de 80km/h y 60km/h. Si el de mayor velocidad llega a la meta 3 horas antes que el otro. Hallar los tiempos invertidos en realizar el recorrido.

A) 10 y 13h B) 8 y 11h C) 6 y 9h
D) 11 y 14h E) 9 y 12h

Problema 14: La suma de las medidas de los tres ángulos de un triángulo es 180°. El ángulo más grande tiene una medida de 5 veces que la del más pequeño e igual a la suma de las de los dos ángulos más pequeños. Hallar la medida del ángulo mayor.

A) 100° B) 80° C) 90° D) 120° E) 70°

Problema 15: El perímetro de un triángulo isósceles es de 27cm. Si la diferencia entre dos de sus lados es de 3 cm. ¿Cuál es la longitud de uno de sus lados?

A) 8 cm B) 9 cm C) 10 cm
D) 12 cm E) 15 cm.

Problema 16: Si un número de dos cifas se divide por la suma de sus cifras el cociente es cinco y el resto es trece. Si a la cifra de las decenas se resta las cifras de las unidades se obtiene 1. ¿Cuál es el número ?

A) 89 B) 98 C) 78 D) 59 E) 63

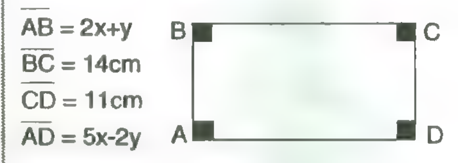
Problema 17: ABCD; es un rectángulo. Calcular el valor de "x". Si:

$\overline{AB} = 2x+y$

$\overline{BC} = 14cm$

$\overline{CD} = 11cm$

$\overline{AD} = 5x-2y$



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Problema 18: En examen un alumno obtiene 2 puntos por respuesta correcta pero pierde un punto por cada equivocación, si después de haber contestado 50 preguntas obtiene 64 puntos. ¿Cuántas preguntas respondió correctamente?

A) 42 B) 36 C) 28 D) 38 E) 32

Problema 19: Un libro y un cuaderno tienen en total 240 páginas; La diferencía entre 2/5 de las páginas del libro y 3/4 de las páginas del cuaderno es 4. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

A) 100 B) 120 C) 140 D) 160 E) 180

Clave de Respuestas

1. C	2. D	3. B	4. D
5. B	6. C	7. C	8. C
9. C	10. D	11. B	12. D
13. E	14. C	15. A	16. B
17. C	18. D	19. D	



¿SABÍAS QUE...

... hay 8 clases de años?

Lunar de 364 días
Común de 365 días
Bisiesto de 366 días
Juliano de 365 1/4 días
Solar de 365 días 48 min. 46 seg.
Anomalítico de 365 días 13 min. 49 seg.
Sideral de 365 días 6 horas 9 min. 9 seg.
Gregoriano de 365 días 5 horas 49 min. 12 seg.



Números Proporcionales

> *Objetivo:*
>
> *Aplicar las propiedades de los números racionales al concepto de números proporcionales y al planteamiento y solución de problemas diversos.*

4.1. Razones y Proporciones: Definición, Términos y Propiedades

4.1.1. Razón o Relación:

Frecuentemente has oido o has utilizado expresiones como las siguientes:

(a). En esta ciudad hay 1 hombre por cada 5 mujeres.
(b). En mi salón de clase hay 2 carpetas por cada 8 alumnos.
(c). En una granja hay 3 gallos por cada 8 gallinas.

Decimos que:

(a). La razón del número de hombres al número de mujeres es de 1 a 5 ó bien que, el número de hombres es 1/5 del número de mujeres.
(b). La razón del número de carpetas al número de alumnos es de 2 a 8 ó bien que, el número de carpetas es 2/8 del número de alumnos.
(c). La razón del número de gallos al número de gallinas es de 3 a 8 ó bien que, el número de gallos es 3/8 del número de gallinas.

> *Definición:*
>
> *Se llama razón entre dos números a y b ($b \neq 0$), al cociente de la división de a por b.*

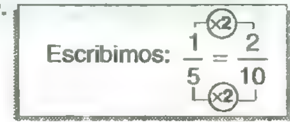
El primer número se llama **antecedente** y el segundo se llama **consecuente** de la razón.

En símbolos:



4.1.2. Proporción:

* Decir que en esta ciuidad, hay **1** hombre por cada 5 mujeres. Equivale a decir que hay 2 hombres por cada 10 mujeres. La razón **1 a 5** es igual a la razón **2 a 10**.



* Análogamente, decir que en mi salón de clase hay 2 carpetas por cada 8 alumnos, equivale a decir que hay 6 carpetas por cada 24 alumnos. La razón **2 a 8** es igual a la razón **6 a 24**.

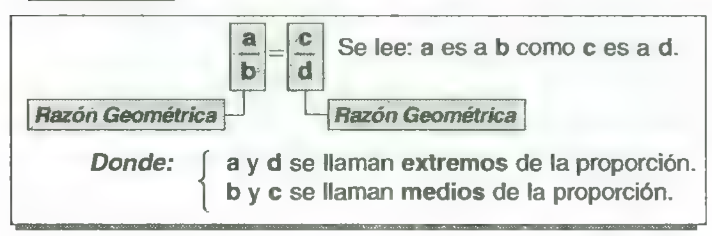
Escribimos: $\frac{2}{8} = \frac{6}{24}$ (×3)

* Decir que en una granja hay 3 gallos por cada 8 gallinas, equivale a decir que hay 6 gallos por cada 16 gallinas. La razón: **3 a 8** es igual a la razón de **6 a 16**.

Escribimos: $\frac{3}{8} = \frac{6}{16}$ (×2)

Definición: *La igualdad de dos razones se llama **proporción**.*

En símbolos:

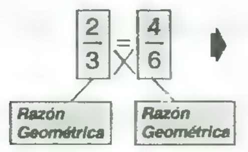


Cuatro números a, b, c, d, distintos de cero, dados en ese orden, forman proporción cuando la razón entre los dos primeros es igual a la razón de los dos últimos.

Ejemplo 1: Sean los cuatros números: 2, 3, 4, 6

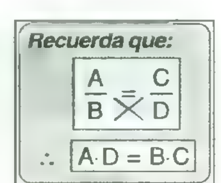
- La razón entre los dos primeros es: $\frac{2}{3}$	- La razón entre los dos últimos es: $\frac{4}{6}$

Luego:



$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ ➧ **para saber si es una proporción, efectuamos el producto cruzado, osea:** ➧

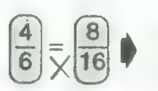
$$6 \cdot 2 = 3 \cdot 4 = 12$$



Ejemplo 2: Sean los cuatro números: 4, 6, 8, 16

- La razón entre los dos primeros es: $\frac{4}{6}$	- La razón entre los dos últimos es: $\frac{8}{16}$

Luego:



$\frac{4}{6} = \frac{8}{16}$ ➧ **No es una proporción porque:** ➧

$$16 \cdot 4 = 6 \cdot 8$$
$$64 \neq 48$$

Propiedad Fundamental

En toda proporción geométrica debe cumplirse que el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ ➧ $\underbrace{A \cdot D}_{\text{extremos}} = \underbrace{B \cdot C}_{\text{Medios}}$

4.1.2.1. Proporción Geométrica Discreta:

☆ Estimado alumno a esta proporción: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; **donde:** $(a \neq b \neq c \neq d)$

Se le sabe llamar también **proporción geométrica discreta** por ser todos sus términos diferentes, siendo en este caso el término **"d" la cuarta proporcional** entre **a, b y c.**

Ejemplo: En la proporción: $\frac{3}{4} = \frac{6}{⑧}$

Decimos que 8 es la **cuarta proporcional** entre los números 3, 4 y 6.

¿Cómo se halla la cuarta proporcional?

Se forma una proporción geométrica con los tres números dados y con **"x"**; colocándolos en cualquier orden. (Con todo será práctico colocar **"x"** en cuarto lugar). Se halla el valor de **"x"**, y ese valor es la **cuarta proporcional.**

Ejemplo: Hallar la cuarta proporcional de 10; 5 y 18.

Resolución:

Los números dados, se distribuyen de la siguiente manera: $\frac{10}{5} = \frac{18}{x}$

Donde: $10 \cdot x = 5 \cdot 18 \Rightarrow x = \frac{5 \cdot 18}{10} = \frac{90}{10} = 9$

$\therefore$ $\boxed{x = 9}$ **(La cuarta proporcional de 10, 5 y 18 es 9).**

> ***Observación:***
>
> *La cuarta proporcional varia según el orden en que se coloque los números dados.*

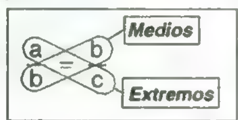
4.1.2.2. Proporción Geométrica Continua:

Observa estas proporciones: $\boxed{\frac{3}{6} = \frac{6}{12}}$; $\boxed{\frac{4}{8} = \frac{8}{16}}$ y $\boxed{\frac{1}{5} = \frac{5}{25}}$

En cada proporción los medios son iguales.

Las proporciones cuyos medios son iguales se llaman **proporciones continuas.**

En simbolos:



> ***Proporción Geométrica Continua:***
>
> *Es aquella cuyos términos medios son iguales, llamandose a cada uno de estos* ***Media Proporcional o Media Geométrica.***

Ejemplo: Dada la proporción geométrica:

$\frac{8}{④} = \frac{④}{2}$; **"La Media Proporcional es 4".**

☆ En la proporción geométrica continua se cumple que la **Media Proporcional** es igual a la raiz cuadrada del producto de los términos extremos para nuestro ejemplo tenemos que: $\boxed{④ = \sqrt{8 \times 2}}$

¿Cómo se halla la Media Proporcional?

Se forma una proporción geométrica con los dos números dados y con **"x"** colocando dos veces como término medio repetido. Se halla el valor de **"x"** y ese valor es la **Media Proporcional.**

Ejemplo: Halla la media proporcional de 12 y 3.

Resolución:

Los números dados, se distribuyen de la siguiente manera:

$\frac{12}{x} = \frac{x}{3}$ ***; por Propiedad:*** $\left(\begin{matrix}\text{Producto de}\\ \text{MEDIOS}\end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix}\text{Producto de}\\ \text{EXTREMOS}\end{matrix}\right)$

$$x \cdot x = 12 \cdot 3$$

$$x^2 = 36 \Rightarrow x = \sqrt{36} \Rightarrow \therefore \boxed{x = 6}$$

Luego, la Media Proporcional de los números 12 y 3 es 6.

¿Cómo se halla la tercera o tercia proporcional?

Se forma una proporción geométrica con los dos números dados y con repetición como término medio uno de los números dados. Se halla el valor de **"x"**, y ese valor es la **tercera proporcional.**

Ejemplo: Hallar la tercera proporcional de 2 y 8.

Resolución:

Los números dados, se distribuyen de la siguiente manera:

$$\frac{2}{⑧} = \frac{⑧}{x}$$; ***por Propiedad:*** $2 \cdot x = 8 \cdot 8 \Rightarrow x = \frac{8 \cdot 8}{2} = 32$

$\therefore$ $\boxed{x = 32}$ **(32 es la tercera proporcional de 2 y 8).**

Los números dados 2 y 8; también se han podido distribuir de la siguiente manera:

$$\frac{8}{②} = \frac{②}{x}$$; ***por Propiedad:*** $8 \cdot x = 2 \cdot 2 \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 2}{8} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$\therefore$ $\boxed{x = 0{,}5}$ **(0,5 es la tercera proporcional de 2 y 8).**

> ***Observación:***
>
> *Como se ha podido observar la **Tercera Proporcional** varía según cuál de los términos dados se ponga de término medio repetido.*

Recordemos Que:

Antecedentes ↓ $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ ↑ **Consecuentes**

La **proporción geométrica:** $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$; también recibe el nombre de **Equicociente** (igualdad de cocientes).

Donde:

A y C → (Son los antecedentes)	**A y D** → (Términos Extremos)
B y D → (Son los consecuentes)	**B y C** → (Términos Medios)

4.1.2.3. Expresiones Diversas de una Misma Proporción Geométrica.

Aplicando la propiedad que dice Así: "El producto de los extremos es igual al producto de los medios".

- En la proporción geométrica:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; se tiene que: $a \times d = b \times c$

i) Permutando los Medios: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

ii) Permutando los Extremos: $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$

iii) Permutando Medios y Extremos: $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$

Estas igualdades todas son ciertas porque el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

☆ Estas igualdades, leidas en sentido inverso, dan otras cuatro:

$\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$; $\frac{b}{d} = \frac{a}{c}$; $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$; $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

vemos pues, que: **Hay ocho maneras de escribir la misma proporción.**

4.1.2.4. Operaciones que se pueden realizar con sus términos de una Proporción Geométrica.

a. Multiplicar o dividir todos los términos de la proporción por un mismo número.

- Sea la proporción geométrica:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \begin{cases} \dfrac{a \times n}{b \times n} = \dfrac{c \times n}{d \times n} \\[2ex] \dfrac{a : n}{b : n} = \dfrac{c : n}{d : n} \end{cases}$$

Ejemplo: Sea la Proporción Geométrica:

$$\frac{8}{4} = \frac{12}{6} \quad \begin{cases} \dfrac{8 \times 3}{4 \times 3} = \dfrac{12 \times 3}{6 \times 3} \Rightarrow \dfrac{24}{12} = \dfrac{36}{18} \Rightarrow 18 \times 24 = 12 \times 36 \\[2ex] \dfrac{8 : 2}{4 : 2} = \dfrac{12 : 2}{6 : 2} \Rightarrow \dfrac{4}{2} = \dfrac{6}{3} \Rightarrow 3 \times 4 = 2 \times 6 \end{cases}$$

b. Multiplicar o dividir los antecedentes por un mismo número.

- Sea la proporción geométrica:

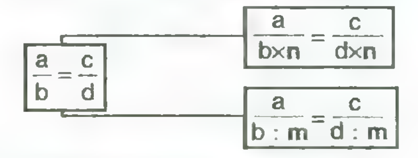
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \begin{cases} \dfrac{a \times n}{b} = \dfrac{c \times n}{d} \\[2ex] \dfrac{a : n}{b} = \dfrac{c : n}{d} \end{cases}$$

Ejemplo: Sea la proporción geométrica:

$$\frac{6}{9}=\frac{12}{18} \quad \begin{cases} \dfrac{6\times 2}{9}=\dfrac{12\times 2}{18} \Rightarrow \dfrac{12}{9}=\dfrac{24}{18} \Rightarrow \boxed{18\times 12=9\times 24} \\[2ex] \dfrac{6:3}{9}=\dfrac{12:3}{18} \Rightarrow \dfrac{2}{9}=\dfrac{4}{18} \Rightarrow \boxed{18\times 2=9\times 4} \end{cases}$$

c. Multiplicar o dividir los consecuentes por un mismo número.

- Sea la proporción geométrica:



Ejemplo: Sea la proporción geométrica:

$$\frac{6}{9}=\frac{18}{27} \quad \begin{cases} \dfrac{6}{9\times 2}=\dfrac{18}{27\times 2} \Rightarrow \dfrac{6}{18}=\dfrac{18}{54} \Rightarrow \boxed{54\times 6=18\times 18} \\[2ex] \dfrac{6}{9:3}=\dfrac{18}{27:3} \Rightarrow \dfrac{6}{3}=\dfrac{18}{9} \Rightarrow \boxed{9\times 6=3\times 18} \end{cases}$$

d. Multiplicar o dividir los dos términos de una de las razones por un mismo número.

- Sea la proporción geométrica:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \begin{cases} \dfrac{a\times n}{b\times n}=\dfrac{c}{d} \\[2ex] \dfrac{a}{b}=\dfrac{c:m}{d:m} \end{cases}$$

Ejemplo: Sea la proporción geométrica:

$$\frac{4}{8}=\frac{5}{10} \quad \begin{cases} \dfrac{4\times 2}{8\times 2}=\dfrac{5}{10} \Rightarrow \dfrac{8}{16}=\dfrac{5}{10} \Rightarrow \boxed{10\times 8=16\times 5} \\[2ex] \dfrac{4}{8}=\dfrac{5:5}{10:5} \Rightarrow \dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \boxed{2\times 4=8\times 1} \end{cases}$$

e. Elevar todos sus términos de la proporción a una misma potencia.

- Sea la proporción geométrica:

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}} \;\Rightarrow\; \boxed{\frac{a^n}{b^n}=\frac{c^n}{d^n}}$$

Ejemplo: Sea la Proporción Geométrica:

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6} \Rightarrow \frac{2^2}{3^2}=\frac{4^2}{6^2} \Rightarrow \frac{4}{9}=\frac{16}{36} \Rightarrow \boxed{36\times 4=9\times 16}$$

f. Extraer una misma raiz a todos los términos de la proporción.

- Sea la proporción geométrica:

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}} \Rightarrow \boxed{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}}}$$

Ejemplo: Sea la Proporción Geométrica:

$$\frac{4}{9}=\frac{16}{36} \Rightarrow \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{36}} \Rightarrow \frac{2}{3}=\frac{4}{6} \Rightarrow \boxed{6\times 2=3\times 4}$$

4.1.2.5. Propiedades de la Proporción Geométrica:

❶ La suma o resta de los dos términos de la primera razón es a su consecuente como la suma o resta de los dos términos de la segunda razón es a su consecuente.

- Sea la proporción geométrica:

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}} \quad \boxed{\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}} \quad \boxed{\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}}$$

Ejemplo: Sea la Proporción Geométrica:

$$\boxed{\frac{8}{4}=\frac{6}{3}} \quad \boxed{\frac{8+4}{4}=\frac{6+3}{3}} \Rightarrow \frac{12}{4}=\frac{9}{3} \Rightarrow \boxed{3\times 12=4\times 9}$$

$$\boxed{\frac{8-4}{4}=\frac{6-3}{3}} \Rightarrow \frac{4}{4}=\frac{3}{3} \Rightarrow \boxed{3\times 4=4\times 3}$$

❷ La suma o resta de los dos términos de la primera razón es a su antecedente como la suma o resta de los dos términos de la segunda razón es a su antecedente.

- Sea la proporción geométrica:

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}} \quad \boxed{\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}} \quad \boxed{\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}}$$

Ejemplo: Sea la Proporción Geométrica:

$$\frac{8}{4}=\frac{6}{3}$$

$$\frac{8+4}{8}=\frac{6+3}{6} \Rightarrow \frac{12}{8}=\frac{9}{6} \Rightarrow \boxed{6\times 12=8\times 9}$$

$$\frac{8-4}{8}=\frac{6-3}{6} \Rightarrow \frac{4}{8}=\frac{3}{6} \Rightarrow \boxed{6\times 4=8\times 3}$$

❸ En toda proporción Geométrica la suma o resta de los antecedentes es a la suma o resta de los consecuentes como antecedentes es a su consecuente.

- Sea la proporción geométrica: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}$$

$$\frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}$$

Ejemplo: Sea la Proporción Geométrica:

$$\frac{8}{4}=\frac{6}{3}$$

$$\frac{8+6}{4+3}=\frac{8}{4} \Rightarrow \frac{14}{7}=\frac{8}{4} \Rightarrow \boxed{4\times 14=7\times 8}$$

$$\frac{8-6}{4-3}=\frac{8}{4} \Rightarrow \frac{2}{1}=\frac{8}{4} \Rightarrow \boxed{4\times 2=1\times 8}$$

❹ En toda Proporción Geométrica la suma de los dos términos de la primera razón es a su diferencia como la suma de los dos términos de la segunda razón es a su diferencia.

- Sea la proporción geométrica: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ➧ $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

Ejemplo: Sea la Proporción Geométrica:

$$\frac{8}{4}=\frac{6}{3} \;➧\; \frac{8+4}{8-4}=\frac{6+3}{6-3} \Rightarrow \frac{12}{4}=\frac{9}{3} \Rightarrow \boxed{3\times 12=4\times 9}$$

❺ En toda proporción geométrica la suma de los antecedentes es a su diferencia como la suma de los consecuentes es a su diferencia.

- Sea la proporción geométrica: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ➧ $\frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-d}$

Ejemplo: Sea la proporción geométrica:

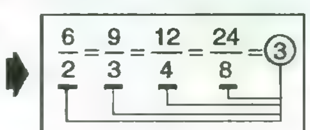
$$\frac{8}{4}=\frac{6}{3} \;➧\; \frac{8+6}{8-6}=\frac{4+3}{4-3} \Rightarrow \frac{14}{2}=\frac{7}{1} \Rightarrow \boxed{1\times 14=2\times 7}$$

4.1.2.6. Serie de Razones Iguales:

Cuando en lugar de dos razones iguales lo que constituye **una proporción**, tenemos más de dos razones iguales, se dice que forman una **serie de razones iguales**.

Por ejemplo: $\dfrac{6}{2}=\dfrac{9}{3}=\dfrac{12}{4}=\dfrac{24}{8}$

Observamos que todas estas razones valen **3**, a lo que se llama **Razón de Proporcionalidad**, osea:



De donde:

i) $\dfrac{6}{2}=3$ ii) $\dfrac{9}{3}=3$ iii) $\dfrac{12}{4}=3$ iv) $\dfrac{24}{8}=3$

En General: $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}=\ldots\ldots\ldots=\dfrac{a_n}{b_n}=K$

Donde:

$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$ = **Antecedentes**

$b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots, b_n$ = **Consecuentes**

K = **Valor Constante o Constante de Proporcionalidad.**

4.1.2.7. Propiedades para una Serie de Razones Geométricas Equivalentes.

1º Propiedad: *En toda serie de razones geométricas equivalentes se cumple que:*

"La razón geométrica entre la suma de sus antecedentes y la suma de sus consecuentes posee un valor igual a la constante de proporcionalidad de dicha serie".

Es decir:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots\ldots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\ldots\ldots\ldots+b_n}=K$$

Ejemplo: Dadas las razones equivalentes:

$$\frac{4}{2}=\frac{6}{3}=\frac{8}{4}=\frac{12}{6}=2$$

Se cumple que:

$$\frac{4+6+8+12}{2+3+4+6}=2 \Rightarrow \boxed{\frac{30}{15}=2}$$

2º Propiedad: *En toda serie de razones geométricas equivalentes se cumple que:*

"La razón geométrica entre el producto de los antecedentes y el producto de los consecuentes posee un valor igual a la constante de proporcionalidad elevada a un exponente igual al número de razones que conforman la serie".

Es decir:

$$\frac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_n} = K^n$$

Ejemplo: Dadas las razones equivalentes.

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Constante de proporcionalidad

Se cumple:

$$\frac{2 \times 3 \times 4}{4 \times 6 \times 8} = \left(\boxed{\frac{1}{2}}\right)^3 \Rightarrow \frac{24}{192} = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8}$$

3º Propiedad: *En toda serie de razones geométricas equivalentes se cumple que:*

"La Razón Geométrica entre la suma de las potencias de exponente "m" de los antecedentes y la suma de las potencias de exponente "m" de los consecuentes tiene un valor igual a la constante de proporcionalidad elevada al exponente "m".

$$\frac{a_1^m + a_2^m + a_3^m + \ldots + a_n^m}{b_1^m + b_2^m + b_3^m + \ldots + b_n^m} = K^m$$

Ejemplo 1: Dadas las Razones Equivalentes:

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \boxed{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{2^2 + 3^2 + 4^2}{4^2 + 6^2 + 8^2} = \left(\boxed{\frac{1}{2}}\right)^2$$

De donde:

$$\frac{4 + 9 + 16}{16 + 36 + 64} = \frac{1^2}{2^2} \Rightarrow \therefore \boxed{\frac{29}{116} = \frac{1}{4}}$$

Ejemplo 2: Dadas las Razones Equivalentes:

$$\frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \boxed{2} \Rightarrow \frac{4^3 + 6^3 + 8^3}{2^3 + 3^3 + 4^3} = (\boxed{2})^3$$

$$\frac{64 + 216 + 512}{8 + 27 + 64} = 8 \Rightarrow \therefore \boxed{\frac{792}{99} = 8}$$

Observación:

Estimado alumno como habrás observado que el concepto de fracción y de razón son muy similares.

A. Fracción:

a → *Numerador*
b → *Denominador*

B. Equivalencia:

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$$

C. Relación de Equivalencia:

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \Leftrightarrow \boxed{a \cdot d = b \cdot c}$$

D. Familia de Fracciones Equivalentes:

$$\frac{2}{3} \sim \frac{4}{6} \sim \frac{6}{9} \sim \frac{8}{12} \sim \ldots\ldots\ldots\ldots$$

A. Razón:

a → *Antecedente*
b → *Consecuente*

B. Proporción:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

C. Propiedad Fundamental:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \boxed{a \cdot d = b \cdot c}$$

D. Serie de Razones Iguales:

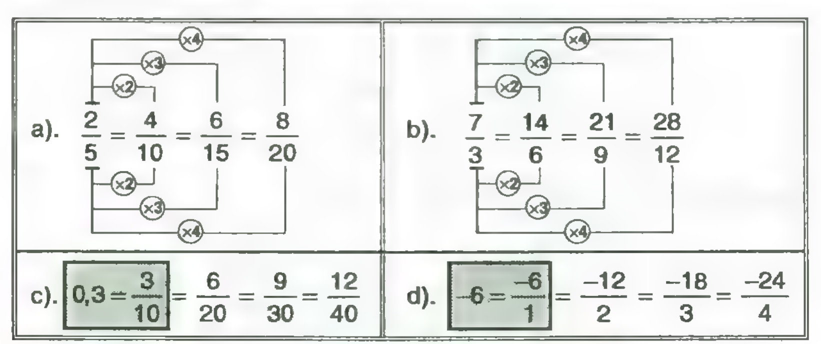
$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejercicio 1: Escribe tres razones iguales a cada una de las siguientes:

a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{7}{3}$ c) 0,3 d) -6

Resolución:



Ejercicio 2: Aplica la propiedad fundamental para verificar si los cuatro números en cada caso forman proporción. Escribe verdadero (V) o Falso (F) según corresponda.

a). $\frac{6}{3}=\frac{7}{4}$	c). $\frac{3}{4}=\frac{7}{9}$	e). $\frac{14}{28}=\frac{2}{4}$
b). $\frac{4}{10}=\frac{6}{15}$	d). $\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$	f). $\frac{12}{15}=\frac{8}{10}$

Resolución:

Aplicando la propiedad que dice: "En toda **pronorción geométrica** se cumple que el producto de los extremos es igual al producto de los medios".

a). $\frac{6}{3}=\frac{7}{4} \Rightarrow 4\times 6 \neq 3\times 7$ $24 \neq 21$ **(F)** $\therefore$ $\frac{6}{3}=\frac{7}{4}$ **(No es una proporción)**	b). $\frac{4}{10}=\frac{6}{15} \Rightarrow 15\times 4 = 10\times 6$ $60 = 60$ **(V)** $\therefore$ $\frac{4}{10}=\frac{6}{15}$ **(Si es una proporción)**
c). $\frac{3}{4}=\frac{7}{9} \Rightarrow 9\times 3 \neq 4\times 7$ $27 \neq 28$ **(F)** $\therefore$ $\frac{3}{4}=\frac{7}{9}$ **(No es una proporción)**	d). $\frac{6}{27}=\frac{2}{9} \Rightarrow 9\times 6 = 27\times 2$ $54 = 54$ **(V)** $\therefore$ $\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$ **(Si es una proporción)**
e). $\frac{14}{28}=\frac{2}{4} \Rightarrow 4\times 14 = 28\times 2$ $56 = 56$ **(V)** $\therefore$ $\frac{14}{28}=\frac{2}{4}$ **(Si es una proporción)**	f). $\frac{12}{15}=\frac{8}{10} \Rightarrow 10\times 12 = 15\times 8$ $120 = 120$ **(V)** $\therefore$ $\frac{12}{15}=\frac{8}{10}$ **(Si es una proporción)**

Ejercicio 3: Hallar los valores de "x" e "y" en la expresión:

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{5}\ ;\ \text{si:}\quad x+y=48$$

Resolución:

Aplicando la propiedad: $\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}}$

Obtenemos: $\frac{x}{3}=\frac{y}{5} \Rightarrow \frac{x+y}{3+5}=\frac{x}{3}=\frac{y}{5}$

(1): $\frac{x+y}{3+5}=\frac{x}{3}$ (2): $\frac{x+y}{3+5}=\frac{y}{5}$

De donde:

i) $\underbrace{\frac{x+y}{3+5}=\frac{x}{3}}_{①}$; **Por Dato:** $\boxed{x+y=48}$

Luego: $\frac{48}{3+5}=\frac{x}{3} \Rightarrow \frac{48}{8}=\frac{x}{3} \Rightarrow 6=\frac{x}{3} \Rightarrow \therefore \boxed{18=x}$

ii) $\underbrace{\frac{x+y}{3+5}=\frac{y}{5}}_{②}$; **Por Dato:** $\boxed{x+y=48}$

Luego: $\frac{48}{3+5}=\frac{y}{5} \Rightarrow \frac{48}{8}=\frac{y}{5} \Rightarrow 6=\frac{y}{5} \Rightarrow \therefore \boxed{30=y}$

Respuesta: Los valores de "x" e "y" son: 18 y 30 respectivamente.

Otro Método:

- Igualamos cada una de las razones que conforman la proporción dada a la constante **"K"**, veamos:

$\frac{x}{3}=\frac{y}{5}=K$ ***Donde:***

- o $\frac{x}{3}=K \Rightarrow \boxed{x=3K}$ .... **(1)**
- oo $\frac{y}{5}=K \Rightarrow \boxed{y=5K}$ .... **(2)**

Reemplazamos **(1)** y **(2)** en la expresión dato: $\boxed{x+y=48}$; obteniendo.

$$x + y = 48$$

$$3K+5K=48 \Rightarrow 8K=48$$

$$K=\frac{48}{8} \Rightarrow \therefore \boxed{K=6}$$

Luego, reemplazamos el valor de K = 6; en **(1)** y **(2)**:

De (1): $x=3K \Rightarrow x=3(6) \Rightarrow \boxed{x=18}$

De (2): $y=5K \Rightarrow y=5(6) \Rightarrow \boxed{y=30}$

Respuesta: Los valores de "x" e "y" son: 18 y 30 respectivamente.

Ejercicio 4: Hallar los valores de "x" e "y" en la expresión: $\frac{x}{5}=\frac{y}{9}$; $y-x=16$

Resolución:

Aplicando la Propiedad: $\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{c-a}{d-b}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}}$

Obtenemos: $\frac{x}{5}=\frac{y}{9} \Rightarrow \frac{y-x}{9-5}=\frac{x}{5}=\frac{y}{9}$

(1): $\frac{y-x}{9-5}$ con $\frac{x}{5}$; (2): $\frac{y-x}{9-5}$ con $\frac{y}{9}$

De donde:

i) $\frac{y-x}{9-5}=\frac{x}{5}$ (1) ; **Por Dato:** $\boxed{y-x=16}$

Luego: $\frac{16}{9-5}=\frac{x}{5} \Rightarrow \frac{16}{4}=\frac{x}{5} \Rightarrow 4=\frac{x}{5} \Rightarrow \therefore \boxed{20=x}$

ii) $\frac{y-x}{9-5}=\frac{y}{9}$ (2) ; **Por Dato:** $\boxed{y-x=16}$

Luego: $\frac{16}{9-5}=\frac{y}{9} \Rightarrow \frac{16}{4}=\frac{y}{9} \Rightarrow 4=\frac{y}{9} \Rightarrow \therefore \boxed{36=y}$

Respuesta: Los valores de "x" e "y" son: 20 y 36 respectivamente.

Otro Método:

- Igualamos cada una de las razones que conforman la proporción dada a la constante "**K**", veamos:

$\frac{x}{5}=\frac{y}{9}=K$ ***Donde:***

- o $\frac{x}{5}=K \Rightarrow \boxed{x=5K}$ .... **(1)**
- oo $\frac{y}{9}=K \Rightarrow \boxed{y=9K}$ .... **(2)**

Reemplazamos **(1)** y **(2)** en la expresión dato: $\boxed{y-x=16}$; obteniendo.

$y - x = 16$

$9K - 5K = 16 \Rightarrow 4K = 16$

$K=\frac{16}{4} \Rightarrow \therefore \boxed{K=4}$

Luego, reemplazamos el valor de K = 4; en **(1)** y **(2)**:

De (1): $x=5K \Rightarrow x=5(4) \Rightarrow \boxed{x=20}$

De (2): $y=9K \Rightarrow y=9(4) \Rightarrow \boxed{y=36}$

Respuesta: Los valores de "x" e "y" son: 20 y 36 respectivamente.

Ejercicio 5: Hallar los valores de "x" e "y" en la expresión:

$$\frac{12}{x}=\frac{28}{y}\ ;\ \text{si: } y-x=12$$

Resolución:

Aplicando la propiedad: $\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{c-a}{d-b}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}}$

Obtenemos: $\frac{12}{x}=\frac{28}{y}\Rightarrow\frac{28-12}{y-x}=\frac{12}{x}=\frac{28}{y}$

(1): $\frac{28-12}{y-x}$ con $\frac{12}{x}$; (2): $\frac{28-12}{y-x}$ con $\frac{28}{y}$

De donde:

i) $\frac{28-12}{y-x}=\frac{12}{x}$ (1) ; **Por Dato:** $\boxed{y-x=12}$

Luego: $\frac{28-12}{y-x}=\frac{12}{x}\Rightarrow\frac{16}{12}=\frac{12}{x}\Rightarrow x=\frac{12\cdot 12}{16}\Rightarrow\ \therefore\ \boxed{x=9}$

ii) $\frac{28-12}{y-x}=\frac{28}{y}$ (2) ; **Por Dato:** $\boxed{y-x=12}$

Luego: $\frac{28-12}{y-x}=\frac{28}{y}\Rightarrow\frac{16}{12}=\frac{28}{y}\Rightarrow y=\frac{12\cdot 28}{16}\Rightarrow\ \therefore\ \boxed{y=21}$

Respuesta: Los valores de "x" e "y" son: 9 y 21 respectivamente.

Otro Método:

- Igualamos cada una de las razones que conforman la proporción dada a la constante "**K**", veamos:

$\frac{12}{x}=\frac{28}{y}=K$ ***Donde:***

- o $\frac{12}{x}=K \Rightarrow \frac{12}{K}=x$ .... **(1)**
- oo $\frac{28}{y}=K \Rightarrow \frac{28}{K}=y$ .... **(2)**

Reemplazamos **(1)** y **(2)** en la expresión dato: $\boxed{y-x=12}$; obteniendo.

$$y - x = 12$$

$$\frac{28}{K}-\frac{12}{K}=12\Rightarrow\frac{16}{K}=12\Rightarrow\frac{16}{12}=K$$

$$\therefore\ \boxed{\frac{4}{3}=K}$$

Luego, reemplazamos el valor de K = 4/3 ; en **(1)** y **(2)**:

De (1): $\frac{12}{K}=x \Rightarrow \frac{12}{\left(\frac{4}{3}\right)}=x \Rightarrow \frac{12\cdot 3}{4}=x \Rightarrow \boxed{9=x}$

De (2): $\frac{28}{K}=y \Rightarrow \frac{28}{\left(\frac{4}{3}\right)}=y \Rightarrow \frac{28\cdot 3}{4}=y \Rightarrow \boxed{21=y}$

Respuesta: Los valores de "x" e "y" son: 9 y 21 respectivamente.

Ejercicio 6: Dos números están en la relación de 4 a 13. Si su diferencia es 27. Determinar el menor de dichos números.

Resolución:

Sean los dos números: "a" y "b"

Donde: $\boxed{\frac{a}{b}=\frac{4}{13}}$; esta relación nos indica que por cada 4 unidades de "a" habrán 13 unidades de "b"; siendo, entonces "a" el menor, es decir: $\boxed{b - a = 27}$ .... **(I)**

En la proporción: $\frac{a}{b}=\frac{4}{13}$; **Por propiedad:** $\boxed{\frac{a}{b-a}=\frac{4}{13-4}}$ .... **(II)**

Reemplazamos **(I)** en **(II)**:

$$\frac{a}{27}=\frac{4}{13-4} \Rightarrow a=\frac{4}{9}\times 27 \Rightarrow \therefore \boxed{a=12}$$

Luego, reemplazamos el valor de a = 12 ; en **(I)**:

$$b - a = 27 \Rightarrow b - 12 = 27 \Rightarrow b = 27 + 12 \Rightarrow \therefore \boxed{b = 39}$$

Respuesta: El número menor es: a = 12

Otro Método:

$\frac{a}{b}=\frac{4}{13} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{4K}{13K} \rightarrow \begin{cases} \boxed{a = 4K} \\ \boxed{b = 13K} \end{cases}$ .... **(I)**

Por dato: $\boxed{b - a = 27}$ .... **(II)**

Reemplazamos **(I)** en **(II)**:

$$13K-4K=27 \Rightarrow 9K=27$$

$$K=\frac{27}{9} \Rightarrow \therefore \boxed{K=3}$$

Reemplazamos el valor de K = 3; en **(I)**:

i) $a = 4K \Rightarrow a = 4(3) \Rightarrow \boxed{a = 12}$ ***(# menor)***

ii) $b = 13K \Rightarrow b = 13(3) \Rightarrow \boxed{b = 39}$ ***(# mayor)***

Ejercicio 7: Si la suma de dos números es 60 y su diferencia es 20. Hallar la razón geométrica entre dichos números

Resolución:

Sean los dos números "a" y "b".

Del enunciado, planteamos las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{ll} (*) & a + b = 60 \\ (**) & a - b = 20 \end{array}\right\}$$ **(Sumamos miembro a miembro (Σ M.A.M.)]**

$$\Sigma \text{ M.A.M: } 2a = 80 \Rightarrow a = \frac{80}{2} \Rightarrow \therefore \boxed{a = 40}$$

Reemplazamos el valor de a = 40; en (*):

$$a + b = 60 \Rightarrow 40 + b = 60 \Rightarrow b = 60 - 40 \Rightarrow \therefore \boxed{b = 20}$$

Luego, la razón geométrica entre "b" y "a", sería:

$$\frac{b}{a} = \frac{20}{40} \Rightarrow \therefore \boxed{\frac{b}{a} = \frac{1}{2}}$$

Respuesta: La Razón Geométrica entre "b" y "a" es: 1/2.

Ejercicio 8: La suma de los cuadrados de dos números es 52; y la razón de dichos números es 2/3. ¿Cuáles son los números?

Resolución:

Sean los dos números: a y b

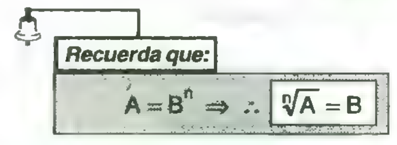
Del enunciado:
- ☆ Suma de cuadrados: $\boxed{a^2 + b^2 = 52}$ .... **(1)**
- ☆ La razón: $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{2}{3}}$ .... **(2)**

De la expresión **(2)**, elevamos al cuadrado a cada término; obteniendo:

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{2^2}{3^2} \text{ ; } \textbf{por propiedad: } \frac{a^2 + b^2}{b^2} = \frac{2^2 + 3^2}{3^2}$$

$$\frac{a^2 + b^2}{b^2} = \frac{4 + 9}{9} = \frac{13}{9} \text{ .... } \textbf{(3)}$$

Reemplazamos **(1)** en **(3)**:



$$\frac{52}{b^2} = \frac{13}{9} \Rightarrow \frac{52 \times 9}{13} = b^2$$

$$4 \times 9 = b^2 \Rightarrow 36 = b^2$$

$$\sqrt{36} = b \Rightarrow \therefore \boxed{6 = b}$$

Luego: reemplazamos el valor de b = 6; en **(2)**:

$$\frac{a}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = \frac{2}{3} \times 6 \Rightarrow a = 2 \times 2 \Rightarrow \therefore \boxed{a = 4}$$

Respuesta: Los números pedidos son: 6 y 4.

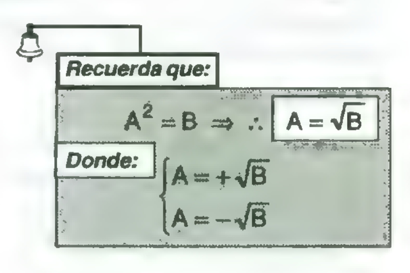
Otro Método:

Sean los dos números: "a" y "b"

Del enunciado, planteamos las ecuaciones:

$$a^2 + b^2 = 52 \quad \text{.......... (1)}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3} \quad \text{.......... (2)}$$



De la expresión **(2)**; obtenemos:

$$\frac{a}{b} = \frac{2K}{3K} \rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 2K \\ b = 3K \end{array}\right\} \text{.......... (3)}$$

Reemplazamos **(3)** en **(1)**:

$$(2K)^2 + (3K)^2 = 52$$

$$4K^2 + 9K^2 = 52 \Rightarrow 13K^2 = 52$$

$$K^2 = \frac{52}{13} \Rightarrow K^2 = 4$$

$$K = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \Rightarrow \therefore \boxed{K = 2}$$

Luego, reemplazamos el valor de K = 2 en **(3)**.

i) $a = 2K \Rightarrow a = 2(2) \Rightarrow \boxed{a = 4}$ ***(# menor)***

ii) $b = 3K \Rightarrow b = 3(2) \Rightarrow \boxed{b = 6}$ ***(# mayor)***

Ejercicio 9: Hallar la razón equivalente a 4/7; de tal manera que la suma de los cuatro términos de la proporción formada sea igual a 66.

Resolución:

Sea la razón equivalente a $\frac{4}{7}$ igual a: $\boxed{\frac{4K}{7K}}$ .... (I)

Del enunciado:

$$4 + 7 + 4K + 7K = 66$$

$$11 + 11K = 66 \Rightarrow 11\,K = 66 - 11 \Rightarrow 11 \Rightarrow K = 55 \Rightarrow \therefore \boxed{K = 5}$$

Luego, reemplazamos el valor de K = 5, en (I):

Fracción Equivalente a $\frac{4}{7}$ es igual a: $\frac{4K}{7K} = \frac{4(5)}{7(5)} = \frac{20}{35}$

> ***Respuesta:*** La razón equivalente a 4/7 es: $\frac{20}{35}$

Ejercicio 10: En un salón de clase, antes del recreo el número de hombres es al número de mujeres como 9 es a 5. Si después del recreo, hay 8 hombres y 4 mujeres menos, con lo cual la razón de hombres a mujeres es 7/4. Hallar cuántas mujeres habían antes del recreo.

Resolución:

Sea:
- ☆ El número de hombres = H
- ☆ El número de mujeres = M

Del enunciado:

Antes del recreo:

$\boxed{\frac{H}{M} = \frac{9}{5}}$ .... (I)

Después del recreo:

$\boxed{\frac{H-8}{M-4} = \frac{7}{4}}$ .... (II)

De la expresión (I): $\boxed{H = \frac{9}{5}M}$ .... (III)

Reemplazamos (III) en (II):

$$\frac{\frac{9}{5}M - 8}{M - 4} = \frac{7}{4} \Rightarrow 4\left(\frac{9}{5}M - 8\right) = 7(M - 4)$$

$$\frac{36}{5}M - 32 = 7M - 28 \Rightarrow \frac{36}{5}M - 7M = -28 + 32$$

$$\frac{36}{5}M - 7M = 4$$

$$36M - 35M = 20 \Rightarrow \therefore \boxed{M = 20}$$

> ***Respuesta:*** El número de mujeres que habían antes del recreo eran 20.

Ejercicio 11: El producto de los cuatro términos de una proporción continua es 625, y el segundo consecuente es 25. ¿Cuál es la proporción?

Resolución:

Sea la proporción continua: $\boxed{\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}}$ **Por Dato:** $\boxed{c=25}$

Donde: $\left\{\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{25}\right.$ **Del enunciado:**

$$a \times b \times b \times 25 = 625$$

$$a \times b^2 = \frac{625}{25} \Rightarrow a \times b^2 = 25 \quad \text{.... (I)}$$

De la proporción: $\boxed{\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{25}}$ Por propiedad:

$$25 \times a = b \times b \Rightarrow \therefore \boxed{25a = b^2} \quad \text{.... (II)}$$

Reemplazamos **(II)** en **(I)**:

$$a \times 25a = 25 \Rightarrow a^2 = \frac{25}{25} = 1 \Rightarrow a = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \therefore \boxed{a=1}$$

Reemplazamos el valor de a = 1; en **(II)**:

$$25 \times 1 = b^2 \Rightarrow 25 = b^2 \Rightarrow \pm\sqrt{25} = b \Rightarrow \therefore \boxed{5=b}$$

Luego la proporción: $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{25}$ es igual a: $\dfrac{1}{5}=\dfrac{5}{25}$

> ***Respuesta:*** La proporcióin continua pedida es: $\dfrac{1}{5}=\dfrac{5}{25}$

Ejercicio 12: Hallar la tercera proporcional entre:

a) 3 y 6 **b)** 0,2 y 0,8 c) 10 y $\dfrac{1}{2}$

Resolución:

- Para hallar la tercera proporcional, la proporción que se forme debe ser continua.

Veamos:

a) $\dfrac{3}{6}=\dfrac{6}{x}$  ***Por Propiedad:***

$$3 \cdot x = 6 \cdot 6$$

$$x = \frac{6 \cdot 6}{3} = 12$$

$\therefore \boxed{x=12}$ **(Tercera proporcional de 3 y 6)**

b) $\dfrac{0{,}2}{0{,}8} = \dfrac{0{,}8}{y}$ ➧ ***Por Propiedad:***

$$0{,}2 \cdot y = 0{,}8 \cdot 0{,}8$$

$$\frac{2}{\cancel{10}}y = \frac{8}{\cancel{10}} \cdot \frac{8}{10}$$

$$\therefore \quad y = \frac{\cancel{64}}{10 \cdot \cancel{2}}$$

$\boxed{y = 3{,}2}$ **(Tercera proporcional de 0,2 y 0,8)**

c) $\dfrac{10}{\left(\dfrac{1}{2}\right)} = \dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)}{z}$ ➧ ***Por Propiedad:***

$$10 \cdot z = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$z = \frac{1}{4 \cdot 10}$$

$\therefore \boxed{z = \dfrac{1}{40}}$ **(Tercera proporcional de 10 y 1/2)**

Ejercicio 13: Determinar la cuarta proporcional de:

a) 9 ; 13 y 18 **b)** 17; 4 y 85

Resolución:

- Para hallar la cuarta proporcional, la proporción que se forme debe ser discreta.

Veamos:

a) $\dfrac{9}{13} = \dfrac{18}{x}$

Por Propiedad:

$$9 \cdot x = 13 \cdot 18$$

$$x = \frac{13 \cdot \cancel{18}}{\cancel{9}} = 13.2$$

$$\therefore \boxed{x = 26}$$

(4^{ta} proporcional de 9; 13 y 18)

a) $\dfrac{17}{4} = \dfrac{85}{y}$

Por Propiedad:

$$17 \cdot y = 4 \cdot 85$$

$$y = \frac{4 \cdot \cancel{85}}{\cancel{17}} = 4.5$$

$$\therefore \boxed{y = 20}$$

(4^{ta} proporcional de 17; 4 y 85)

Ejercicio 14: Si: $\dfrac{3}{x}=\dfrac{6}{y}=\dfrac{9}{z}$; donde: $x+y+z=42$

Hallar el valor de "z".

Resolución:

Aplicando la propiedad:

$$\boxed{\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}} \Rightarrow \boxed{\frac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}}$$

Obtenemos que:

$$\boxed{\frac{3}{x}=\frac{6}{y}=\frac{9}{z}} \Rightarrow \frac{3+6+9}{x+y+z}=\frac{3}{x}=\frac{6}{y}=\frac{9}{z}$$

Donde: $\dfrac{3+6+9}{x+y+z}=\dfrac{9}{z}$ ➧ ***Por Dato:*** $\boxed{x+y+z=42}$

Luego: $\dfrac{3+6+9}{x+y+z}=\dfrac{9}{z} \Rightarrow \dfrac{18}{42}=\dfrac{9}{z} \Rightarrow z=\dfrac{42\cdot 9}{18}=\dfrac{42}{2}$

$\therefore \boxed{z=21}$

Respuesta: El valor de "z" es igual a 21.

Otra Forma:

$\dfrac{3}{x}=\dfrac{6}{y}=\dfrac{9}{z}=K$ ➧ ***Por Dato:*** $\boxed{x+y+z=42}$ .... (α)

Donde:

i) $\dfrac{3}{x}=K \Rightarrow \boxed{\dfrac{3}{K}=x}$

ii) $\dfrac{6}{y}=K \Rightarrow \boxed{\dfrac{6}{K}=y}$ .... (β)

iii) $\dfrac{9}{z}=K \Rightarrow \boxed{\dfrac{9}{K}=z}$

Reemplazamos (β) en (α):

$\dfrac{3}{K}+\dfrac{6}{K}+\dfrac{9}{K}=42 \Rightarrow \dfrac{18}{K}=42 \Rightarrow \dfrac{18}{42}=K \Rightarrow \therefore \boxed{\dfrac{3}{7}=K}$ (Sacamos sexta a cada término osea dividimos entre 6.)

Reemplazamos el valor de K = 3/7 en (β):

i) $\frac{3}{K} = x \Rightarrow \frac{3}{\left(\frac{3}{7}\right)} = x \Rightarrow \frac{21}{3} = x \Rightarrow \boxed{7 = x}$

ii) $\frac{6}{K} = y \Rightarrow \frac{6}{\left(\frac{3}{7}\right)} = y \Rightarrow \frac{42}{3} = y \Rightarrow \boxed{14 = y}$

iii) $\frac{9}{K} = z \Rightarrow \frac{9}{\left(\frac{3}{7}\right)} = z \Rightarrow \frac{63}{3} = z \Rightarrow \boxed{21 = z}$

Respuesta: El valor de z, es igual a 21.

Ejercicio 15: Si: $\frac{1{,}2}{3{,}6} = \frac{a}{b} = \frac{4}{c}$; además: $a + b + c = 20$

Hallar el valor de "a + b".

Resolución:

Aplicando la propiedad:

$$\boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}} \Rightarrow \boxed{\frac{a_1 + a_2 + a_3}{b_1 + b_2 + b_3} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}}$$

Obtenemos que:

$$\frac{1{,}2}{3{,}6} = \frac{a}{b} = \frac{4}{c} \Rightarrow \frac{\cancel{12}}{\cancel{36}} = \frac{a}{b} = \frac{4}{c} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{3} = \frac{a}{b} = \frac{4}{c}} \text{ .... } (\alpha)$$

Luego: $\frac{1}{3} = \frac{a}{b} = \frac{4}{c} \Rightarrow \frac{1 + a + 4}{3 + b + c} = \frac{1}{3} = \frac{a}{b} = \frac{4}{c}$

Donde: $\frac{1 + a + 4}{3 + b + c} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3 + 3a + 12 = 3 + b + c$

$$\therefore \boxed{3a + 12 = b + c} \text{ .... (I)}$$

Del Dato: $a + b + c = 20 \Rightarrow \boxed{b + c = 20 - a}$ .... (II)

Reemplazamos **(II)** en **(I)**:

$$3a + 12 = 20 - a \Rightarrow 3a + a = 20 - 12 \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow \therefore \boxed{a = 2}$$

Reemplazamos el valor de a = 2; en (α):

$$\frac{1}{3}=\frac{2}{b}=\frac{4}{c}$$

De ①: $\frac{1}{3}=\frac{2}{b} \Rightarrow 1\cdot b=3\cdot 2 \Rightarrow \therefore \boxed{b=6}$

De ②: $\frac{1}{3}=\frac{4}{c} \Rightarrow 1\cdot c=3\cdot 4 \Rightarrow \therefore \boxed{c=12}$

Respuesta: El valor de: a + b = 2 + 6 = 8

Ejercicio 16: La suma de tres números que guardan entre si la relación de los números 3; 5 y 7 es igual a 120. ¿Cuáles son esos números?

Resolución:

Sean los tres números pedidos: a; b y c.

Del enunciado, obtenemos:

$\boxed{\frac{a}{3}=\frac{b}{5}=\frac{c}{7}}$ .... **(I)** Además: $\boxed{a+b+c=120}$ .... **(II)**

En la expresión **(I)**; aplicamos la propiedad:

$$\frac{a}{3}=\frac{b}{5}=\frac{c}{7} \Rightarrow \frac{a+b+c}{3+5+7}=\frac{a}{3}=\frac{b}{5}=\frac{c}{7}$$

Donde:

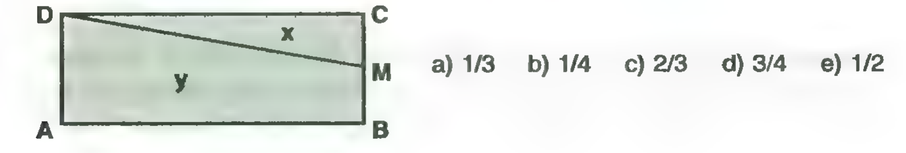
① $\frac{a+b+c}{3+5+7}=\frac{a}{3} \Rightarrow \frac{120}{15}=\frac{a}{3} \Rightarrow 8\cdot 3=a \Rightarrow \therefore \boxed{24=a}$

② $\frac{a+b+c}{3+5+7}=\frac{b}{5} \Rightarrow \frac{120}{15}=\frac{b}{5} \Rightarrow 8\cdot 5=b \Rightarrow \therefore \boxed{40=b}$

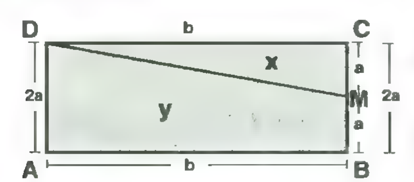
③ $\frac{a+b+c}{3+5+7}=\frac{c}{7} \Rightarrow \frac{120}{15}=\frac{c}{7} \Rightarrow 8\cdot 7=c \Rightarrow \therefore \boxed{56=c}$

Respuesta: Los tres números pedidos son: 24; 40 y 56.

Ejercicio 17: En el rectángulo ABCD, se une el punto medio "M" de $\overline{BC}$ con "D". La razón entre las partes **x é y** en que queda dividido el rectángulo es:



Resolución:



* Hacemos: $\overline{AB} = \overline{DC} = b$

Como "M" es punto medio de $\overline{BC}$, hacemos:

$\overline{BM} = \overline{MC} = a$

* **Calculamos el área de la parte "x" y la parte "y".**

1). Parte "**x**" = área del ◺ DCM

$$= \frac{\textbf{base} \times \textbf{altura}}{2}$$

$$\text{Parte "x"} = \frac{\overline{DC} \times \overline{CM}}{2} = \frac{b \times a}{2} \quad \text{...... (I)}$$

2). Parte "**y**" = área del ⏢ ABMD

$$= \left(\frac{\textbf{base >} + \textbf{ base <}}{2}\right) \times \textbf{altura}$$

$$= \left(\frac{\overline{AD} + \overline{BM}}{2}\right) \times \overline{AB}$$

$$\text{Parte "y"} = \left(\frac{2a + a}{2}\right) \times b \quad \text{...... (II)}$$

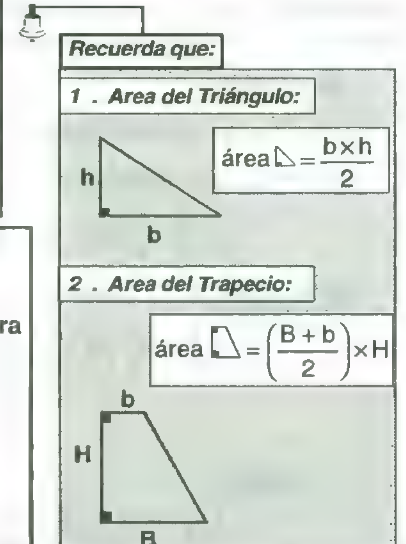
Recuerda que:

1 . Area del Triángulo:

$$\text{área} ◺ = \frac{b \times h}{2}$$

2 . Area del Trapecio:

$$\text{área} ⏢ = \left(\frac{B + b}{2}\right) \times H$$



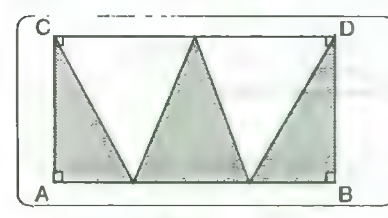
Luego:

$$\text{Razón} = \frac{\text{Parte "x"}}{\text{Parte "y"}} \quad \text{........ (III)}$$

Reemplazamos **(I)** y **(II)** en **(III)**:

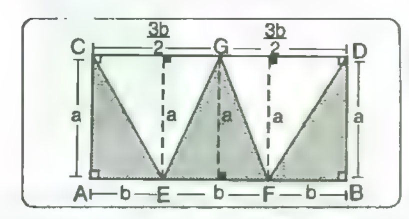
$$\text{Razón} = \frac{\frac{b \times a}{2}}{\left(\frac{2a + a}{2}\right) \times b} = \frac{\frac{b \times a}{2}}{\frac{3a \times b}{2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \therefore \; \text{Razón} = \frac{\text{Parte "x"}}{\text{Parte "y"}} = \frac{1}{3}$$ ***Rpta. a***

Ejercicio 18: Los lados de un rectángulo miden $\overline{AB} = 3b$; $\overline{BD} = a$. Se divide el lado, $\overline{AB}$ en tres partes iguales y $\overline{CD}$ en dos partes iguales. Entonces la razón entre las áreas de la parte "Achurada" (sombreada) y la no "Achurada" es:



a) a/b b) 2a/3b c) 3/2 d) 1 e) ab/2

Resolución:



* Hacemos: $\boxed{\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FB} = b}$

- De la figura: $\boxed{\overline{AB} = \overline{CD} = 3b}$

Además: $\overline{DG} = \overline{GC} = \dfrac{\overline{CD}}{2}$

$$\boxed{\overline{DG} = \overline{GC} = \frac{3b}{2}}$$

* **Calculamos el área de la parte Achurada y la No Achurada:**

1) área de la parte Achurada = (triángulo a, b) + (triángulo a, b) + (triángulo b, a)

$$= \frac{b\times a}{2} + \frac{b\times a}{2} + \frac{b\times a}{2}$$

$$\therefore \boxed{\text{área de la parte Achurada} = 3\left(\frac{b\times a}{2}\right)}$$

2) área de la parte No Achurada = (triángulo $\frac{3}{2}b$, a) + (triángulo $\frac{3}{2}b$, a)

$$\text{área de la parte No Achurada} = \frac{\frac{3}{2}b\times a}{2} + \frac{\frac{3}{2}b\times a}{2}$$

$$= 2\left(\frac{3b\times a}{4}\right) = \frac{3b\times a}{2}$$

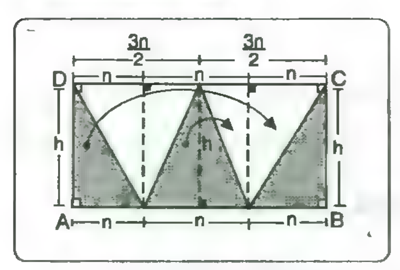
$$\therefore \boxed{\text{área de la parte No Achurada} = 3\left(\frac{b\times a}{2}\right)}$$

Luego:

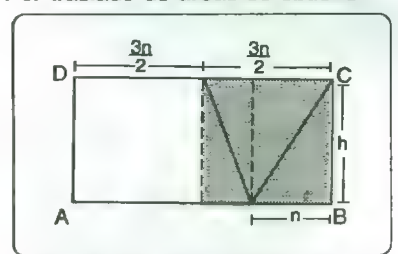
$$\text{Razón} = \frac{\text{área de la Parte Achurada}}{\text{área de la parte No Achurada}} = \frac{3\left(\frac{b\times a}{2}\right)}{3\left(\frac{b\times a}{2}\right)} = 1$$

$$\therefore \boxed{\text{Razón} = \frac{\text{área de la Parte Achurada}}{\text{área de la parte No Achurada}} = 1}$$ ***Rpta. d***

• Otro Método:



* Por traslado de áreas se obtiene:



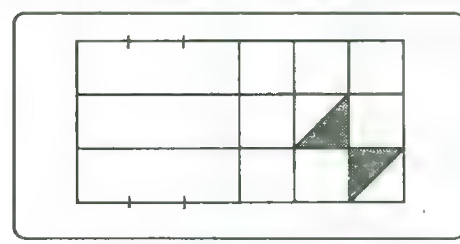
- Como se podrá obsevar en esta última figura, el área de la región sombreada y el área de la región no sombreada es la mitad del área del rectángulo **ABCD**.

Luego:

$$\text{Razón} = \frac{\text{área de la Parte Sombreada}}{\text{área de la parte No Sombreada}} = \frac{\frac{1}{2}(\text{área} \square \text{ABCD})}{\frac{1}{2}(\text{área} \square \text{ABCD})}$$

$\therefore$ $\boxed{\text{Razón} = 1}$ ***Rpta. d***

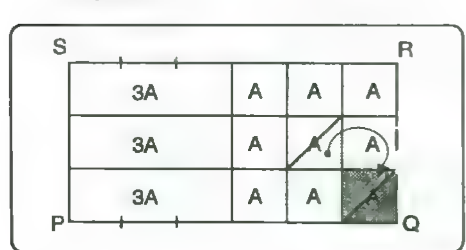
Ejercicio 19: La parte "Achurada" (sombreada) representa del total:



a) 1/9 b) 2/9 c) 1/18

d) $\frac{1}{2}+\frac{1}{9}$ e) $\frac{7}{9}-\frac{1}{2}$

Resolución:



* Por traslado de áreas, se obtiene:
* De la figura:

• área total = área del $\square$PQRS

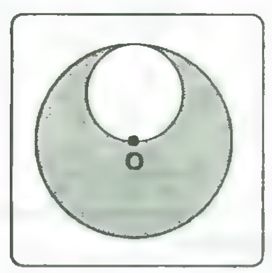
$\boxed{\text{área total} = 18\text{A}}$

• Area de la parte achurada = **A**

Luego: $\text{Razón} = \dfrac{\text{Parte achurada}}{\text{área Total}} = \dfrac{A}{18A} = \dfrac{1}{18}$

$\therefore$ $\boxed{\text{Razón} = \dfrac{\text{Parte achurada}}{\text{área Total}} = \dfrac{1}{18}}$ ***Rpta. c***

Ejercicio 20: En la figura mostrada: Hallar la relación entre el área de la región sombreada y la no sombreada. ("O" es el centro del círculo mayor).

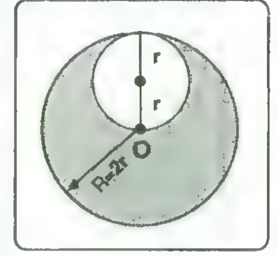


a) $\dfrac{\pi}{2}$ b) $\dfrac{5}{3}\pi$ c) $\dfrac{3}{2}\pi$

d) 3 e) Faltan datos

Resolución:

Sea: $\begin{cases} \mathbf{r} = \text{radio del círculo menor y} \\ \mathbf{R} = \text{radio del círculo mayor.} \end{cases}$



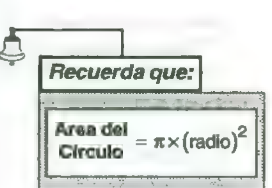
* **Calculamos el área de la Región No sombreada:**

$\therefore$ $\boxed{\text{área de la Región No somb} = \bigcirc_r = \pi r^2}$

* **Calculamos el área de la Región sombreada:**

área de la Región somb. = (círculo de centro O) - (círculo de radio r)

$$\text{área de la Región somb.} = \pi R^2 - \pi r^2$$
$$= \pi(2r)^2 - \pi r^2$$
$$= \pi(4r^2) - \pi r^2$$



$\therefore$ $\boxed{\text{área de la Región somb.} = 3\pi r^2}$

Luego:

$$\text{Razón} = \frac{\text{área de la Región Sombreada}}{\text{área de la Región No Sombreada}} = \frac{3\pi r^2}{\pi r^2} = 3$$

$\therefore$ $\boxed{\text{Razón} = \dfrac{\text{área de la Región Sombreada}}{\text{área de la Región No Sombreada}} = 3}$ ***Rpta. d***



TALLER DE EJERCICIOS Nº 56



1. Di si están bien escritas las siguientes igualdades:

a) $\frac{2}{3}=\frac{34}{51}$	e) $\frac{6}{7}=\frac{12}{13}$	i) $\frac{2}{\sqrt{26}}=\frac{\sqrt{26}}{13}$
b) $\frac{5}{3}=\frac{7}{4,2}$	f) $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$	j) $\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{3}{\sqrt{27}}$
c) $\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$	g) $\frac{17}{3}=\frac{34}{6}$	k) $\frac{6}{8-3}=\frac{15}{2}$
d) $\frac{2}{4}=\frac{16}{48}$	h) $\frac{15}{7}=\frac{45}{21}$	l) $\frac{7}{6-2}=\frac{10+4}{8}$

2. Despeja "x" en cada una de las siguientes proporciones:

a) $\frac{x}{4}=\frac{3}{1}$	e) $\frac{2}{6}=\frac{7}{x}$	i) $\frac{x}{8}=\frac{1,5}{2,4}$
b) $\frac{4}{x}=\frac{5}{3}$	f) $\frac{x}{24}=\frac{5}{3}$	j) $\frac{6}{x-2}=\frac{1}{5}$
c) $\frac{2}{x}=\frac{1}{3}$	g) $\frac{12}{x}=\frac{4}{3}$	k) $\frac{x+3}{x}=\frac{6}{4}$
d) $\frac{6}{x}=\frac{2}{3}$	h) $\frac{x}{8}=\frac{40}{5}$	l) $\frac{6}{x+1}=\frac{4}{x}$

3. Forma proporciones geométricas en cada una de las igualdades siguientes:

a) $5\cdot8 = 20\cdot2$	d) $25\cdot3 = 15\cdot5$	g) $5\cdot6 = 10\cdot3$
b) $5\cdot8 = 10\cdot4$	e) $3\cdot10 = 15\cdot2$	h) $1\cdot100 = 20\cdot5$
c) $12\cdot5 = 15\cdot4$	f) $6\cdot16 = 8\cdot12$	i) $75\cdot4 = 100\cdot3$

4. De cada una de las proporciones siguientes forma otra.
1º) Invirtiendo sus razones. **2º)** Permutando los medios entre si:

a) $\frac{5}{7}=\frac{10}{14}$	d) $\frac{11}{13}=\frac{33}{39}$	g) $\frac{8}{3}=\frac{48}{18}$
b) $\frac{3}{5}=\frac{12}{20}$	e) $\frac{7}{9}=\frac{28}{36}$	h) $\frac{17}{4}=\frac{202}{24}$
c) $\frac{3}{7}=\frac{12}{28}$	f) $\frac{20}{32}=\frac{5}{8}$	i) $\frac{5}{8}=\frac{35}{56}$

5. Mediante permutaciones e inversiones consigue que x e y sean el primero y el segundo términos, respectivamente, en las proporciones siguientes:

a) $\frac{y}{x}=\frac{3}{5}$	d) $\frac{y}{8}=\frac{x}{3}$	g) $\frac{11}{x}=\frac{8}{y}$
b) $\frac{3}{x}=\frac{1}{y}$	e) $\frac{5}{y}=\frac{7}{x}$	h) $\frac{13}{y}=\frac{6}{x}$
c) $\frac{x}{4}=\frac{y}{7}$	f) $\frac{3}{y}=\frac{7}{x}$	i) $\frac{5}{9}=\frac{y}{x}$

6. Simplifique cada razón:

a) 4 : 8	d) 100 : 48	g) 448 : 336
b) 25 : 15	e) 24 : 84	h) 270 : 486
c) 36 : 20	f) 36 : 180	i) 75 : 105

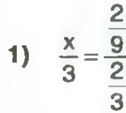
7. Para cada proporción diga cuáles son los medios y verifique que el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

a) 2 : 3 = 4 : 6	c) 5 a 3 = 15 a 9	e) 7 : 9 = 14 : 16
b) 1 : 2 = 12 : 24	d) 10 a 8 = 5 a 4	f) 15 : 4 = 45 : 10

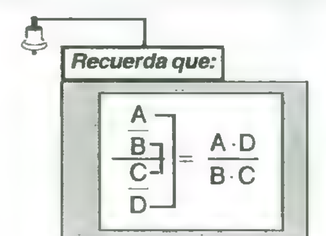
8. En cada, ☐ escribe el signo, >; < ó =; que corresponda:

a) 3 a 2 ☐ 2 a 3	c) 6 a 5 ☐ 1 a 1	e) 15 : 9 ☐ 20 : 12
b) 3 a 5 ☐ 2 a 3	d) 11 a 12 ☐ 6 a 5	f) 76 : 100 ☐ 3 : 4

9. Calcular el extremo desconocido en las siguientes proporciones:



1) $\frac{x}{3}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{3}}$



Resolución: $\frac{x}{3}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{3}}$

$$\frac{x}{3}=\frac{2\cdot 3}{9\cdot 2} \Rightarrow x=\frac{3\cdot 3}{9} \Rightarrow x=\frac{9}{9}=1 \Rightarrow \therefore \boxed{x=1}$$

Resolución:

2) $\dfrac{x}{\frac{1}{3}}=\dfrac{\frac{3}{2}}{0,75}$ $\qquad \dfrac{x}{\frac{1}{3}}=\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{75}{100}}$

Recuerda que: $0,75=\dfrac{75}{100}$

$$\dfrac{x}{\frac{1}{3}}=\dfrac{3\cdot 100}{2\cdot 75}\Rightarrow \dfrac{x}{\frac{1}{3}}=\dfrac{300}{150}\Rightarrow \dfrac{x}{\frac{1}{3}}=2\Rightarrow x=2\cdot\dfrac{1}{3}$$

$$\therefore \boxed{x=\dfrac{2}{3}}$$

a) $\dfrac{x}{\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}$

b) $\dfrac{x}{-6}=\dfrac{-5}{2}$

c) $\dfrac{x}{\frac{1}{2}-1}=\dfrac{\frac{1}{2}-1}{5}$

d) $\dfrac{6}{\frac{3}{4}}=\dfrac{\frac{4}{9}}{x}$

e) $\dfrac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}+\frac{2}{9}}=\dfrac{\frac{3}{2}+0,2}{x}$

f) $\dfrac{\sqrt{1-\frac{16}{25}}}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2}=\dfrac{\frac{1}{10}+\frac{1}{2}}{x}$

g) $\dfrac{\left(2+\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{4}{5}+0,2}=\dfrac{3,5}{x}$

h) $\dfrac{x}{\left(2+\frac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\left(2+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(3+\frac{13}{4}\right)^2}$

i) $\dfrac{\sqrt{0,01}+\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{3}{2}+2}=\dfrac{\frac{3}{2}+2}{x}$

10. Calcula el término medio en las siguientes proposiciones:

a) $\dfrac{0,2}{x}=\dfrac{\frac{3}{20}}{\frac{10}{3}}$

b) $\dfrac{-4}{x}=\dfrac{-3}{\frac{3}{2}}$

c) $\dfrac{\frac{3}{2}}{x}=\dfrac{x}{\frac{3}{8}}$

d) $\dfrac{0,08}{x}=\dfrac{x}{2}$

e) $\dfrac{\left(\frac{1}{2}+2,5\right)^2}{x}=\dfrac{x}{2^4}$

f) $\dfrac{2+\frac{1}{2}}{x}=\dfrac{3+\frac{1}{3}}{\left(4-\frac{1}{4}\right)^{-1}}$

g) $\dfrac{0,5+\frac{1}{3}}{2}=\dfrac{x}{\frac{2}{0,5}}$

h) $\dfrac{-0,03}{x}=\dfrac{x}{-12}$

i) $\dfrac{3\left(\frac{1}{5}+0,1\right)}{x}=\dfrac{x}{4\left(0,1+\frac{3}{10}\right)}$

11. Hallar el número que es a 16 como 8, 1 es a 7,2.

12. Halla el número que es a 5 como 12 es a 3.

13. Un pan de 120 gramos cuesta 20 céntimos de sol y uno de 160 gramos 25 céntimos de sol.

a) ¿Qué razón es mayor 120 a 20 ó 160 a 25?
b) Si no hay diferencia en la calidad del pan. ¿Cuál de los dos resultá más económico?

14. En un grupo la razón del número de hombres al de niños es 3 : 5 y la razón del de mujeres a niños es 5 : 8. Compare estas razones para decidir si hay más hombres o mujeres en el grupo.

15. Un equipo ha perdido 7 de 18 juegos y otro ha perdido 5 de 12 juegos.

a) ¿Qué razón es mayor, 7 : 18 ó 5 : 12?
b) ¿Qué equipo tiene mejor marca?

16. El automóvil "A" consume 15 galones de gasolina en un viaje de 240 km; bajo condiciones análogas, el automóvil "B" consume 12 galones en 200 km.

a) Escriba las razones que representan el número de kilómetros por galón para cada automóvil.
b) ¿Cuál de estas razones es mayor?
c) ¿Qué automóvil consume menos gasolina?

17. Ordene estas razones de mayor a menor, 4 : 5 ; 3 : 4 ; 8 : 7 y 1 : 1.

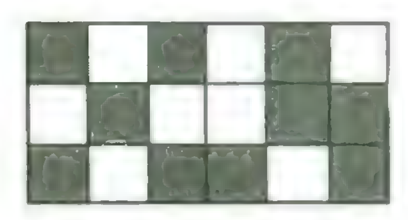
18. Hay 7 mangos por cada 10 plátanos y 5 plátanos por cada 3 mameyes.

a) ¿Hay más mangos que mameyes?
b) ¿Cuál es la razón de mangos a mameyes?

19. La razón de $\overline{AB}$ a $\overline{CD}$ es 18 a 8 y la de $\overline{CD}$ a $\overline{EF}$ es 2 a 5.

a) ¿Cuál es más largo, $\overline{AB}$ ó $\overline{EF}$?
b) ¿Cuál es la razón de $\overline{AB}$ a $\overline{EF}$?
c) ¿Cuál es la longitud de $\overline{AB}$ si $\overline{EF}$ es la unidad?

20. En el rectángulo que sigue; compare el número de cuadrados sombreados con el número total de cuadrados.



a) Fijándonos solamente en las columnas. ¿Cómo se puede hallar la razón del número de cuadrados sombreados al de todos los cuadrados?

b) En lo que se refiere a las filas. ¿Cómo se puede hallar la razón de cuadrados sombreados al de todos los cuadrados?

RESPUESTAS TALLER

(9)

a) $x = 3/4$	d) $x = 1/18$	g) $x = 9/14$
b) $x = 15$	e) $x = 17/2$	h) $x = 1$
c) $x = 1/20$	f) $x = 1/9$	i) $x = 35$

(10)

a) $x = 40/9$	d) $x = 2/5$	g) $x = 5/3$
b) $x = 2$	e) $x = 12$	h) $x = 3/5$
c) $x = 3/4$	f) $x = 1/5$	i) $x = 6/5$

(11) 18



(12) 20

(13) a) 20/120
b). El de 160 gramos por 25 centimos de sol.

(14) Hay más mujeres

(15) a) 5/12
b) El que perdió 7 de 18 juegos

(16) a) 16 km/g y 16,6 km/g b) 16,6 km/g c) El Automovil B.

(17) $\frac{8}{7} = \frac{1}{1} = \frac{4}{5} = \frac{3}{4}$

(18) a) Hay más mangos b) 7/6

(19) a) $\overline{EF}$ b) 9/10 c) 0,9







PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE RAZONES Y PROPORCIONES

NIVEL I

Problema 1 : Una vasija contiene 4 litros de vino; se añaden 0,4 litros de agua.¿En qué relación está el vino con el agua?

A) 20/1 **B)** 10/1 **C)** 5/2 **D)** 6/3 **E)** N.A.

Problema 2 : Un rectángulo tiene 4m de base y 3m de altura y otro rectángulo semejante tiene 8m de base. Establece la proporción entre ambas dimensiones.

A) 3/4 = x/8 **B)** 3/4 = x/12
C) 4/3 = x/8 **D)** 4/3 = 6/x
E) N.A.

Problema 3 : Si con una velocidad de 5km por hora a pie y 40km/h en automóvil se recorre la misma distancia. ¿Cuánto se empleará en automóvil, si el peatón emplea 3 horas?

A) 8h **B)** 24h **C)** 22,5min
D) 23min **E)** 25min

Problema 4 : Dos números están en la relación de 4 a 11; Si su suma es 120. Determinar el menor de dichos números.

A) 88 **B)** 44 **C)** 32 **D)** 55 **E)** 23

Problema 5 : La semi suma de dos números es 36 y su semidiferencia es 24. Hallar la razón geométrica entre dichos números?

A) 1/6 **B)** 1/5 **C)** 2/7 **D)** 1/8 **E)** 3/5

Problema 6 : La diferencia de los cuadrados de dos números es 640; y la razón de dichos números es 7/3. ¿Cuáles son los números?

A) 21 y 9 **B)** 35 y 15 **C)** 26 y 14
D) 28 y 12 **E)** 42 y 18

Problema 7: Hallar el valor de "x" en:

$$\frac{x}{45} = \frac{y}{9} \text{ ; si: } x - y = 28$$

A) 30 **B)** 35 **C)** 40 **D)** 45 **E)** 55

Problema 8 : Hallar la razón equivalente a 3/11; de tal manera que la suma de los cuatro términos de la proporción formada sea igual a 70.

A) 6/22 **B)** 9/33 **C)** 12/44
D) 15/55 **E)** 18/66

Problema 9 : La suma de dos números es a su diferencia como 7 es a 3. Si el producto de dichos números es 160. Determinar la diferencia de los números.

A) 8 **B)** 12 **C)** 14 **D)** 16 **E)** 18

Problema 10 : Dos números son entre si como 24 es a 60, si su diferencia es 12.¿Cuál es el mayor de dichos números?

A) 8 **B)** 12 **C)** 20 **D)** 24 **E)** 36

Problema 11 : Halle la media proporcional entre 7 y 63.

A) 27 B) $7\sqrt{3}$ C) 21 D) $3\sqrt{7}$ E) N.A.

Problema 12 : Halla la media proporcional entre 3/4 y 16/75.

A) 6/5 B) 3/5 C) 2/5 D) 5/2 E) N.A.

Problema 13 : Halla la tercera proporcional entre: 5 y 10.

A) 7,5 B) 5 C) 20 D) 10 E) 30

Problema 14 : Halla la tercera proporcional entre: $5\frac{1}{4}$ y 7.

A) 7/4 B) 25/3 C) 63/3
D) 28/3 E) N.A.

Problema 15 : Determinar la cuarta proporcional de: 5 ; 2 y 16

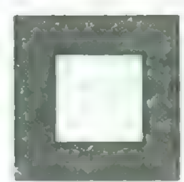
A) 5,8 B) 6,2 C) 6,4 D) 5,6 E) N.A.

Problema 16 : Determinar la cuarta proporcional de: 24 ; 51 y 104

A) 121 B) 221 C) 112 D) 122 E) N.A.

Problema 17 : El lado del cuadrado chico es igual a los 2/5 del lado del cuadrado grande. Entonces la razón entre el área "achurada" (rayada) y el área del cuadrado mayor es:

A) 2/5
B) 21/25
C) 4/25
D) 4/3
E) 9/25



Problema 18 : El producto de los cuatro términos de una proporción continua es 1296, y el primer antecedente es 4. ¿Cuál es la proporción?

A) 1/4 = 4/16 B) 1/6 = 6/36
C) 4/8 = 8/16 D) 4/6 = 6/9
E) N.A.

Problema 19 : Si: $\frac{a}{5} = \frac{b}{3} = \frac{c}{6}$; Además: a + c = 66; Hallar el valor de "b".

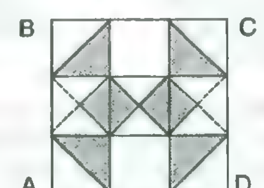
A) 30 B) 36 C) 18 D) 16 E) 26

Probema 20 : Si: $\frac{a+1}{2} = \frac{b+2}{3}$; Además: a + b + 3 = 20; Hallar el valor de "a"

A) 5 B) 7 C) 9 D) 10 E) 12

Problema 21 : La parte "achurada" (sombreada) representada del total: **(ABCD es un cuadrado)**

A) 1/4
B) 1/2
C) 4/9
D) 1/3
E) 2/3



Problema 22 : La razón entre $3\frac{1}{4}$ y $5\frac{1}{4}$ es equivalente a la razón entre:

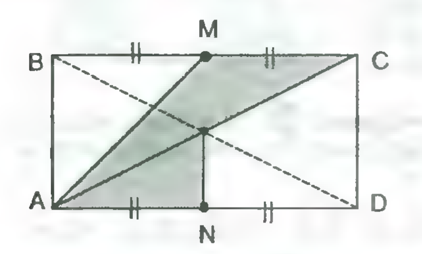
A) 3 y 5 B) 13 y 21 C) 5 y 7
D) 7 y 5 E) 5 y 3

Problema 23 : Divide el número 720 en dos partes tales que la razón entre ambas sea 0,6. Hallar una de las partes.

A) 540 B) 270 C) 207 D) 504 E) 206

Problema 24 : La parte "achurada"

(sombreada) representa del total: (ABCD es un rectángulo)



A) 5/8 **B)** 3/8 **C)** 1/2 **D)** 3/4 **E)** 5/9

Problema 25 : La razón entre el triple de un número y el duplo de su consecutivo es 4/3. Cuál es uno de dichos números.

A) 7 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 12

Clave de Respuestas

1. B	2. A	3. C	4. C	5. B
6. D	7. B	8. C	9. B	10. C
11. C	12. C	13. C	14. D	15. C
16. B	17. B	18. D	19. C	20. B
21. D	22. B	23. B	24. B	25. B

NIVEL II

Problema 1 : El duplo de un número es a dicho número aumentado de dos unidades como 4 es a 7. ¿Cuál es el número buscado?

A) 0,4 **B)** 0,6 **C)** 0,8 **D)** 0,9 **E)** 0,7

Problema 2 : Cuando Manuel nació, Sara tenía 14 años. Actualmente, la razón entre las edades de ambos es 0,75. ¿Cuál es la edad de Manuel?

A) 56 años **B)** 42 años **C)** 24 años
D) 65 años **E)** 48 años

Problema 3 : Calcular el área de un rectángulo sabiendo que su perímetro es de 70cm y la razón entre sus dimensiones **(Largo y ancho)** es 5/2

A) $205cm^2$ **B)** $250cm^2$ **C)** $520cm^2$
D) $260cm^2$ **E)** $280cm^2$

Problema 4: Si la razón entre los muchachos y las chicas de un aula es de 5 a 3 ¿Cuál de los siguientes valores no representa el número total de estudiantes de dicha aula?

A) 32 **B)** 36 **C)** 40 **D)** 48 **E)** 56

Problema 5: Dos números están en relación de 2 a 3. Si se aumenta 15 a uno de ellos y 10 al otro se obtienen cantidades iguales. ¿Cuál es el mayor?

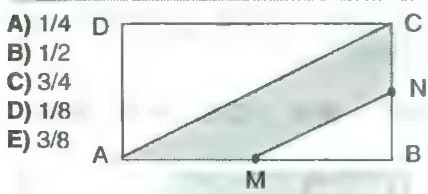
A) 15 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 20 **E)** 8

Problema 6: Dos cajas contienen 25 fósforos cada una. ¿Cuántos fósforos hay que pasar de una a otra para que la razón de las cantidades de fósforos de cada caja sea 7/3?

A) 8 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 20 **E)** 14

Problema 7: Siendo M y N los puntos medios de los lados AB y y BC del rectángulo ABCD ; El área "achurada" respecto a la del rectángulo es:

A) 1/4
B) 1/2
C) 3/4
D) 1/8
E) 3/8



Problema 8: Si: $\frac{x}{5}=\frac{y}{10}=\frac{z}{15}=\frac{p}{20}$ donde: $x+y+z+p=30$, Hallar el valor de "p".

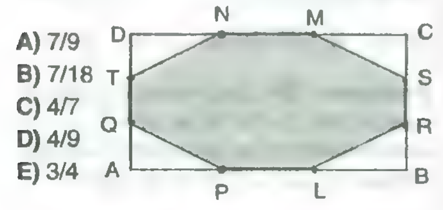
A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 15

Problema 9: Si: $\frac{1,5}{2,4}=\frac{15}{a}=\frac{b}{c}$; Además: $a+b+c=37$. Hallar el valor de " b + c"

A) 17 B) 15 C) 13 D) 19 E) 21

Problema 10: En el rectángulo ABCD, el lado, AB = 3b y AD = 3a, Entonces el área del octógono respecto a la del rectángulo es:

A) 7/9
B) 7/18
C) 4/7
D) 4/9
E) 3/4

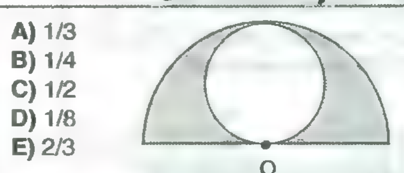


Problema 11: Si: $\frac{a}{3}=\frac{b}{15}=\frac{c}{0,6}=\frac{d}{12}=\frac{e}{1,4}$; Además: $a+b+c+d+e=64$.
Calcular el valor de: "a + b - d"

A) 6 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

Problema 12: En la figura mostrada: Hallar la relación entre el área de la región sombreada y el área total. ("O"es el centro de la semi circunferencia)

A) 1/3
B) 1/4
C) 1/2
D) 1/8
E) 2/3



Problema 13: Si la media proporcional entre a y 8 es: 16. Hallar el valor de "a".

A) 16 B) 8 C) 32 D) 64 E) 14

Problema 14: La tercera proporcional entre 0,5 y "a" es: 4,5. Hallar el valor de "a".

A) 2,5 B) 5,1 C) 1,5 D) 3,5 E) 6,5

Problema 15: La cuarta proporcional entre 8; 13 y "a" es 39. Hallar el valor de "a"

A) 42 B) 28 C) 32 D) 24 E) 18

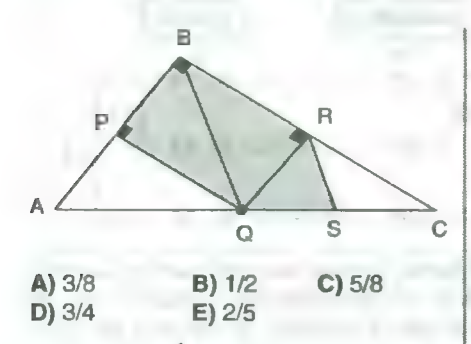
Problema 16: En una fiesta hay 56 personas entre hombres y mujeres de tal manera que el número de mujeres es al número de hombres como 3 es a 4; Si después del reparto de la comida se retiran 6 mujeres. ¿Cuántos hombres deben irse para que la relación de mujeres a hombres sea de 3 a 5?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Problema 17: Si: $\frac{a^2}{4}=\frac{b^2}{25}$; Además; $a+b=28$. Hallar el valor de "a".

A) 6 B) 8 C) 10 D) 20 E) 18

Problema 18: En la figura mostrada: Hallar la relación entre el área de la región sombreada y el área total ("P", "Q", "R" y "S" son puntos medios)



A) 3/8 B) 1/2 C) 5/8
D) 3/4 E) 2/5

Problema : La cantidad de dinero que tiene "A" es a la que tiene "B" como 7 es a 5, si uno de ellos le dá a otro 60 soles dicha relación se invierte. ¿Cuánto tenía "A" al principio?

A) S/. 180 B) S/. 210
C) S/. 240 D) S/. 270 E) S/. 150

Problema 20 : Se tiene que:

$\frac{17}{A}=\frac{19}{B}=\frac{21}{C}$ y que: $A+2B+C=152$.

Hallar: "A + B + C"

A) 100 B) 114 C) 121 D) 109 E) 119

Clave de Respuestas

1. C	2. B	3. B	4. B	5. A
6. B	7. E	8. D	9. C	10. A
11. C	12. C	13. C	14. C	15. D
16. A	17. B	18. C	19. B	20. B

4.2. Proporcionalidad Directa e Inversa: Constante de Proporcionalidad, Cantidades Proporcionales y Repartición Proporcional.

4.2.1. Magnitudes Proporcionales.

Es frecuente que en los comercios figuren listas de precios donde puedes leer, por ejemplo, los precios de **1 kilo** de arroz, **1 litro** de aceite, **1 botella** de gaseosa, de 1 **lata** de duraznos, **1 caja** de fósforos, de **1 cuaderno**, de **1 lápicero** o de cualquier artículo. En todos estos casos se ha fijado el precio de una unidad, es decir, el **precio unitario**.

Conocido el precio unitario es fácil calcular el precio de una determinada cantidad de mercadería.

Por ejemplo, si el precio de 1 metro de tela es de S/. 12, podemos confeccionar una tabla con los precios correspondientes a las distintas cantidades de tela.

Para ello tenemos en cuenta que a cantidad de tela corresponde un precio determinado y que al duplicar o triplicar la cantidad de tela, el precio correspondiente se duplica o triplica. Es decir que, si la cantidad de tela se multiplica por un número, el precio correspondiente queda multiplicado por dicho número, veamos:

Longitud	Precio
1m	S/. 12
2m	S/. 24
3m	S/. 36
4m	S/. 48

Longitud → **Precio**

1m ——— S/. 12
×2 ×2
2m ——— S/. 24
×3 ×3
3m ——— S/. 36

A veces no conocemos el precio unitario, pero si nos informan por ejemplo, que por 6 metros de tela se pagaron S/. 72, con estos datos podemos calcular el precio de una cantidad de tela o bien la cantidad de tela que se puede comprar con una determinada suma de dinero.

Con esta información tratamos de completar el siguiente cuadro calculando los datos que faltan.

En la medida que vayamos obteniendo resultados podemos usarlos como datos para resolver los problemas siguientes.

	Longitud	Precio
	X	Y
	6m	**S/. 72**
a	2m	
b		S/. 36
c	5m	
d	8m	
e		S/. 12

a) 2m es la tercera parte de 6m. Por lo tanto, el precio de 2m es la tercera parte de S/. 72.

6m ——— S/. 72
:3 :3
2m ——— **S/. 24**

∴ 2m cuestan S/. 24

	Longitud	Precio
	X	Y
	6m	**S/. 72**
a	2m	S/. 24

b) S/. 36 es la mitad de S/. 72. Entonces, con S/. 36 se compra la mitad de tela.

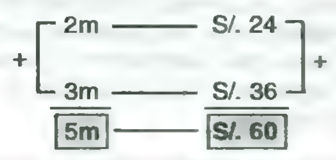
S/. 72 ——— 6m
:2 :2
S/. 36 ——— 3m

∴ Con S/. 36 se compran 3 m

	Longitud	Precio
	X	Y
	6m	**S/. 72**
a	2m	S/. 24
b	3m	S/. 36

c) Para calcular el precio de 5 metros no es conveniente proceder como en los casos anteriores; porque no existe ningún número natural tal que al multiplicar o dividir 6; 2 ó 3 por dicho número se obtenga por resultado 5.

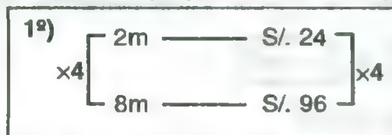
En cambio, conociendo el precio de 2m y de 3m podemos calcular fácilmente el precio de la suma.



	Longitud	Precio
	X	Y
	6m	S/. 72
a	2m	S/. 24
b	3m	S/. 36
c	5m	S/. 60

d) Con los datos ya obtenidos podemos calcular de distintas formas el precio de 8m. Por ejemplo:

1º)



	Longitud	Precio
	X	Y
	6m	S/. 72
a	2m	S/. 24
b	3m	S/. 36
c	5m	S/. 60
d	8m	S/. 96

2º)

6m —— S/. 72 (+)
2m —— S/. 24 (+)
8m —— S/. 96

3º)

5m —— S/. 60 (+)
3m —— S/. 36 (+)
8m —— S/. 96

∴ 8m cuestan S/. 96

e) Análogamente podemos usar distintos procedimientos para calcular la cantidad de tela que podemos adquirir con S/. 12.

	Longitud	Precio
	X	Y
	6m	S/. 72
a	2m	S/. 24
b	3m	S/. 36
c	5m	S/. 60
d	8m	S/. 96
e	1m	S/. 12

1º)

2m —— S/. 24 (: 2)
1m —— S/. 12 (: 2)

2º)

6m —— S/. 72 (–)
5m —— S/. 60 (–)
1m —— S/. 12

> ***Observación:***
>
> *Es evidente que si entras a una tienda comercial con la intensión de comprar tela y no compras nada, tampoco pagas nadas. Expresamos este hecho diciendo que, a **0m** corresponde **S/. 0** ó que **Cero metros cuestan cero soles.***

En este problema hemos establecido una correspondencia entre el conjunto de cantidades de la magnitud **longitud ($\mathscr{L}$)** y el conjunto de cantidades de la mangitud **precio (p)** de tal modo que a cada cantidad de la primera magnitud corresponde una cantidad de la segunda y a cada cantidad de la segunda corresponde una y sólo una de la primera.

En consecuencia, la correspondencia establecida entre $\mathscr{L}$ y p es una **función biyectiva.**

$$\boxed{f : \mathscr{L} \longleftrightarrow p}$$

Si designamos con **x** los elementos de $\mathscr{L}$ y con **y** los elementos de p , escribimos:

$$\boxed{f : x \longleftrightarrow y} \quad ó \quad \boxed{y = f(x)}$$

Analicemos las propiedades de esta función.

Conocido el precio unitario se puede calcular fácilmente el precio de cualquier longitud de tela multiplicando el número de metros por el precio unitario.

Si en cada magnitud las cantidades están expresadas con respecto a la misma unidad, podemos establecer las siguientes relaciones entre sus medidas.

$$\left.\begin{array}{l} 1\times 12 = 12 \Rightarrow \dfrac{12}{1} = 12 \\ 2\times 12 = 24 \Rightarrow \dfrac{24}{2} = 12 \\ 3\times 12 = 36 \Rightarrow \dfrac{36}{3} = 12 \end{array}\right\}$$

La razón entre las medidas de las cantidades correspondientes es un número constante.

Es decir que:

$$\boxed{\frac{12}{1} = \frac{24}{2} = \frac{36}{3} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{y}{x} = 12}$$

Si desigamos con **K** al número constante, resulta:

$$\frac{y}{x} = K \Rightarrow \boxed{y = K\cdot x}$$ **(K = Constante de Proporcionalidad)**

La función que hemos establecido queda **definida** por la **fórmula:** $y = K\cdot x$ si en cambio, consideramos la razón de las cantidades correspondientes:

$$\frac{S/.\,12}{1\,m} = \frac{S/.\,24}{2\,m} = \frac{S/.\,36}{3\,m} = \ldots\ldots\ldots\ldots = 12\,\frac{S/.}{m}$$ (S/. 12 soles por metro)

En este caso la razón es un **Valor Constante** expresado mediante una unidad derivada: **Soles por metro**, que indica el **precio unitario**. A veces, esta unidad derivada tiene un nombre y un símbolo propio, según verás más adelante en algunos ejemplos:

De acuerdo con estas observaciones, damos la siguiente:

> ***Definición:***
>
> *Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando a cada cantidad de una corresponde una sola cantidad de la otra, y además al multiplicar la primera por un número, la segunda queda también multiplicada por el mismo número.*

Ejemplos: Son magnitudes directamente proporcionales:

a) El número de objetos y su precio cuando se paga a razón del número.

Así: • Si 1 cuaderno cuesta S/.4; 3 cuadernos costarán: 3 x S/.4 = S/. 12.
(esto quiere decir que a más cuadernos más dinero).

• Si 8 caramelos cuestan S/. 2; 4 caramelos costarán S/. 1.
(esto quiere decir que a menos caramelos menos dinero).

b) El tiempo y las unidades de trabajo realizado.

Así: • Si una cuadrilla de obreros hace en 3 días, 10 metros de una obra, en 6 días harán 20 metros.
(Esto quiere decir que a más días harán más metros de obra).

c) El tiempo de trabajo y el salario percibido.

Así: • Si un obrero por 5 días de trabajo percibe S/. 60 por 2 días percibirá S/. 24.
(Esto quiere decir que a menos días recibirá menos salario).

4.2.2. Representación Gráfica de la Proporcionalidad Directa.

Supongamos que un automóvil marcha a una velocidad de 2 km por minuto.

En 1 minuto recorre 2 Km
En 2 minutos recorre 4 Km
En 3 minutos recorre 6 Km
En 4 minutos recorre 8 Km
En 5 minutos recorre 10 Km

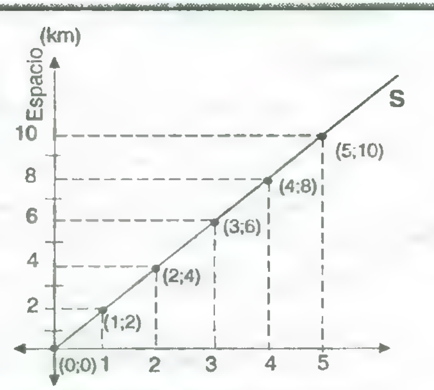
Podemos establecer que:

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}=0{,}5=\textbf{(Constante)}$$

Luego las magnitudes **espacio** y **tiempo** son directamente proporcionales.

Ahora traza un sistema de ejes cartesianos, bastándote el primer cuadrante; toma en el eje de abscisas los tiempos y en el de ordenadas los espacios. Te resultará la siguiente gráfica:

* Vemos que a cada punto de la línea recta **0S** le corresponde dos coordenadas (tiempo,espacio), y que el punto (0,0) de la recta (Origen de coordenadas); representa el punto de partida del automovil en el cual estará parado, ya que el espacio recorrido en el minuto cero será cero.



Luego:

La representación de la proporcionalidad directa es una línea recta que pasa por el origen de coordenadas.



TALLER DE EJERCICIOS Nº 57



1. Los siguientes cuadros corresponden a magnitudes directamente proporcionales. Calcula los elementos que faltan. Recuerda que los resultados que vas obteniendo puedes usarlos como datos para los que siguen.

(1)

Libros	Precio
4 matemáticas	S/. 60
2 matemáticas	
	S/. 15
6 matemáticas	
	S/. 120
	S/. 75
7 matemáticas	
15 matemáticas	

(2)

Tiempo	Espacio
3h	60 Km
	120 Km
1h	
	80 Km
7h	
	540 Km
8h	
	200 Km

(3)

Tiempo	Nº de vueltas
4 min	180 vueltas
2 min	
	45 vueltas
20 s	
	60 vueltas
3 min	
	120 vueltas
5 min	

2. a) ¿En cuáles de los siguientes cuadros los conjuntos de números relacionados corresponden a magnitudes directamente proporcionales?

(I)		(II)		(III)	
4	10	1/2	1/3	2	0,6
2	5	3/4	1/2	1,2	0,36
6	15	3	2	0,5	0,15
4/3	10/3	1	3/2	7	2,1
6/5	3	3/2	1	2,5	0,75

b) Si las magnitudes son directamente proporcionales determina la razón de proporcionalidad **K**.

- Resuelve mentalmente los siguientes problemas.

3. En 8 horas copié 20 páginas a máquina. Si sigo trabajando al mismo ritmo. ¿Cuántas páginas podré hacer en 12 horas?

4. Por 3 fotocopias S/. 0,15. ¿Cuánto tendré que pagar por fotocopiar 20 páginas distintas?

5. Para hacer una torta para 6 personas una receta indica los siguientes ingredientes: 360 g de harina; 120 g de manteca; 6 huevos; 9 cucharadas de leche; 6 cucharadas de azúcar y 60 g de pasas. Calcula mentalmente la cantidad de ingredientes para 4 personas.

6. Para ver una obra de teatro 2 personas pagan S/. 12,50. ¿Cuánto debe pagar una familia integrada por 5 personas?

7. Un avión tarda 1 h 20 min para unir dos ciudades que distan 720 Km. ¿Cuánto tardará el avión para recorrer 1 260 Km a la misma velocidad?

8. Compré 5 relojes por S/. 475. ¿Cuántos relojes del mismo precio puedo comprar con S/. 190?

RESPUESTAS TALLER

(2.) **a)** El conjunto de números de los cuadros **I** y **III**, corresponden a magnitudes directamente proporcionales.

b) La razón de proporcionalidad para el cuadro **(I)** es: **K = 0,4.**

- La razón de proporcionalidad para el cuadro **(III)** es: **K = $3,\hat{3}$.**

(3.) 30 páginas

(4.) 1 sol

(6.) S/. 31,25

(7.) 2h 20'

(8.) 2 relojes

(5.) 240 g de harina; 80 g de manteca; 4 huevos; 6 cucharadas de leche; 4 cucharadas de azúcar y 40 g de pasas.

4.2.3. Magnitudes Inversamente Proporcionales

Cierto día me encontre con un amigo, que es constructor de obras.

- Estoy construyendo una casa para terminarla en 4 meses. Trabajan en ella cincuenta obreros. Sin embargo desearía quedase acabada en dos meses.

  ¿Qué crees que debo hacer?

- Aumentar el número de obreros el doble.

- Entonces, si trabajan veinticinco obreros. ¿Me la terminarían en 8 meses?

- ¡Naturalmente!,. le contesté.

Osea; si consideramos dos magnitudes como los obreros que hacen una obra y los días que tardan en hacerla, podemos establecer.

Obreros		Meses
50	obreros terminan la obra en	4 meses
100	obreros terminan la obra en	2 meses
25	obreros terminan la obra en	8 meses
10	obreros terminan la obra en	20 meses

Observando que el producto de cada dos valores correspondientes es **constante**:

$$50\times4 = 10\times2 = 25\times8 = 10\times20 = \ldots\ldots\ldots\ldots = y\cdot x = \mathbf{200}$$

diremos que las magnitudes **obreros** y **meses** son **inversamente proporcionales**. Además si yo multiplico un valor de la primera magnitud por un número, el correspondiente en la segunda queda dividido por el mismo número.

Si designamos con **K** al número constante, resulta:

$$y\cdot x = K \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = \frac{K}{x}}$$ **(K = Constante de Proporcionalidad)**

> ***Definición:***
>
> *Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando al multiplicar una de ellas por un número, la otra resulta dividida y al dividir una de ellas la otra resulta multiplicada por el mismo número.*

Ejemplos: Son magnitudes inversamente proporcionales:

a) El número de obreros y el tiempo necesario para hacer una obra

Así: • Si 7 obreros hacen una obra en 4 días, 14 obreros harían la misma obra en 2 días. (Este quiere decir que el doble número de obreros necesitará la mitad del tiempo para hacer la obra).

b) Los días de trabajo y las horas diarias que se trabajan.

Así: • Si trabajando 10 horas diarias se necesitan 6 días para hacer una obra, trabajando 5 horas diarias se termina la obra en 12 días. (Esto quiere decir que a menos horas de trabajo se necesitaria más días para hacer la obra).

c). La velocidad de un automóvil y el tiempo empleado en recorrer una distancia.

Así: • Si un automovil a una velocidad de 50 Km/h necesita 8 horas para recorrer una distancia, a la velocidad de 100 Km/h necesitará 4 horas, para recorrer la misma distancia. (Esto quiere decir que a mayor velocidad necesitará menos tiempo).

4.2.4. Representación Gráfica de la Proporcionalidad Inversa.

Supongamos que vamos a viajar de Lima a Trujillo en automóvil; y consideremos las magnitudes **velocidad del automovil y tiempo** que tardamos en el viaje. Vamos a llamar **V** a la velocidad y **T** al tiempo empleado:

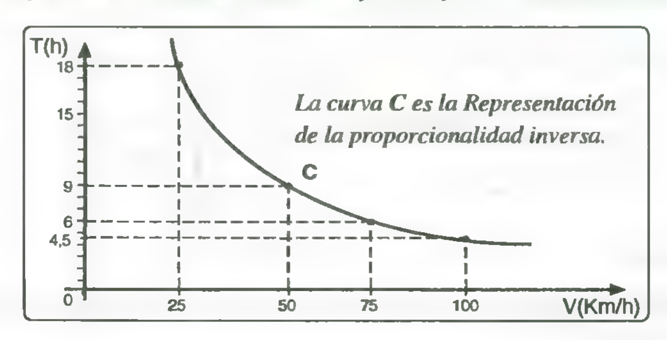
		Velocidad		Tiempo
Si:	Marchamos a	50 km/h,	tardaremos	9 horas
Si:	Marchamos a	100 km/h,	tardaremos	4,5 horas
Si:	Marchamos a	25 km/h,	tardaremos	18 horas
Si:	Marchamos a	75 km/h,	tardaremos	6 horas

Podemos ver que:

$$50\times 9 = 100\times 4{,}5 = 25\times 18 = 75\times 6 = \mathbf{450}$$ (**Constante de proporcionalidad inversa.**)

Luego las magnitudes **velocidad y tiempo** son inversamente proporcionales.

Ahora traza un sistema de ejes cartesianos, bastándote el primer cuadrante, toma en el eje de las abcisas las velocidades y en el eje de las ordenadas los tiempos.



4.2.5. Reparto Proporcional Simple:

El reparto proporcional es una Regla que tiene por objeto repartir una cantidad en partes, directa o inversamente proporcional a dos o más números dados.

Notación:

- **S** : Número o suma que se quiere repartir.
- **a, b, c** : Factores de proporcionalidad (pueden ser dos o más).
- **x, y, z** : partes o sumandos respectivamente proporcionales a: a, b y c.

Osea: $S = x + y + z$

4.2.5.1. Reparto Propocional Directo:

Problema General:

Repartir el número (N) en tres partes que sean directamente proporcionales a tres números dados: a, b y c.

Resolución:

Llamemos x, y, z a las partes buscadas, como estas partes deben ser directamente proporcionales a los números a, b y c, el cociente debe ser constante de acuerdo con la definición de magnitudes directamente proporcionales:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \textbf{\textit{Constante}}$$

Por propiedad: $\dfrac{x+y+z}{a+b+c} = \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$ .... **(I)**

Sabemos que: $x + y + z = N$ .... **(II)**

Hacemos que: $a + b + c = S$ .... **(III)**

Reemplazamos **(II)** y **(III)** en **(I)**:

$$\frac{N}{S} = \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

Donde:

$$\frac{a \cdot N}{S} = x \qquad \frac{b \cdot N}{S} = y \qquad \frac{c \cdot N}{S} = z$$

Fórmulas para usar

Aplicación:

Dividir el número 1 000 en 3 partes que sean directamente proporcionales a los números 2, 3 y 5.

Resolución:

Llamemos x, y, z a las partes buscadas. Como estas partes deben ser directamente proporcionales a los números a, b y c, el cociente debe ser constante, de acuerdo a la definición de magnitudes directamente proporcionales.

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}=\text{Constante}$$

Por Propiedad: $\frac{x+y+z}{2+3+5}=\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}$; pero: $x+y+z=1\,000$

$$\frac{1\,000}{10}=\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}$$

Donde:

i) $\frac{1\,000}{10}=\frac{x}{2} \Rightarrow 100=\frac{x}{2} \Rightarrow \boxed{200=x}$

ii) $\frac{1\,000}{10}=\frac{y}{3} \Rightarrow 100=\frac{y}{3} \Rightarrow \boxed{300=y}$

iii) $\frac{1\,000}{10}=\frac{z}{5} \Rightarrow 100=\frac{z}{5} \Rightarrow \boxed{500=z}$

Luego:

Las tres partes buscadas son: 200, 300 y 500 ***Rpta.***

Método Práctico:

Dividir el número 1 000 en tres partes directamente proporcionales a los números 2, 3 y 5.

Resolución: Sean las partes partidas $\begin{cases} 2K \\ 3K \\ 5K \end{cases}$ .... **(I)**

Luego: $2K+3K+5K=1\,000$

$$10K=1\,000 \Rightarrow K=\frac{1\,000}{10} \Rightarrow \therefore \boxed{K=100}$$

Reemplazamos el valor de "K" en **(I)**; obteniendo:

$2K = 2\ (100) = 200$
$3K = 3\ (100) = 300$
$5K = 5\ (100) = 500$ ***Rpta.***

Problema: Un padre reparte 840 soles en partes directamente proporcionales a las edades de sus tres hijos, siendo éstas 6, 5 y 10 años. ¿Cuánto corresponderá a cada uno?

Resolución:

Sean: x ; y ; z las partes buscadas, se tiene que:

$$\frac{x}{6}=\frac{y}{5}=\frac{z}{10} \quad \text{.......... (1)} \quad \text{Además: } x+y+z=840 \quad \text{.......... (2)}$$

Aplicando la **Propiedad** de la serie de razones iguales:

$$\frac{x}{6}=\frac{y}{5}=\frac{z}{10}=\frac{x+y+z}{6+5+10} \quad \text{.......... (3)}$$

Recuerda que:

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=\frac{E}{F}=\frac{A+C+E}{B+D+F}$$

Reemplazamos: **(2)** en **(3)**:

$$\frac{x}{6}=\frac{y}{5}=\frac{z}{10}=\frac{840}{6+5+10} \Rightarrow \frac{x}{6}=\frac{y}{5}=\frac{z}{10}=\frac{840}{21}$$

Luego:

i) $\frac{x}{6}=\frac{840}{21} \Rightarrow \frac{x}{6}=40 \Rightarrow \boxed{x=6\cdot 40=240}$

ii) $\frac{y}{5}=\frac{840}{21} \Rightarrow \frac{y}{5}=40 \Rightarrow \boxed{y=5\cdot 40=200}$

iii) $\frac{z}{10}=\frac{840}{21} \Rightarrow \frac{z}{10}=40 \Rightarrow \boxed{z=10\cdot 40=400}$

$\therefore$ A cada hijo le corresponde: 240 soles; 200 soles y 400 soles ***Rpta.***

Regla:

Para repartir una cantidad N en partes directamente proporcionales a varios números, basta multiplicar cada uno de estos números por el cociente que resulta de dividir N por la suma de dichos números dados.

Problema: Dividir el número 68,8 en partes directamente proporcionales a 0,8; 1,5 y 2.

Resolución:

- Número por Repartir: 68,8
- Suma de dichos números: 0,8 + 1,5 + 2 = 4,3

Representando por x, y, z, las partes proporcionales correspondientes tenemos:

$$x=\frac{68{,}8\cdot 0{,}8}{4{,}3}=12{,}8 \Rightarrow \boxed{x=12{,}8}$$

$$y=\frac{68{,}8\cdot 1{,}5}{4{,}3}=24 \Rightarrow \boxed{y=24}$$

$$z=\frac{68{,}8\cdot 2}{4{,}3}=32 \Rightarrow \boxed{z=32}$$

Problema: Tres sastres compran un lote de piezas iguales de tela que valen 57 680 soles. El primero se queda con 2 piezas, el segundo con 5 piezas y el tercero con 7. ¿Cuánto ha de pagar cada uno?

Resolución:

- Número por repartir: $\boxed{57\ 680}$
- Suma de dichos números: $2+5+7=\boxed{14}$

Representando por x, y, z, las partes proporcionales correspondientes tenemos:

$$x=\frac{57\ 680\cdot 2}{14}=8\ 240 \Rightarrow \boxed{x=S/.\ 8\ 240}$$

$$y=\frac{57\ 680\cdot 5}{14}=20\ 600 \Rightarrow \boxed{y=S/.\ 20\ 600}$$

$$z=\frac{57\ 680\cdot 7}{14}=28\ 840 \Rightarrow \boxed{z=S/.\ 28\ 840}$$

∴ Cada uno debe pagar: S/. 8 240; S/. 20 600 y S/. 28 840 ***Rpta.***

> ***Nota:***
>
> *Si los números: a, b, y c son quebrados heterogéneos habrá que hacerlos previamente homogéneos. En esta caso se dá un común denominador y se toman solamente los numeradores.*

Problema: Repartir 858 en partes directamente proporcionales a los números:

$$\frac{3}{4};\frac{5}{6}\text{ y }\frac{4}{5}$$

Resolución:

Las fracciones dadas, reducidas a su mín... común denominador, son respectivamene, iguales a: $\frac{45}{60};\frac{50}{60}$ y $\frac{48}{60}$; veamos:

4 - 6 - 5	2		
2 - 3 - 5	2		
1 - 3 - 5	3		
1 - 1 - 5	5		
1 - 1 - 1			

Común Denominador = 2×2×3×5 = 60

$$\times\ \frac{3}{4} = \frac{15\cdot 3}{60} = \frac{45}{60}$$

$$\times\ \frac{5}{6} = \frac{10\cdot 5}{60} = \frac{50}{60}$$

$$\times\ \frac{4}{5} = \frac{12\cdot 4}{60} = \frac{48}{60}$$

Si designamos por x, y, z las partes desconocidas, debe tenerse:

$$\frac{x}{45} = \frac{y}{50} = \frac{z}{48} = \textbf{Constante}$$

Por Propiedad: $\frac{x}{45} = \frac{y}{50} = \frac{z}{48} = \frac{x+y+z}{45+50+48}$ **; pero:** $x + y + z = 858$

Donde: $\frac{x}{45} = \frac{y}{50} = \frac{z}{48} = \frac{858}{143}$

i) $x = \frac{858}{143}\cdot 45 \Rightarrow x = 6\cdot 45 \Rightarrow \boxed{x = 270}$

ii) $y = \frac{858}{143}\cdot 50 \Rightarrow y = 6\cdot 50 \Rightarrow \boxed{y = 300}$

iii) $z = \frac{858}{143}\cdot 48 \Rightarrow z = 6\cdot 48 \Rightarrow \boxed{z = 288}$

Luego:

Las partes pedidas son: 270, 300 y 288 ***Rpta.***

Método Práctico:

Sean las partes pedidas: $x = \frac{3}{4}K$; $y = \frac{5}{6}K$; $z = \frac{4}{5}K$ .... (I)

Luego: $\frac{3}{4}K + \frac{5}{6}K + \frac{4}{5}K = 858$

Damos común denominador en el primer miembro; obtenemos:

$$\frac{15(3K) + 10(5K) + 12(4K)}{60} = 858$$

$$\frac{45K + 50K + 48K}{60} = 858$$

$$143K = 858 \cdot 60 \Rightarrow K = \frac{858 \cdot 60}{143} \Rightarrow \boxed{K = 360}$$

Reemplazamos el valor de K = 360; en **(I)**:

$$\frac{3}{4}K = \frac{3}{4} \cdot 360 = 3 \cdot 90 = 270$$

$$\frac{5}{6}K = \frac{5}{6} \cdot 360 = 5 \cdot 60 = 300$$

$$\frac{4}{5}K = \frac{4}{5} \cdot 360 = 4 \cdot 72 = 288$$

Rpta.

4.2.5.2. Reparto Proporcional Inverso:

Problema General:

Dividir un número (N) en 3 partes que sean inversamente proporcionales a 3 números dados a, b y c.

Resolución:

Llamemos x, y, z las partes buscadas, como estas partes deben ser inversamente proporcionales a los números a, b y c, el producto debe ser constante de acuerdo con la definición de mangitudes inversamente proporcionales:

$$x \cdot a = y \cdot b = z \cdot c = \textbf{\textit{Constante}}$$

Estas igualdades pueden escribirse así:

$$\frac{x}{1/a} = \frac{y}{1/b} = \frac{z}{1/c} = \textbf{\textit{Constante}}$$

Estas igualdades nos indican que las partes x, y, z son directamente proporcionales a las inversas de los números a, b, c. Se tiene entonces la siguiente Resolución General.

"Para dividir el número (N) en partes inversamente proporcionales a otros números dados a, b y c se divide el número "N" en partes directamente proporcionales a las inversas de los números a, b y c, es decir a: 1/a, 1/b y 1/c"

Aplicación:

Repartir 360 en 3 partes que sean inversamente proporcionales a los números 3, 4 y 6.

Resolución:

Tomamos la inversa a los números 3, 4 y 6, obteniendo: 1/3, 1/4 y 1/6.

Luego, damos común denominadcr a las fracciones, veamos:

3 - 4 - 6	2
3 - 2 - 3	2
3 - 1 - 3	3
1 - 1 - 1	

Común Denominador = 2×2×3 = 12

$$\frac{1}{3} = \frac{4 \cdot 1}{12} = \frac{4}{12}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 1}{12} = \frac{3}{12}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{2 \cdot 1}{12} = \frac{2}{12}$$

Tomamos sólo los numeradores, obteniendo:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2} = \text{Constante}$$

Por Propiedad: $\frac{x+y+z}{4+3+2} = \frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$; **pero:** $x + y + z = 360$

$$\frac{360}{9} = \frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$$

Donde:

i) $\frac{360}{9} = \frac{x}{4} \Rightarrow 40 = \frac{x}{4} \Rightarrow \boxed{160 = x}$

ii) $\frac{360}{9} = \frac{y}{3} \Rightarrow 40 = \frac{y}{3} \Rightarrow \boxed{120 = y}$

iii) $\frac{360}{9} = \frac{z}{2} \Rightarrow 40 = \frac{z}{2} \Rightarrow \boxed{80 = z}$

Luego:

Las partes pedidas son: 160, 120 y 80 ***Rpta.***

Método Práctico:

Repartir 360 en 3 partes que sean inversamente proporcionales a los números 3, 4 y 6.

Resolución:

Sean las 3 partes pedidas: $\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{K}{3} \\ y=\dfrac{K}{4} \\ z=\dfrac{K}{6} \end{array}\right\}$ .... (I)

Luego: $\dfrac{K}{3}+\dfrac{K}{4}+\dfrac{K}{6}=360$

Damos común denominador en el primer miembro:

$$\frac{4K+3K+2K}{12}=360$$

$$9K=360\cdot 12 \Rightarrow K=\frac{360\cdot 12}{9} \Rightarrow \boxed{K=480}$$

Reemplazamos el valor de K = 480; en **(I)**:

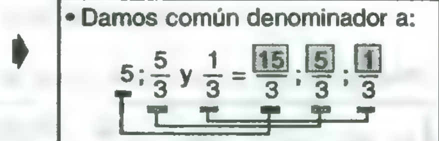
$$\boxed{\frac{K}{3}=\frac{480}{3}=160}\ \boxed{\frac{K}{4}=\frac{480}{4}=120}\ \boxed{\frac{K}{6}=\frac{480}{6}=80}$$ ***Rpta.***

Problema: Repartir: 735 en partes inversamente proporcionales a: 1/5, 3/5 y 3.

Resolución:

Se toman los inversos de los factores de proporcionalidad, osea:

- La inversa de 1/5 es 5/1 = **5**
- La inversa de 3/5 es **5/3**
- La inversa de 3 es **1/3**



- Se hace el reparto proporcional directo entre los numeradores; osea:

$$\boxed{\frac{x}{15}=\frac{y}{5}=\frac{z}{1}=\text{Constante}}$$

Por Propiedad: $\dfrac{x}{15}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{1}=\dfrac{x+y+z}{15+5+1}$; **pero:** $x+y+z=735$

$$\frac{x}{15}=\frac{y}{5}=\frac{z}{1}=\frac{735}{21}$$

Donde:

I) $\dfrac{x}{15}=\dfrac{735}{21} \Rightarrow \dfrac{x}{15}=35 \Rightarrow \boxed{x=35\cdot 15=525}$

ii) $\dfrac{y}{5}=\dfrac{735}{21} \Rightarrow \dfrac{y}{5}=35 \Rightarrow \boxed{y=35\cdot 5=175}$

iii) $\dfrac{z}{1}=\dfrac{735}{21} \Rightarrow \dfrac{z}{1}=35 \Rightarrow \boxed{z=35}$

Luego:

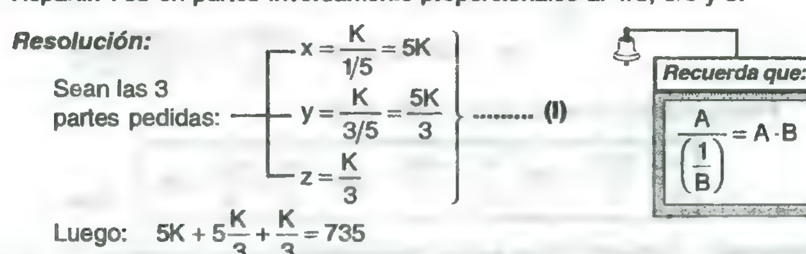
Las partes pedidas son: 525; 175 y 35

Rpta.

Otro Método:

Repartir: 735 en partes inversamente proporcionales a: 1/5; 3/5 y 3.

Resolución:



Sean las 3 partes pedidas:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{K}{1/5} = 5K \\ y &= \frac{K}{3/5} = \frac{5K}{3} \\ z &= \frac{K}{3} \end{aligned}\right\} \text{.......... (I)}$$

Recuerda que: $\dfrac{A}{\left(\dfrac{1}{B}\right)} = A\cdot B$

Luego: $5K + 5\dfrac{K}{3} + \dfrac{K}{3} = 735$

Damos común denominador en el primer miembro:

$$\frac{3(5K)+1(5K)+1(K)}{3} = 735$$

$$21K = 735\cdot 3 \Rightarrow K = \frac{735\cdot 3}{21} \Rightarrow \boxed{K=105}$$

Reemplazamos el valor de K = 105, en **(I)**:

$x=5K=5(105)=525$	$y=\dfrac{5K}{3}=\dfrac{5(105)}{3}=175$	$z=\dfrac{K}{3}=\dfrac{105}{3}=35$

Rpta.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1: Repartir el número 1 320 directamene proporcional a los números 9, 2 y 11.

Resolución:

- Número por Repartir: **1 320**
- Suma de dichos números: 9 + 2 + 11 = **22**

Representando por x, y, z, las partes proporcionales correspondientes tenemos:

$$\text{i)}\quad x = \frac{1\,320}{22}\cdot 9 \Rightarrow x = 60\cdot 9 \Rightarrow \boxed{x = 540}$$

$$\text{ii)}\quad y = \frac{1\,320}{22}\cdot 2 \Rightarrow y = 60\cdot 2 \Rightarrow \boxed{y = 120}$$

$$\text{iii)}\quad z = \frac{1\,320}{22}\cdot 11 \Rightarrow z = 60\cdot 11 \Rightarrow \boxed{z = 660}$$

∴ Las tres partes pedidas son: 540; 120 y 660 ***Rpta.***

Problema 2: La suma de tres números proporcionales a 7; 5 y 6 es 54. ¿Cuáles son dichos números?

Resolución:

- Número por Repartir: 54
- Suma de dichos números: $7 + 5 + 6 = 18$

Representando por x, y, z, las partes proporcionales correspondientes tenemos:

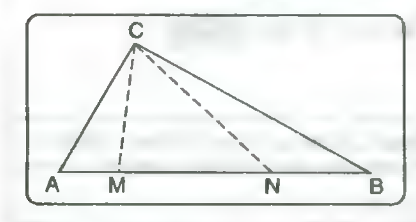
$$\text{i)}\quad x = \frac{54}{18}\cdot 7 \Rightarrow x = 3\cdot 7 \Rightarrow \boxed{x = 21}$$

$$\text{ii)}\quad y = \frac{54}{18}\cdot 5 \Rightarrow y = 3\cdot 5 \Rightarrow \boxed{y = 15}$$

$$\text{iii)}\quad z = \frac{54}{18}\cdot 6 \Rightarrow z = 3\cdot 6 \Rightarrow \boxed{z = 18}$$

∴ Las tres partes pedidas son: 21; 15 y 18 ***Rpta.***

Problema 3: En la figura mostrada:



área del Δ ABC = 836 cm^2

- $\overline{AM}$ = 15 cm
- $\overline{MN}$ = 34 cm
- $\overline{NB}$ = 27 cm

Calcula el área del Δ ACM; del Δ MCN y del Δ NCB.

Resolución:

Primer Método (Aplicando Areas):

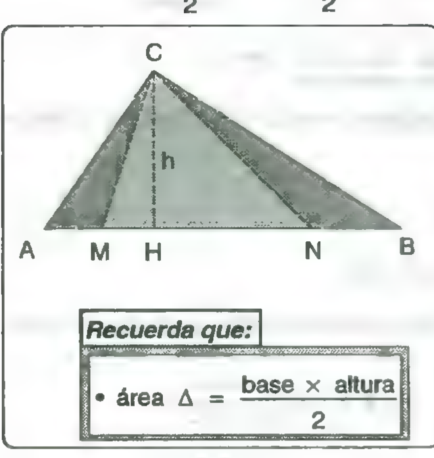
Trazamos $\overline{CH}$ = h, como se muestra en la figura; pues "h" es altura de los

triángulos: ACM; MCN; NCB. y del Δ ACB.

Luego:

$$\underbrace{\text{área } \Delta \text{ ACM}} + \underbrace{\text{área } \Delta \text{ MCN}} + \underbrace{\text{área } \Delta \text{ NCB}} = \underbrace{\text{área } \Delta \text{ ACB}}$$

$$\frac{15 \cdot h}{2} + \frac{34 \cdot h}{2} + \frac{27 \cdot h}{2} = 836$$



$$\frac{76 \cdot h}{2} = 836$$

$$h = \frac{836 \cdot 2}{76} \Rightarrow \boxed{h = 22}$$

Donde:

*) $\text{área } \Delta \text{ ACM} = \frac{15 \cdot h}{2} = \frac{15 \cdot 22}{2}$

$\boxed{\text{área } \Delta \text{ ACM} = 165 \text{ cm}^2}$

**) $\text{área } \Delta \text{ MCN} = \frac{34 \cdot h}{2} = \frac{34 \cdot 22}{2}$

$\boxed{\text{área } \Delta \text{ MCN} = 374 \text{ cm}^2}$

***) $\text{área } \Delta \text{ NCB} = \frac{27 \cdot h}{2} = \frac{27 \cdot 22}{2} = 297 \text{ cm}^2 \Rightarrow \boxed{\text{área } \Delta \text{ NCB} = 297 \text{ cm}^2}$

Otro método: (Repartimiento Proporcional Directo).

• Area por repartir (área Δ ABC) = $\boxed{836 \text{ cm}^2}$

• Suma de las bases de los triángulos en que queda dividido el

$$\Delta \text{ ABC} = \overline{AM} + \overline{MN} + \overline{NB} = 15 \text{ cm} + 34 \text{ cm} + 27 \text{ cm} = \boxed{76 \text{ cm}}$$

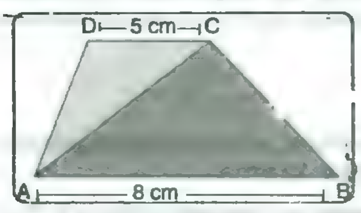
Luego:

i) $\text{área } \Delta \text{ ACM} = \frac{836 \text{ cm}}{76 \text{ cm}} \cdot 15 \text{ cm} \Rightarrow \boxed{\text{área } \Delta \text{ ACM} = 11 \text{ cm} . 15 \text{ cm} = 165 \text{ cm}^2}$

ii) $\text{área } \Delta \text{ ACM} = \frac{836 \text{ cm}^2}{76 \text{ cm}} \cdot 34 \text{ cm} \Rightarrow \boxed{\text{área } \Delta \text{ MCN} = 11 \text{ cm} . 34 \text{ cm} = 374 \text{ cm}^2}$

iii) $\text{área } \Delta \text{ ACM} = \frac{836 \text{ cm}^2}{76 \text{ cm}} \cdot 27 \text{ cm} \Rightarrow \boxed{\text{área } \Delta \text{ NCB} = 11 \text{ cm} . 27 \text{ cm} = 297 \text{ cm}^2}$

Problema 4: En la figura mostrada:



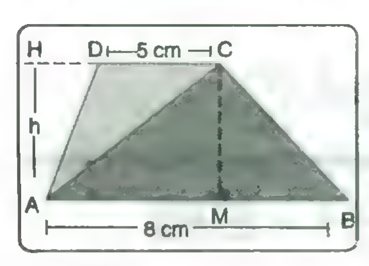
Datos: área ⏢ ABCD = $58{,}50\ cm^2$

Calcular:

- El área del Δ ABC y
- El área del Δ ACD.

Resolución:

Método por areas:



$$\underbrace{\text{área ⏢ ABCD}} = \underbrace{\text{área } \triangle\text{ACD}} + \underbrace{\text{área } \triangle\text{ABC}}$$

$$58{,}50 = \frac{\overline{DC}\cdot\overline{AH}}{2} + \frac{\overline{AB}\cdot\overline{CM}}{2}$$

$$58{,}50 = \frac{5\cdot h}{2} + \frac{8\cdot h}{2}$$

$$58{,}50 = \frac{13\cdot h}{2} \Rightarrow \frac{58{,}50\cdot 2}{13} = h$$

$$\therefore \boxed{9 = h}$$

Luego:

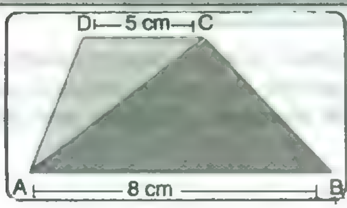
- área Δ ABC $= \dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{CM}}{2} = \dfrac{8\cdot 9}{2} = 36\ cm^2$ ➧ $\boxed{\text{área } \Delta\ ABC = 36\ cm^2}$

Rpta.

- área Δ ACD $= \dfrac{\overline{DC}\cdot\overline{AH}}{2} = \dfrac{5\cdot 9}{2} = 22{,}5\ cm^2$ ➧ $\boxed{\text{área } \Delta\ ACD = 22{,}5\ cm^2}$

Rpta.

• Método de Repartición Proporcional Directo:



- Area por repartir (⏢ ABCD) = $58{,}50\ cm^2$
- Suma de bases de los dos triángulos en que queda dividido el:

⏢ ABCD = 8 + 5 = **13 cm**

Luego:

(a). área Δ ABC $= \boxed{\dfrac{58{,}50}{13}}\cdot 8 = 36\ cm^2$ ➧ $\boxed{\text{área } \Delta\ ABC = 36\ cm^2}$

Rpta.

(b). área Δ ACD $= \boxed{\dfrac{58{,}50}{13}}\cdot 5 = 22{,}5\ cm^2$ ➧ $\boxed{\text{área } \Delta\ ACD = 22{,}5\ cm^2}$

Rpta.

Problema 5: Una empresa establece un premio de 930 dólares para repartir entre los tres empleados de mejor asistencia. Si faltarán 2; 3 y 5 días respectivamente. ¿Cuánto recibió cada uno?

Resolución:

El reparto a realizar es **inversamente proporcional**, pues a menos faltas recibirá más dinero y más faltas recibirá menos dinero. Veamos:

- Repartir 930 dólares en tres partes **inversamente proporcionales** a 2; 3 y 5 equivale a repartir dicha cantidad en partes directamente proporcionales a 1/2 ; 1/3 y 1/5.

Entonces:

- Suma por repartir = $\boxed{930 \text{ dólares}}$
- Suma de fracciones = $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{15+10+6}{30}=\boxed{\frac{31}{30}}$

Representando por x, y, z las partes proporcionales correspondientes tenemos:

$$\text{I)} \quad x=\frac{930}{\frac{31}{30}}\times\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{930\cdot 30\cdot 1}{31\cdot 2} \Rightarrow \boxed{x=450}$$

$$\text{II)} \quad y=\frac{930}{\frac{31}{30}}\times\frac{1}{3} \Rightarrow y=\frac{930\cdot 30\cdot 1}{31\cdot 3} \Rightarrow \boxed{y=300}$$

$$\text{III)} \quad z=\frac{930}{\frac{31}{30}}\times\frac{1}{5} \Rightarrow z=\frac{930\cdot 30\cdot 1}{31\cdot 5} \Rightarrow \boxed{z=180}$$

∴ Cada uno recibió: 450; 300 y 180 dólares respectivamente

Problema 6: Un circo reparte 2040 entradas entre 4 colegios proporcionales al número de alumnos. El primer colegio cuenta con 560 alumnos, el segundo con 840; el tercero con 1 210 y el cuarto con 790 alumnos. ¿Cuántas entradas corresponden a cada colegio?

Resolución:

El reparto a realizar es Directamente Proporcional, pues a más entradas irán al circo más alumnos y a menos entradas irán al circo menos alumnos.

Luego:

- Suma por repartir = $\boxed{2\,040 \text{ entradas}}$
- Suma del número de alumnos = 560 + 840 + 1 210 + 790 = $\boxed{3\,400}$

Representando por x, y, z, w las partes proporcionales correspondientes tenemos:

i) $x = \frac{2\,040}{3\,400} \cdot 560 \Rightarrow \boxed{x = 336}$

ii) $y = \frac{2\,040}{3\,400} \cdot 840 \Rightarrow \boxed{y = 504}$

iii) $z = \frac{2\,040}{3\,400} \cdot 1\,210 \Rightarrow \boxed{z = 726}$

iv) $w = \frac{2\,040}{3\,400} \cdot 790 \Rightarrow \boxed{w = 474}$



- *Cuando nos digan que el reparto es en partes proporcionales se sobre entiende que el reparto es **directamente proporcional**.*

∴ A cada colegio le corresponde: 336; 504; 726; 474 entradas respectivamente. ***Rpta.***



TALLER DE EJERCICIOS Nº 58



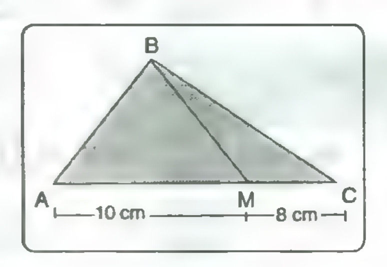
1. Repartir: 120 soles en partes proporcionales a 5 y 7.
2. Repartir: 528 kilogramos de frejoles en partes directamente proporcionales a 9 y 13.
3. Repartir: 380 toneladas de café en partes directamente proporcionales a 5, 6 y 8.
4. Repartir 360 soles en partes proporcionales a 5; 9; 10 y 12.
5. Repatir S/. 1 400 en partes proporcionales a las edades de tres niños de 4, 7 y 9 años respectivamente.
6. Dividir 196 en partes directamente proporcionales a 0,3; 0,5 y 1,2.
7. Repartir 130 litros de aceite en partes proporcionales a 1/2; 1/3 y 1/4.
8. Repartir S/. 5 200; entre A, B y C, en partes directamente proporcionales a 2; 3 y 1/5.
9. Repartir 429 kilogramos de camotes en partes proporcionales a 2/3; 3/4 y 5/24.
10. Repartir 2 160 en dos partes directamente proporcionales, de modo que una sea la quinta parte de la otra.
11. Tres operarios disponen de 33,60 galones para la terminación del tapizado de sillas. El primero tapizó 8 sillas; el segundo, 3 sillas y el tercero, 5 sillas. ¿Qué cantidad de galón utilizó cada uno?
12. Un padre premia a su hijo repartiendo 520 dólares proporcionalmente al promedio obtenido en sus estudios. ¿Cuánto recibe cada uno si los promedios respectivos son: 12; 13 y 15?

13. Un señor hizo 4 llamadas telefónicas a Piura con una duración de: 8; 5; 7 y 3 minutos. Si la empresa Entel le cobra $ 20,01. ¿Cuál es el costo de cada llamada en soles, (considerar $ 1 = 2,3 soles).

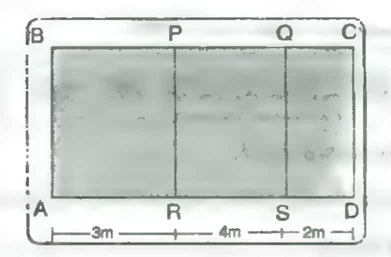
14. En la figura mostrada:

- área del Δ ABC = 54 cm^2
- $\overline{AM}$ = 10 cm
- $\overline{MC}$ = 8 cm

Calcular el área del Δ ABM y del Δ MBC.



15. En la figura mostrada:



- área ▭ ABCD = 45 m^2
- $\overline{AR}$ = 3 m
- $\overline{RS}$ = 4 m
- $\overline{SD}$ = 2 m

Calcular el área del ▭ ABPR, del ▭ RPQS y del ▭ SQCD.

16. Repartir el número 1 040 en partes inversamente proporcionales a 3 y 5.

17. Repartir 165 en partes inversamente proporcionales a 2; 5 y 8.

18. Dividir el número 170 en dos partes inversamente proporcionales a los números 3/2 y 4/3.

19. Repartir el número 1 246 inversamente proporcional a 5/2; 4 y 6/5.

20. Un automovilista recorre un camino en tres etapas; la primera a 80 km/h; la segunda a 100 km/h y la tercera a 90 km/h. Si el tiempo total empleado es de 24 h 12 min. ¿Qué tiempo empleo en cada etapa?

21. Se ha hecho un reparto en tres partes inversamente proporcional a 3; 1/3 y 1/6. La segunda parte es de 72 soles. ¿Cuáles son las otras dos partes y el total repartido?

22. Nataly repartió cierta cantidad de dinero entre 3 niños en partes proporcionales a los números 4; 5 y 7 si el tercero recibió S/. 42 más que el primero. ¿Qué cantidad de dinero repartió?

RESPUESTAS TALLER

(1.) 50 y 70	(2.) 216 y 312
(3.) 100; 120 y 160	(4.) 50; 90; 100 y 120
(5.) 280; 490 y 630	(6.) 29,4; 49 y 117,6
(7.) 60; 40 y 30	(8.) 2 000; 3 000 y 200
(9.) 176; 198 y 55	(10.) 1 800 y 360
(11.) 16,8 g; 6,3 g y 10,5 g	(12.) 156; 169 y 195
(13.) S/. 16,008; S/. 10,005	(14.) 30 cm^2 y 24 cm^2
S/. 14,007 y S/. 6,003	(16.) 650 y 390
(15.) 15 m^2; 20 m^2 y 10 m^2	(18.) 80 y 90
(17.) 100; 40 y 25	(20.) 9h; 7,2h y 8h
(19.) 336; 210 y 700	(22.) 224 soles
(21.) 8; 144 y 224	

4.2.6. Reparto Proporcional Compuesta Directa:

Problema General:

Repartir el número (N) en tres partes directamente proporcionales a los números a, b y c y a los números a', b' y c', equivale a repartir el número (N) dado en 3 partes directamente proporcionales a los productos a·a'; b·b' y c·c'.

Resolución:

Llamemos x, y, z a las partes buscadas que sean directamente proporcionales a tres números dados a·a'; b·b' y c·c', el cociente debe ser constante de acuerdo con la definición de magnitudes directamente proporcionales.

$$\frac{x}{a\cdot a'}=\frac{y}{b\cdot b'}=\frac{z}{c\cdot c'}=\textbf{\textit{constante}}$$

Por propiedad:

$$\frac{\overbrace{x+y+z}}{\underbrace{a\cdot a'+b\cdot b'+c\cdot c'}}=\frac{x}{a\cdot a'}=\frac{y}{b\cdot b'}=\frac{z}{c\cdot c'}\quad \text{.........}\ \textbf{(I)}$$

Sabemos que: $\boxed{x+y+z=N}$ .... **(II)**

Hacemos que: $\boxed{a\cdot a'+b\cdot b'+c\cdot c'=S}$ .... **(III)**

Reemplazamos **(II)** y **(III)** en **(I)**:

$$\frac{N}{S}=\frac{x}{a\cdot a'}=\frac{y}{b\cdot b'}=\frac{z}{c\cdot c'}$$

Donde:

$\dfrac{N\cdot a\cdot a'}{S}=x$	$\dfrac{N\cdot b\cdot b'}{S}=y$	$\dfrac{N\cdot c\cdot c'}{S}=z$

Fórmulas para usar

Problema: Repartir el número 459 directamente proporcional a 3 y 5 y simultáneamente a 7 y 6.

Resolución:

Llamemos x, y; a las partes buscadas que sean directamente proporcionales a dos números dados $\boxed{3\cdot 7}$ y $\boxed{5\cdot 6}$, el cociente debe ser constante de acuerdo con la definición de magnitudes directamente proporcionales.

$$\boxed{\frac{x}{\boxed{3\cdot 7}}=\frac{y}{\boxed{5\cdot 6}}=\textbf{\textit{constante}}}$$

Por propiedad: $\dfrac{x+y}{\boxed{3\cdot 7}+\boxed{5\cdot 6}}=\dfrac{x}{3\cdot 7}=\dfrac{y}{5\cdot 6}$

$$\frac{\boxed{x+y}}{\boxed{21+30}}=\frac{x}{21}=\frac{y}{30}\quad ;\ \textbf{pero: } \boxed{x+y=459}$$

$$\frac{\boxed{459}}{\boxed{51}}=\frac{x}{21}=\frac{y}{30}\quad\Rightarrow\quad 9=\frac{x}{21}=\frac{y}{30}$$

Donde:

i) $9=\dfrac{x}{21}\ \Rightarrow\ \boxed{189=x}$	ii) $9=\dfrac{y}{30}\ \Rightarrow\ \boxed{270=y}$

$\therefore$ Las partes pedidas son: 189 y 270 ***Rpta.***

Otro Método:

Repartir el número 459 directamente proporcional a 3 y 5 y sim ultáneamente a 7 y 6.

Resolución:

Del enunciado del problema, planteamos:

*) $x = 3 \cdot 7K \Rightarrow x = 21K$ ...... (I)

**) $y = 5 \cdot 6K \Rightarrow y = 30K$

Además: $\boxed{x + y = 459}$ ...... (I)

Reemplazamos (I) en (II):

$$21K + 30K = 459 \Rightarrow 51K = 459 \Rightarrow K = \frac{459}{51} \Rightarrow \therefore \boxed{K = 9}$$

Reemplazamos el valor de K = 9; en (I):

$x = 21K \Rightarrow x = 21(9) = \boxed{189}$ | $y = 30K \Rightarrow y = 30(9) = \boxed{270}$ ***Rpta.***

Problema: Repartir el número 1 300 directamente proporcional a 2, 3 y 6 y simultáneamente a **4**, **5** y **7**.

Resolución:

Llamemos x, y, z las partes buscadas que sean directamente proporcionales a tres números dados: $\boxed{2 \cdot 4}$; $\boxed{3 \cdot 5}$ y $\boxed{6 \cdot 7}$.

Luego: $\dfrac{x}{\boxed{2 \cdot 4}} = \dfrac{y}{\boxed{3 \cdot 5}} = \dfrac{z}{\boxed{6 \cdot 7}} = \textbf{\textit{constante}}$

Por Propiedad: $\dfrac{x + y + z}{\boxed{2 \cdot 4} + \boxed{3 \cdot 5} + \boxed{6 \cdot 7}} = \dfrac{x}{2 \cdot 4} = \dfrac{y}{3 \cdot 5} = \dfrac{z}{6 \cdot 7}$

$$\frac{\boxed{x + y + z}}{\boxed{8 + 15 + 42}} = \frac{x}{8} = \frac{y}{15} = \frac{z}{42}\text{; pero: } \boxed{x + y + z = 1\ 300}$$

$$\frac{\boxed{1\ 300}}{\boxed{65}} = \frac{x}{8} = \frac{y}{15} = \frac{z}{42} \Rightarrow 20 = \frac{x}{8} = \frac{y}{15} = \frac{z}{42}$$

Donde:

i) $20 = \dfrac{x}{8} \Rightarrow \boxed{160 = x}$ | ii) $20 = \dfrac{y}{15} \Rightarrow \boxed{300 = y}$

iii) $20 = \dfrac{z}{42} \Rightarrow \boxed{840 = z}$ ***Rpta.***

$\therefore$ Las partes pedidas son: 160; 300 y 840 ***Rpta.***

Otro Método:

Repartir el número 1 300 directamente proporcional a 2, 3 y 6 y simultáneamente a 4, 5 y 7.

Resolución:

Del enunciado del problema, planteamos:

$$\left.\begin{array}{ll} ^{*}) & x = 2\cdot 4K \Rightarrow x = 8K \\ ^{**}) & y = 3\cdot 5K \Rightarrow y = 15K \\ ^{***}) & z = 6\cdot 7K \Rightarrow z = 42K \end{array}\right\} \text{...... (I)}$$

Además: $\boxed{x + y + z = 1\,300}$ ..... **(II)**

Reemplazamos **(I)** en **(II)**:

$$8K + 15K + 42K = 1\,300 \Rightarrow 65K = 1\,300 \Rightarrow K = \frac{1\,300}{65} \Rightarrow \therefore \boxed{K = 20}$$

Reemplazamos el valor de K = 20; en **(I)**:

i) $x = 8K \Rightarrow x = 8(20) = \boxed{160}$ ii) $y = 15K \Rightarrow y = 15(20) = \boxed{300}$

iii) $z = 42K \Rightarrow z = 42(20) = \boxed{840}$ ***Rpta.***

1.2.7. Repartición Proporcional Compuesta Inversa.

Como ya se ha visto, los problemas de repartición inversa se transforman en problemas de repartición directa.

Es decir: Repartir un número **(N)** en partes inversamente proporcinales a los números **a**, **b** y **c** a los números a', **b'** y **c'** equivale a repartir el número **(N)** en partes directamente proporcionales a los inversos de dichos números.

Designando con **x**, **y** y **z** las partes en que se divide **N** y de acuerdo con el primer caso resulta:

$$\boxed{\frac{x}{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a'}} = \frac{y}{\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{b'}} = \frac{z}{\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{c'}} = \textbf{\textit{constante}}}$$

Por Propiedad:

$$\boxed{\frac{x + y + z}{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a'} + \frac{1}{b}\cdot\frac{1}{b'} + \frac{1}{c}\cdot\frac{1}{c'}} = \frac{x}{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a'}} = \frac{y}{\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{b'}} = \frac{z}{\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{c'}}} \text{ ...... (I)}$$

Sabemos que: $\boxed{x + y + z = N}$ .... **(II)**

Hacemos: $\boxed{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a'} + \frac{1}{b}\cdot\frac{1}{b'} + \frac{1}{c}\cdot\frac{1}{c'} = S}$ ..... **(III)**

Reemplazamos **(II)** y **(III)** en **(I)**:

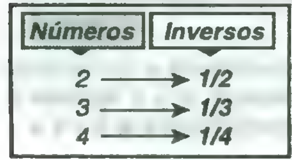
$$\frac{N}{S}=\frac{x}{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a'}}=\frac{y}{\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{b'}}=\frac{z}{\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{c'}}$$

Donde:

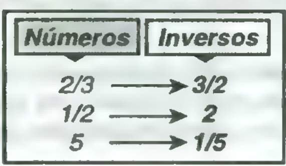
$$\frac{N}{S}\cdot\left(\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a'}\right)=x \qquad \frac{N}{S}\cdot\left(\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{b'}\right)=y \qquad \frac{N}{S}\cdot\left(\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{c'}\right)=z$$

Problema: Repartir 6 160 en partes inversamente proporcionales a 2; 3 y 4 y 2/3 ; 1/2 y 5.

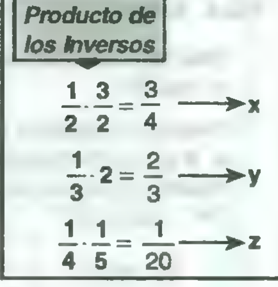
Resolución:



Números	*Inversos*
2	1/2
3	1/3
4	1/4



Números	*Inversos*
2/3	3/2
1/2	2
5	1/5



Producto de los Inversos

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}\longrightarrow x$$

$$\frac{1}{3}\cdot 2=\frac{2}{3}\longrightarrow y$$

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{20}\longrightarrow z$$

x, y y z son directamente proporcionales a:

$$\frac{3}{4};\ \frac{2}{3}\ y\ \frac{1}{20}$$

Luego: $\dfrac{x}{\frac{3}{4}}=\dfrac{y}{\frac{2}{3}}=\dfrac{z}{\frac{1}{20}}=$ ***constante***

Recuerda que:

$$\frac{A}{\left(\frac{B}{C}\right)}=\frac{A\cdot C}{B}$$

Por Propiedad: $\dfrac{x+y+z}{\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{20}\right)}=\dfrac{x}{\frac{3}{4}}=\dfrac{y}{\frac{2}{3}}=\dfrac{z}{\frac{1}{20}}$

$$\frac{x+y+z}{\left(\frac{45+40+3}{60}\right)}=\frac{4x}{3}=\frac{3y}{2}=20z\ ;\ \text{pero: } \boxed{x+y+z=6\ 160}$$

$$\frac{6\ 160}{\left(\frac{88}{60}\right)}=\frac{4x}{3}=\frac{3y}{2}=20z$$

$$\frac{6\ 160\cdot 60}{80}=\frac{4x}{3}=\frac{3y}{2}=20z$$

$$4\ 200=\frac{4x}{3}=\frac{3y}{2}=20z$$

Donde:

i) $4\ 200 = \dfrac{4x}{3} \Rightarrow \dfrac{4\ 200 \cdot 3}{4} = x \Rightarrow \boxed{x = 3\ 150}$

ii) $4\ 200 = \dfrac{3y}{2} \Rightarrow \dfrac{4\ 200 \cdot 2}{3} = y \Rightarrow \boxed{y = 2\ 800}$

iii) $4\ 200 = 20z \Rightarrow \dfrac{4\ 200}{20} = z \Rightarrow \boxed{z = 210}$

$\therefore$ Las partes pedidas son: 3 150; 2 800 y 210. ***Rpta.***

4.2.8. Reparticición Proporcional Compuesta Mixta:

Este caso es una combinación de los casos de repartición proporcional directa e inversa.

Repartir un número **N** en partes directamente proporcionales a los números **a**, **b** y **c** e inversamente proporcionales a los números **a'**, **b'** y **c'** equivale a repartir dicha cantidad en partes directamente proporcionales a a, **b** y **c** a **1/a'** ; **1/b'** y **1/c'**

Es decir: $\dfrac{x}{a \cdot \dfrac{1}{a'}} = \dfrac{y}{b \cdot \dfrac{1}{b'}} = \dfrac{z}{c \cdot \dfrac{1}{c'}} = \textit{constante}$

Por Propiedad: $\dfrac{x+y+z}{a \cdot \dfrac{1}{a'} + b \cdot \dfrac{1}{b'} + c \cdot \dfrac{1}{c'}} = \dfrac{x}{a \cdot \dfrac{1}{a'}} = \dfrac{x}{b\ \dfrac{1}{b'}} = \dfrac{y}{c \cdot \dfrac{1}{c'}}$ .... **(I)**

Sabemos que: $x + y + z = N$ .... **(II)**

Hacemos que: $a \cdot \dfrac{1}{a'} + b \cdot \dfrac{1}{b'} + c \cdot \dfrac{1}{c'} = S$ .... **(III)**

Reemplazamos **(II)** y **(III)** en **(I)**:

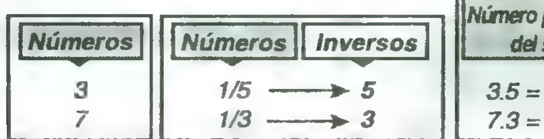
$$\frac{N}{S} = \frac{x}{a \cdot \dfrac{1}{a'}} = \frac{x}{b \cdot \dfrac{1}{b'}} = \frac{y}{c \cdot \dfrac{1}{c'}}$$

Donde:

$$\boxed{\frac{N}{S} \cdot \left(a \cdot \frac{1}{a'}\right) = x} \quad \boxed{\frac{N}{S} \cdot \left(b \cdot \frac{1}{b'}\right) = y} \quad \boxed{\frac{N}{S} \cdot \left(c \cdot \frac{1}{c'}\right) = z}$$

Problema: Repartir el número 4 320 en partes directamente proporcionales a 3 y 7 e inversamente proporcionales a 1/5 y 1/3.

Resolución:



Producto del primer Número por el inverso del segundo

$3.5 = 15 \longrightarrow x$

$7.3 = 21 \longrightarrow y$

x e **y** son directamente proporcionales a 15 y 21.

Luego: $\boxed{\dfrac{x}{15} = \dfrac{y}{21} = \textbf{constante}}$

Por Propiedad: $\boxed{\dfrac{x+y}{15+21}} = \dfrac{x}{15} = \dfrac{y}{21}$; **pero:** $\boxed{x + y = 4\,320}$

$$\boxed{\dfrac{4\,320}{36}} = \dfrac{x}{15} = \dfrac{y}{21} \Rightarrow 120 = \dfrac{x}{15} = \dfrac{y}{21}$$

Donde:

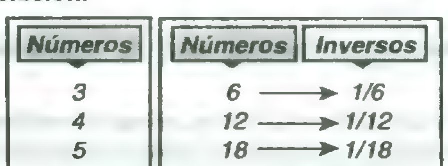
i) $120 = \dfrac{x}{15} \Rightarrow 120 \cdot 15 = x \Rightarrow \boxed{1\,800 = x}$

ii) $120 = \dfrac{y}{21} \Rightarrow 120 \cdot 21 = y \Rightarrow \boxed{2\,520 = y}$

$\therefore$ Las partes pedidas son: 1 800 y 2 520. ***Rpta.***

Problema: Repartir 480 en 3 partes directamente proporcionales a: 3 ; 4 y 5 e inversamente proporcionales a: 6 ; 12 y 18.

Resolución:



Producto del primer Número por el inverso del segundo

$3 \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{3}{6} \longrightarrow x$

$4 \cdot \dfrac{1}{12} = \dfrac{4}{12} \longrightarrow y$

$5 \cdot \dfrac{1}{18} = \dfrac{5}{18} \longrightarrow z$

x, **y** e **z** son directamente proporcionales a:

$$\frac{3}{6} ; \frac{4}{12} \text{ y } \frac{5}{18}$$

Luego: $\boxed{\dfrac{x}{\frac{3}{6}} = \dfrac{y}{\frac{4}{12}} = \dfrac{z}{\frac{5}{18}} = \textbf{constante}}$

Por Propiedad: $\dfrac{x+y+z}{\left(\dfrac{3}{6}+\dfrac{4}{12}+\dfrac{5}{18}\right)}=\dfrac{x}{\dfrac{3}{6}}=\dfrac{y}{\dfrac{4}{12}}=\dfrac{z}{\dfrac{5}{18}}$

$$\frac{x+y+z}{\left(\dfrac{18+12+10}{36}\right)}=\frac{6x}{3}=\frac{12y}{4}=\frac{18z}{5}\ ;\ \text{pero: } \boxed{x+y+z=480}$$

$$\frac{480}{\left(\dfrac{40}{36}\right)}=2x=3y=\frac{18}{5}z \Rightarrow 432=2x=3y=\frac{18}{5}z$$

Donde:

i) $432=2x \Rightarrow \dfrac{432}{2}=x \Rightarrow \boxed{216=x}$

ii) $432=3y \Rightarrow \dfrac{432}{3}=y \Rightarrow \boxed{144=y}$

iii) $432=\dfrac{18}{5}z \Rightarrow \dfrac{432\cdot 5}{18}=z \Rightarrow \boxed{120=z}$

∴ Las partes pedidas son: 216; 144 y 120. ***Rpta.***



TALLER DE EJERCICIOS Nº 59

1. Repartir el número 456 directamente proporcional a 2 y 5 y simultáneamente a 4 y 6.

2. Repartir el número 390 directamente proporcional a 2 y 4 y simultáneamente a 3 y 5.

3. Repartir el número 180 directamente proporcional a 1/3 y 2/5 y simultáneamente a 6 y 10.

4. Repartir el número 560 directamente proporcional a 2 ; 3 y 4 y simultáneamente a 5 ; 6 y 7.

5. Con 380 kg de una mezcla se han llenado tres recipientes cuyas bases tienen 8 dm^2, 6 dm^2 y 9 dm^2 de área y cuyas alturas tienen una longitud de 7 dm, 4dm y 8 dm respectivamente. ¿Cuántos kg. le corresponde a cada envase?

6. Repartir el número 800, en partes inversamente proporcionales a 2 ; 4 y 6 y a 2/3; 1/2 y 3.

7. Repartir el número 1 680 en partes inversamente proporcionales a 2 ; 3 y 5 y a 1/3; 2 y 3/5.

8. Repartir el número 468 en partes directamente proporcionales a 2 y 5 e inversamente proporcionales a 1/3 y 1/4.

9. Repartir el número 1 100 en partes directamente proporcionales a 2 ; 5 y 7 e inversamente proporcionales a 1/3; 1/2 y 1/4.

10. Repartir el número 260 en partes directamente proporcionales a 2 ; 4 y 6 e inversamente proporcionales a 6; 8 y 24.

RESPUESTAS TALLER

(1.)	96 y 360	(6.)	450; 300 y 50
(2.)	90 y 360	(7.)	1 260; 140 y 280
(3.)	60 y 120	(8.)	108 y 360
(4.)	100; 180 y 280	(9.)	150; 250 y 700
(5.)	140; 60 y 180 kg	(10.)	80; 120 y 60

4.3. Regla de Tres Simple y Compuesta:

4.3.1. La Regla de Tres:

Es una operación que tiene por objeto, dados dos o más partes de cantidades proporcionales siendo una desconocida o **incógnita**, hallar el valor de esta última.

La Regla de Tres puede ser: **Simple** y **Compuesta**.

Es **Simple** cuando intervienen dos pares de cantidades proporcionales.

Es **Compuesta** cuando intervienen tres o más pares de cantidades proporcionales.

4.3.2. Regla de Tres Simple:

En la Regla de Tres Simple intervienen tres cantidades conocidas o **Datos** y una desconocida o **incógnita**. Esta regla puede ser: **Directo** o **Inversa**, según las cantidades que intervienen sean directa o inversamente proporcionales.

- ***Supuesto y Pregunta:*** En toda Regla de Tres hay dos filas de términos o números. El supuesto formado por los términos conocidos del problema va generalmente en la parte superior. La pregunta formada por los términos que contienen a la incógnita del problema va en la parte inferior.

Ejemplo: Si: 3 lapiceros, cuestan S/. 6. ¿Cuánto costarán 12 lapiceros?

***Supuesto:** 3 lapiceros* ⟶ *S/. 6*

***Pregunta:** 12 lapiceros* ⟶ *S/. x*

- El **supuesto** está formado por 3 lapiceros y S/. 6; la **pregunta** por 12 lapiceros y la incógnita S/. x.

- ***Métodos de Resolución:*** Todo problema que se plantea por una Regla de Tres puede resolverse por tres métodos:

I. Método de Reducción a la unidad.
II. Método de las Proporciones y
III. Método Práctico



Método de Reducción a la Unidad:

- **Regla de Tres Simple Directa:**

Ejemplo 1: Si 5 sillas cuestan S/. 180. ¿Cuánto costarán 8 sillas?

Resolución:

Supuesto: *5 sillas* ⟶ *S/. 180*
Pregunta: *8 sillas* ⟶ x

Razonando: *Si 5 sillas cuestan S/. 180*

1 silla costará: $\dfrac{S/.180}{5} = \boxed{S/.\,36}$

Luego: *8 sillas costarán:* $8\times \boxed{S/.\,36} = S/.\,288$ **Rpta.**

Ejemplo 2: Si 20 chocolares cuestan S/. 60. ¿Cuánto costarán 6 chocolares?

Resolución:

Supuesto: *20 chocolates* ⟶ *S/. 60*
Pregunta: *6 chocolates* ⟶ x

Razonando: *Si 20 chocolates cuestan S/. 60*

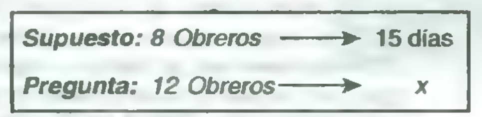
1 chocolate costará: $\dfrac{S/.60}{20} = \boxed{S/.\,3}$

Luego: *6 chocolates costarán:* $6\times \boxed{S/.\,3} = S/.\,18$ **Rpta.**

• **Regla de Tres Simple Inversa:**

Ejemplo 1: Si 8 obreros terminan una obra en 15 días; 12 obreros. ¿En cuántos días terminarán la misma obra?

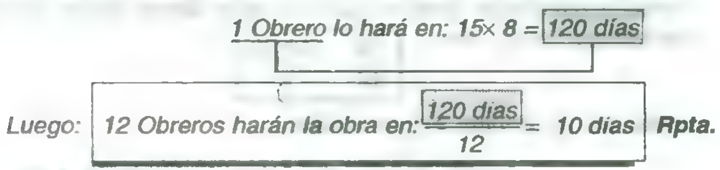
Resolución:



Supuesto: 8 Obreros ⟶ 15 días

Pregunta: 12 Obreros ⟶ *x*

Razonando: *Si 8 Obreros hacen la obra en 15 días*



1 Obrero lo hará en: $15 \times 8 =$ 120 días

Luego: *12 Obreros harán la obra en:* $\dfrac{120 \text{ días}}{12} = 10 \text{ días}$ **Rpta.**

Ejemplo 2: Si trabajando 10 horas diarias una cuadrilla de obreros tardan 18 días para terminar una obra; trabajando 6 horas diarias. ¿En cuántos días terminarían la misma obra?

Resolución:

Supuesto: 10 h/d ⟶ *18 días*

Pregunta: 6 h/d ⟶ *x*

Razonando: *Si trabajando 10 h/d tardan 18 días*

trabajando 1 h/d tardarían: $18 \times 10 =$ 180 días

Luego: *Trabajando 6h/d tardarían:* $\dfrac{180 \text{ días}}{6} = 30 \text{ días}$ **Rpta.**



II. Método de las Proporciones:

• **Regla de Tres Simple Directa:**

Ejemplo: Si 25 pollos cuestan S/.112,50. ¿Cuánto se pagará por 14 pollos?

Resolución:

Supuesto: 25 pollos ⟶	S/. 112,50
Pregunta: 14 pollos ⟶	x

Razonando: *Si: 25 pollos cuestan S/. 112,50 por menos pollos (14), se pagará menos soles. Estas cantidades proporcionales van de menos a menos (- á -), es decir son cantidades directamente proporcionales, por consiguiente la* ***Regla es Directa.***

Ahora formamos una proporción escribiendo la razón directa de las primeras cantidades (pollos) igual a la razón directa de las segundas cantidades (soles); Así:

$$\boxed{\frac{25}{14}=\frac{112{,}50}{x}}$$

Hallando el término desconocido:

$$x=\frac{14\cdot 112{,}50}{25}=63 \Rightarrow \therefore \boxed{x=S/.63}$$ ***Rpta.***

• Regla de Tres Simple Inversa:

Ejemplo: Si trabajando 10 horas diarias una cuadrilla de obreros demoran 18 días para terminar una obra, trabajando 6 horas diarias. ¿En cuántos días terminarían la misma obra?

Resolución:

Supuesto: 10 h/d ⟶	18 días
Pregunta: 6 h/d ⟶	x

Razonando: *Si trabajando 10 h/d demoran 18 días, trabajando menos horas diarias (6) lo terminarían en más días. Vemos que estas cantidades proporcionales van de menos a más (- a +); osea que son inversamente proporcionales; por consiguiente la* ***Regla de Tres es Inversa.***

Entonces se forma una proporción escribiendo la razón directa de las primeras cantidades (h/d) igual a la razón inversa de las segundas cantidades (días). Así:

$$\boxed{\frac{10}{6}=\frac{x}{18}}$$

De donde: $$x=\frac{10\cdot 18}{6}=30 \text{ días} \Rightarrow \therefore \boxed{x=30 \text{ días}}$$ ***Rpta.***

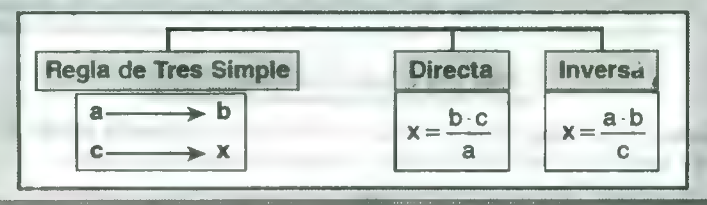
III. Método Práctico:

Regla:

*1) Se examina si la Regla es Directa o Inversa: Si las cantidades proporcionales van de **más a más** o de **menos a menos**, la Regla es Directa; si van de **más a menos** o de **menos a más** la Regla es **Inversa**.*

*2) Si la **Regla es Directa**: Se multiplican los Datos en Aspa y se divide entre el otro dato; este cociente es el valor de la incóngnita.*

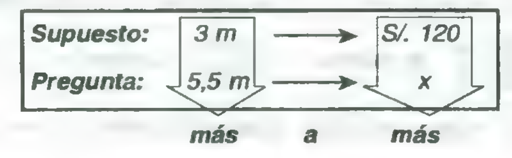
*Si la **Regla es Inversa**: Se multiplican los Datos del Supuesto y se divide entre el otro dato de la pregunta; este cociente es el valor de la incógnita. (Ver cuadro)*



• Regla de Tres Simple Directa:

Ejemplo: Si 3 metros de polystel cuesta S/. 120. ¿Cuánto se pagará por 5,5 metros del mismo polystel?

Resolución:



Razonando: *Si por 3 metros se paga S/. 120 por más metros se pagará más soles (+ a +); la **Regla es directa**.*

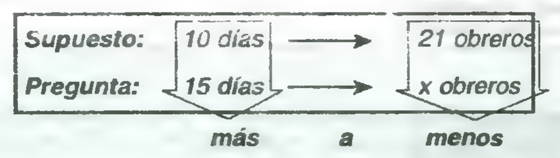
Luego: $x = \frac{S/.\,120 \cdot 5{,}5m}{3m} = S/.\,220$

∴ Por los 5,5 metros del mismo polystel se pagará S/. 220. ***Rpta.***

• Regla de Tres Simple Inversa:

Ejemplo: Si 21 obreros tardan 10 días para hacer una obra. ¿Cuántos obreros se necesitarán para hacer la misma obra en 15 días?

Resolución:



Razonando: *Si en 10 días hacen la obra 21 obreros; para hacerlo en más días se necesitarán menos obreros (+ a -) la **Regla es Inversa.***

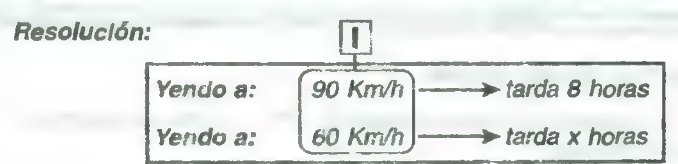
Luego: $x = \dfrac{21\,\text{Obreros} \cdot 10\,\text{días}}{15\,\text{días}} = 14\,\text{Obreros}$

$\therefore$ Para hacer la misma obra en 15 días se necesitarían 14 obreros ***Rpta.***

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1: Un auto tarda 8 horas en recorrer un trayecto yendo a 90 km/h. ¿Cuánto tardará en recorrer el mismo trayecto yendo a 60 km/h?

Resolución:



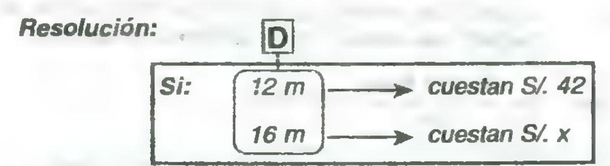
La duración del trayecto es inversamente proporcional a la velocidad, lo que se indica por **I** colocada encima de la columna de las velocidades.

Por tanto: $\dfrac{90}{60} = \dfrac{x}{8}$; **de donde:** $x = \dfrac{90 \cdot 8}{60} = 12\text{ horas} \Rightarrow \therefore \boxed{x = 12\text{ horas}}$

Rpta.

Problema 2: Si 12 metros de cable cuestan 42 soles. ¿Cuánto costarán 16 metros?

Resolución:



El costo es directamente proporcional al número de metros lo que se indica por la letra D encima de la columna metros.

Por tanto: $\dfrac{12}{16} = \dfrac{42}{x}$; **de donde:** $x = \dfrac{42 \cdot 16}{12} = 56\text{ soles} \Rightarrow \therefore \boxed{x = 56\text{ soles}}$

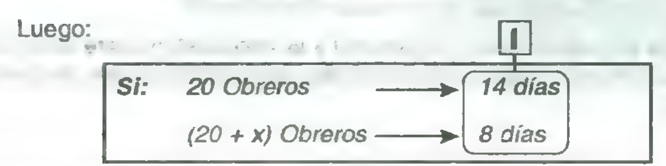
Rpta.

Problema 3: Una obra puede ser hecha por 20 obreros en 14 días. ¿Cuántos obreros hay que añadir para que la obra se termine en 8 días?

Resolución:

Sea: { x = # de obreros que hay que añadir para que la obra se termine en 8 días.

Luego:



El número de obreros es inversamente proporcional al número de días. (Quiere decir a más obreros menos días), lo que se indica por la letra I encima de la columna dias.

Por tanto:

$$\frac{14}{8}=\frac{20+x}{20}\text{ ; } \textbf{de donde: } 20+x=\frac{20\cdot 14}{8} \Rightarrow 20+x=35 \text{ obreros}$$

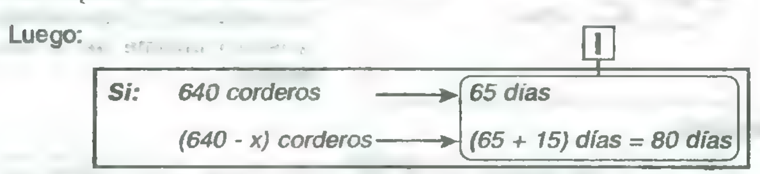
$\therefore$ $\boxed{x = 15 \text{ obreros}}$ ***Rpta.***

Problema 4: Un propietario tiene 640 corderos que puede alimentar durante 65 días. ¿Cuántos corderos debe vender si quiere alimentar su rebaño por 15 días más dando la misma ración?

Resolución:

Sea: { x = # de corderos que debe vender

Luego:



El número de corderos es inversamente proporcional al número de días. (Quiere decir que a menos corderos tendrán alimentos para más días), lo que se indice por la letra I encima de la columna **días**.

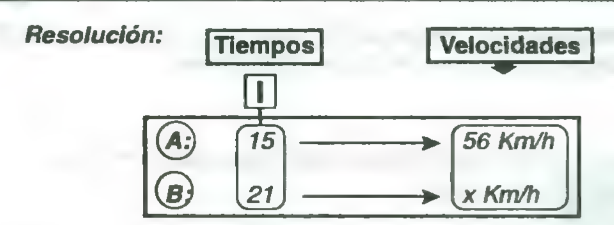
Por tanto:

$$\frac{65}{80}=\frac{640-x}{640}\text{ ; } \textbf{de donde: } 640-x=\frac{640\cdot 65}{80} \Rightarrow 640-x=520 \text{ corderos}$$

$\therefore$ $\boxed{x = 120 \text{ corderos}}$ ***Rpta.***

Problema 5: A y B recorren cierta distancia, y los tiempos que emplean están en la razón 15/21. La velocidad de A es de 56 km/h. ¿Cuál es la velocidad de B?

Resolución:



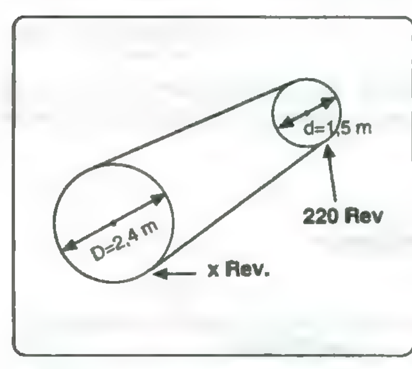
El tiempo es inversmente proporcional a la velocidad. (Quiere decir a mayor velocidad menos tiempo); lo que se indica por la letra **I** encima de la columna tiempos.

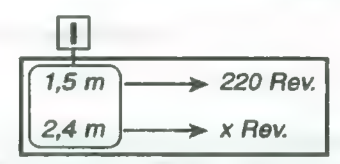
Por tanto:

$$\frac{15}{21} = \frac{x}{56}; \text{ de donde: } x = \frac{15 \cdot 56}{21} = 40 \text{ Km/h} \Rightarrow \boxed{x = 40 \text{ Km/h}} \quad \textit{Rpta.}$$

Problema 6: Dos ruedas cuyos diámetros son 1,5 m. y 2,4 m. están movidas por una correa. Cuando la menor dá 220 revolulciones. ¿Cuántas revoluciones dá la mayor?

Resolución:





- Los diámetros son inversamente proporcionales al número de Revoluciones. (Quiere decir que a menor diámetro la rueda dará más vueltas o revoluciones). Lo que se indica por la letra I encima de la columna metros.

Por tanto:

$$\frac{1{,}5}{2{,}4} = \frac{x}{220}; \text{ de donde: } x = \frac{1{,}5 \cdot 220}{24} = 137{,}5 \text{ Rev} \Rightarrow \boxed{x = 137{,}5 \text{ Rev}} \quad \textit{Rpta.}$$



TALLER DE EJERCICIOS Nº  60

- Resolver los siguientes problemas, aplicando cualquiera de los métodos estudiados.

1. Si 45 cuadernos cuestan S/. 405. ¿Cuánto se pagará por 75 cuadernos?

2. Si por 18 bolsas de detergente se paga S/. 121,50. ¿Cuánto se pagará por 27 bolsas del mismo detergente?

3. 24 obreros hacen una casa en 30 días. El triple de obreros. ¿Qué tiempo tomarán para hacer la misma obra?

4. Un tejedor necesita trabajar 12 horas diarias para hacer los 3/4 de una chompa. ¿Cuánto tiempo empleará para hacer toda la chompa?

5. Un auto a 60 km/h, cubre la distancia de Lima a Piura en 16 horas. ¿A qué velocidad debe recorrer para cubrir dicha distancia en la mitad del tiempo?

6. Un obrero gana S/. 50 por los 5/9 de su labor diaria. ¿Cuánto gana por su labor diaria completa?

7. En un cuartel 200 soldados tienen víveres para 40 días, si se cuadriplicara el número de soldados. ¿Para cuánto tiempo durarían los víveres?

8. Se compra 2,95 metros de casimir inglés por S/. 186. ¿Cuánto se pagará por 4,65 metros del mismo casimir?

9. Dos números están en relación de 18 a 12. Si el menor es 204. ¿Cuál es el mayor?

10. ¿Cuántos soles se necesitan para hacer un giro de 960 dólares, estando el tipo de cambio a S/. 2,16 por dolar?

11. Si 135 obreros construyen 30 metros de pista, 63 obreros. ¿Cuántos metros construirán en igual tiempo?

12. Por dos docenas de botellas de miel de abeja se pagó S/. 276. ¿Cuánto se pagará por 9 botellas menos?

13. Una cuadrilla de trabajadores laborando 9 horas diarias terminan una obra en 21 días, haciéndolos trabajar 2 horas diarias menos. ¿En cuántos días terminarían la misma obra?

14. Para terminar una obra en 9 días se necesitan 32 obreros. ¿En cuántos días terminarán la obra 8 obreros menos?

15. El salario de dos obreros está en relación de 2 a 3. El segundo recibe 840 soles. ¿Cuánto recibe el primero?

16. Un grifo que dá 18 litros por minuto emplea 28 horas para llenar un depósito. ¿Qué tiempo emplearía si su caudal fuera de 42 litros por minuto?

17. Había comprado 12 kg de café por 74,4 soles pero, por error, me envian 4,5 kg menos. ¿Cuánto debo pagar?

18. Las ruedas traseras y delanteras de un tractor tienen de diámetro 1,3m y 1m, respectivamente. Cuando las traseras han dado 259 revoluciones. Cuántas han dado las delanteras?

19. Dos ruedas engranadas tienen, respectivamente, 30 y 20 dientes. ¿Cuántas vueltas dará la segunda al mismo tiempo de dar 200 vueltas la primera?

20. Quería comprar 5 docenas de pares de medias que importaban S/. 780, pero me faltó S/. 91 para el pago. ¿Cuántos pares compre con el dinero que tenía?

21. Si 27 hombres terminan una obra en 16 días. ¿Cuántos hombres menos se necesitarían para terminar la obra en 24 días?

22. Una caja de 3 docenas de naranjas cuestan S/. 27. ¿Cuánto se pagará por 5 cajas de 16 naranjas cada una?

23. Si por cada S/. 100 de venta un comisionista gana S/. 8,50. ¿Cuánto ganará si vende por valor de S/. 3 500?

24. Para recorrer un trayecto un excursionista que camina 4,25 km. por hora ha empleado 6h. ¿Cuánto tiempo habría empleado si hubiera andado 850 metros más por hora?

25. Un motociclista corriendo 12 horas diarias necesitó 3 días para recorrer de Tumbes a Tacna. ¿Cuántos días empleará para cubrir la misma distancia a igual velocidad corriendo solamente 8 horas diarias?

RESPUESTAS TALLER

(1.) S/. 675	(11.) 14 metros	(21.) 9 hombres menos
(2.) S/. 182,25	(12.) S/. 172,50	(22.) S/. 60
(3.) 10 días	(13.) 27 días	(23.) S/. 297,50
(4.) 16 horas diarias	(14.) 12 días	(24.) 5 horas
(5.) 120 km/h	(15.) 560 soles	(25.) 4 días y medio
(6.) 90 soles	(16.) 12 horas	
(7.) 10 días	(17.) 46,5 soles	
(8.) S/. 293,2	(18.) 336,7 vueltas	
(9.) 306	(19.) 300 vueltas	
(10.) S/. 2073,6	(20.) 53 pares	

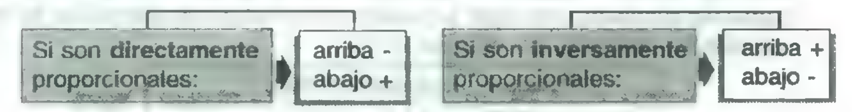
4.3.3. Regla de Tres Compuesta

En la Regla de Tres Compuesta intervienen tres o más pares de cantidades proporcionales, siendo una la cantidad desconocida o incógnita.

Método Práctico

Para resolver los problemas de Regla de Tres, aplicamos el método llamado "La ley de los signos", que no es más que la constante práctica de magnitudes proporcionales y que consiste en lo siguiente:

Se colocan los valores correspondientes a la misma magnitud, uno debajo de otro, a continuación se comparan cada par de magnitudes proporcionales con el par que contiene a la incógnita; para saber si son directa o inversamente proporcionales con la incógnita y:

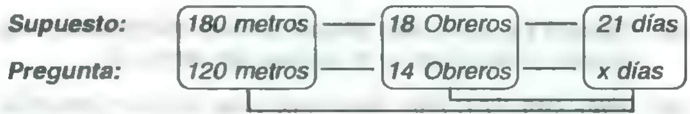


El valor de la incógnita viene dado por un quebrado cuyo numerador es el producto de todas las cantidades afectadas del signo (+) y cuyo denominador es el producto de las cantidades afectadas del signo (-) en todos los problemas sin excepción el valor numérico que es de la misma especie que la incógnita llevará signo (+)

Problema 1: Para pavimentar 180 metros de pista; 18 obreros tardan 21 días. ¿Cuántos días se necesitarán para pavimentar 120 metros de la misma pista con 4 obreros menos?

Resolución:

Escribimos el supuesto y la pregunta; luego hacemos las comparaciones para saber si las reglas de tres simple son directas o inversas.

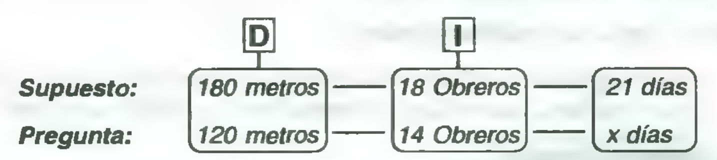


Comparaciones:

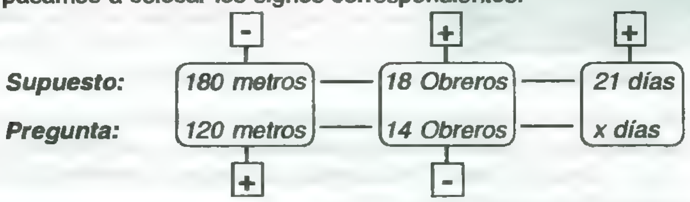
a) ***Metros con días:*** *Para hacer menos metros de pista tardarán menos días, luego la regla es Directa; colocando arriba de la columna de metros la letra D.*

b) ***Obreros con días:*** *Menos obreros tardarán más días; la regla es Inversa; colocando arriba de la columna de obreros la letra I.*

Donde:



• Luego, pasamos a colocar los signos correspondientes:

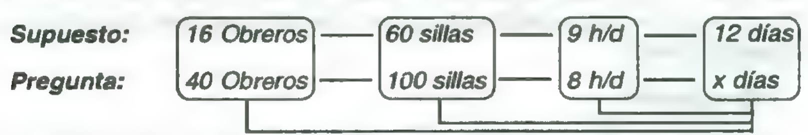


- La incógnita viene dado por un quebrado cuyo numerador es el producto de todas las cantidades del signo (+) y cuyo denominador es el producto de las cantidades afectadas por el signo (-); así:

$$x = \frac{120 \text{ metros} \cdot 18 \text{ obreros} \cdot 21 \text{ días}}{180 \text{ metros} \cdot 14 \text{ obreros}} = 18 \text{ días}$$ ***Rpta.***

Problema 2: Si 16 obreros trabajando 9 horas diarias en 12 días hacen 60 sillas. ¿Cuántos días necesitarán 40 obreros trabajando 1 hora diaria menos para hacer un ciento de las mismas sillas?

Resolución:



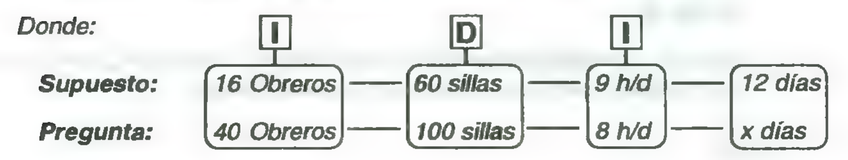
Comparaciones:

a) Obreros con días: *Más obreros tardarán menos días; luego la Regla es Inversa. (Colocamos en la columna de obreros **I**)*

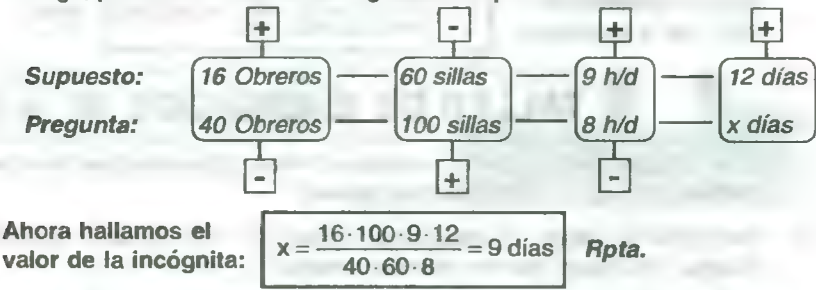
b) Sillas con días: *Para hacer más sillas tardarán más días; la Regla es Directa. (Colocamos en la columna de sillas **D**)*

c) Horas de labor con días: *Trabajando menos horas diarias tardarán más días, la Regla es Inversa. (Colocamos en la columna de h/d **I**)*

Donde:



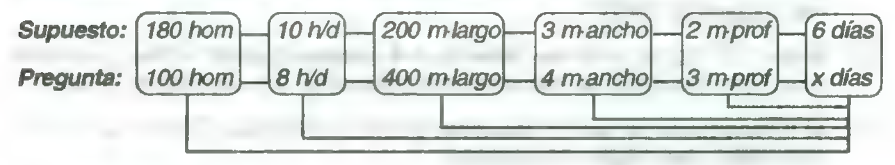
• Luego, pasamos a colocar los signos correspondientes:



Ahora hallamos el valor de la incógnita: $x = \dfrac{16 \cdot 100 \cdot 9 \cdot 12}{40 \cdot 60 \cdot 8} = 9$ días ***Rpta.***

Problema 3: Si 180 hombres en 6 días, trabajando 10 horas cada día, puede hacer un zanja de 200 m. de largo, 3 m. de ancho y 2 m. de profundidad. ¿En cuántos días, de 8 horas, harían 100 hombres una zanja de 400 m. de largo; 4 m de ancho y 3 m. de profundidad?

Resolución:

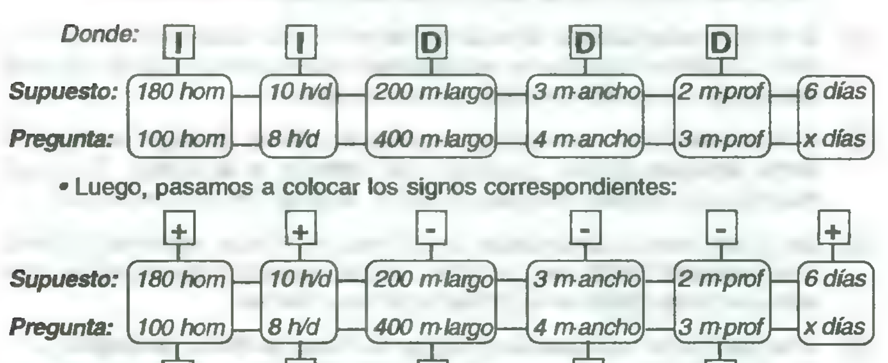


Comparaciones:

a) Hombres con días: *Menos hombres tardarán más días; luego la Regla es Inversa (Colocamos arriba de la columna de hombres I).*

b) Horas de labor con días: *Trabajando menos horas diarias tardarán más días la Regla es Inversa (Colocamos arriba de la columna de h/d I).*

c) Metros con días: *A más metros más días; luego la Regla es Directa (Colocamos arriba de cada columna de metros la letra* ***D****).*



Ahora, hallamos el valor de la incógnita:

$$x=\frac{180\cdot 10\cdot 400\cdot 4\cdot 3\cdot 6}{100\cdot 8\cdot 200\cdot 3\cdot 2}=54 \text{ días}$$ *Rpta.*



TALLER DE EJERCICIOS Nº 61

1. Si 40 carpinteros fabrican 16 puertas en 9 días. ¿Cuántos días tardarían 45 carpinteros para hacer 12 puertas iguales?

2. Por 8 días de trabajo, 12 obreros han cobrado S/. 640. ¿Cuánto ganarán por 16 días, 15 obreros con los mismos jornales?

3. 20 obreros, en 14 días de 8 horas; han realizado un trabajo de 120 m. de largo. ¿Cuántos días de 7 horas emplearán 24 obreros para hacer 90 m. del mismo trabajo?

4. Por trabajar 8 horas diarias durante 20 días un peón ha ganado S/. 120. ¿Cuántas horas diarias habrá trabajado en la misma obra si por 30 días le han pagado S/. 225?

5. Si con 120 Kg de pasto se alimenta a 4 caballos durante 5 días. ¿Cuántos kilogramos de pasto se necesitará para alimentar a 9 caballos en 3 días?

6. Si 8 secretarias tardan 3 horas para digitar 72 páginas. ¿Cuánto tardarán 6 secretarias para digitar 90 páginas?

7. 14 obreros emplearon 28 días para hacer 140 m. de obra. ¿Cuánto hicieron 18 obreros en 35 días?

8. Un excursionista recorre, en 7 días, 140 Km., andando 7 horas diarias. ¿Qué distancia recorrerá en 21 días, a 3 horas diarias?

9. Una cuadrilla de 15 obreros trabajando 6 horas diarias terminan una obra en 38 días. ¿Cuántos días tardarían para hacer la misma obra, 19 obreros trabajando 3 horas diarias más que los anteriores?

10. Si 40 obreros trabajando 10 horas diarias en 15 días construyeron 300 m. de obra. ¿Cuántos obreros se necesitarían para construir 180 m. de obra trabajando 1 hora diaria menos durante 20 días?

11. Si 36 obreros para pavimentar; una pista de 400 m. de largo por 6 m. de ancho demoran 32 días. ¿Cuántos días tardarían si se agrego 12 obreros más para pavimentar otra pista de 300 m. de largo por 8 m. de ancho?

12. Un ciclista cubre la distancia de Lima a Piura en 10 días, corriendo 12 horas a la velocidad de 42 Km. por hora. ¿A qué velocidad deberá correr para cubrir la misma distancia en 8 días de 9 horas diarias?

13. Una cuadrilla de trabajadores construye un canal de 450 m. de longitud, 2 m. de ancho y 1,20 m. de profundidad en 60 días. ¿Cuántos días emplearán

para abrir otro canal de 300 m. de largo, 1,50 m. de ancho y 0,80 m. de profundidad?

14. Un motocilista recorre una distancia a 50 Km. por hora en 8 días de 9 horas diarias de marcha. ¿En cuántos días cubrirá la misma distancia corriendo a 60 Km. por hora y en jornadas de 10 horas diarias de marcha?

15. 2 bombas trabajando 5 horas diarias durante 4 días, consiguen bajar el nivel del agua, en 65 cm. ¿Qué tiempo invertirán 3 bombas análogas para bajar el nivel en 78 cm. funcionando 8 horas diarias?

RESPUESTAS TALLER

(1) 6 días	(6) 5 horas	(11) 24 días
(2) S/. 1 600	(7) 225 m.	(12) 70 Km. por hora
(3) 10 días	(8) 180 Km.	(13) 20 días
(4) 10 horas diarias	(9) 20 días	(14) 6 días
(5) 162 Kg.	(10) 20 obreros	(15) 2 días

4.4. Tanto por Ciento o Porcentaje

POR CIENTO viene de latín **PER CENTUM** que significa por cada cien. Cuando decimos "Nueve por ciento de los estudiantes están ausentes", queremos decir que:

Nueve de cada cien estudiantes están ausentes.

El lenguaje de los porcentajes o por cientos es una forma especial del lenguaje de las razones. El diagrama de abajo sugiere cómo pudo haberse inventado el símbolo %, de por ciento.

9 : 100 ⟶ 9/100 ⟶ 9/00 ⟶ 9 0/0 ⟶ 9%

- Las ganancias o pérdidas, la rebaja o descuento, comisiones, etc. Se expresan siempre en un **Tanto por Ciento,** es decir en un tanto por cada cien (**Per Centum**). De aquí la enorme importancia del estudio de este capítulo por su aplicación en la vida diaria.

Por Ejemplo:

Si un comerciante gana el 35%, significa que gana S/. 35 por cada S/. 100 de su capital. Si en Química fueron desaprobados el 63% de los alumnos de mi salón significa que 63 alumnos fueron desaprobados por cada 100.

TANTO POR CIENTO de un número es el número de unidades que se toman por cada 100.

También se llama Tanto por Ciento a una o varias de las cien partes iguales en que se divide un número, osea: uno o varios centésimos de un número.

Para resolver problemas simples de Tanto por ciento, utilizamos razones:

	ENUNCIADO	RAZON	FRACCIONES centesimas	DECIMAL	PORCENTAJE
A	3 de cada 25 muchachos pertenecen al equipo de Fútbol	3 : 25	$\frac{3}{25} <> \frac{3\cdot 4}{25\cdot 4} = \frac{12}{100}$	0,12	12%
B	Por cada 5 alumnos hay 3 muchachos.	3 : 5	$\frac{3}{5} <> \frac{3\cdot 20}{5\cdot 20} = \frac{60}{100}$	0,60	60%
C	Ahorré S/. 9 por cada S/. 20	9 : 20	$\frac{9}{20} <> \frac{9\cdot 5}{20\cdot 5} = \frac{45}{100}$	0,45	45%
D	Impuesto de S/. 80 sobre un salario de S/. 400	80 : 400	$\frac{80}{400} <> \frac{20}{100}$	0,20	20%

Observaciones:

1) Todo número puede ser expresado como un porcentaje, multiplicando dicho número ×100%

Ejemplo:

a) 1 <> 1 x 100% = 100%

b) 2 <> 2 x 100% = 200%

c) 3 <> 3 x 100% = 300%

d) $\frac{1}{2} <> \frac{1}{2}\times 100\% = 50\%$

e) $\frac{2}{5} <> \frac{2}{5}\times 100\% = 40\%$

2) Sólo se pueden sumar o restar porcentajes de una misma cantidad.

Ejemplos:

a) 30%A + 20%A = 50%A

b) 40%B + 35%B = 75%B

c) 50%M - 25%M = 25%M

d) 60%R - 28%R = 32%R

4.4.1. Elementos que Intervienen en el Tanto por Ciento:

Son la base (b); el tanto (%), el porcentaje (P) y 100 asi en el ejemplo: el 15% de 80 es 12.

* 80 es la base o números (b) cuyo tanto por ciento se busca.
* 15 es el tanto (%) o número de unidades que se toma por cada 100.
* 12 es el porcentaje (P) o parte de la base determinada por el tanto.
* 100 es el número que siempre interviene en estos problemas.

4.4.2. Casos que se Presentan en el Tanto por Ciento

Todos los problemas sobre tanto por ciento se pueden clasificar dentro de los tres casos siguientes:

I. Hallar el Porcentaje de un Número:

1) Hallar el 36% de 275.

Planteo: Si: de 100 es 36
de 275 será x

Luego: $x = \dfrac{36 \cdot 275}{100} = 99$

- **Esta Regla de Tres es siempre Directa**

∴ El 36% de 275 es 99 ***Rpta.***

2) Hallar el 27% de 6 000.

Planteo: Si: de 100 es 27
de 6 000 será x

Luego: $x = \dfrac{27 \cdot 6\,000}{100} = 1\,620$

- **Esta Regla de Tres es siempre Directa**

∴ El 27% de 6 000 es 1 620 ***Rpta.***

Regla Práctica

1) Hallar el 36% de 275.

$$\frac{36}{100} \cdot 275 = \frac{9\,900}{100} = \boxed{99}$$

2) Hallar el 27% de 6 000

$$\frac{27}{100} \cdot 6\,000 = \boxed{1\,620}$$



Recuerda que:

Las palabras "**de**", "**del**", o "**de los**" matematicamente significan multiplicación y la palabra "**es**" significa igualdad.

3) Hallar el 20% del 10% de 23 000

$$\frac{20}{100}\cdot\frac{10}{100}\cdot 23\,000 = 2\cdot 10\cdot 23 = \boxed{460}$$

II. Hallar la Base o Número:

1) ¿De qué cantidad es S/. 330 el 75%?

Planteo: Si el 75% de un número es 330; el 100% osea el número buscado será x.

Si: El 75% es S/. 330

El 100% será x ➧ Luego:

$$x = \frac{S/.\,330\cdot 100\%}{75\%} = S/.\,440$$

∴ **S/. 330 es el 75% de S/. 440** ***Rpta.***

2) ¿Cuál es el importe de una factura cuyo descuento o rebaja del 15% es de S/. 579?

Planteo: El 15% del importe de la factura es S/. 579; luego el 100% osea el valor de la factura será x.

Si: El 15% es S/. 579

El 100% será x ➧ Luego:

$$x = \frac{S/.\,579\cdot 100\%}{15\%} = S/.\,3\,860$$

∴ **S/. 579 es el 15% de S/. 3 860.** ***Rpta.***

* ***El ejercicio:*** ¿De qué cantidad es S/. 330 el 75%?, también se puede enunciar de la siguiente manera;

S/. 330 es el 75% de qué cantidad, que se resuelve así:

$$S/.\,330 = \frac{75}{100}\cdot C \Rightarrow \frac{S/.\,330\cdot \cancel{100}}{\cancel{75}} = C \Rightarrow \frac{S/.\,\cancel{330}\cdot 4}{\cancel{3}} = C$$

$$\therefore \boxed{S/.\,440 = C}$$

III. Hallar el Tanto por Ciento:

1) ¿Qué % de 1 250 es 525?

Planteo: Si: 1 250 es 100%

525 será x % ➧ Luego: $x = \frac{100\cdot 525}{1\,250} = 42\%$

$\therefore$ 525 es el 42% de 1 250. **Rpta.**

2) En un colegio nocturno rindieron examen de Matemática 250 alumnos de cuales 55 fueron desaprobados. Hallar el % de alumnos aprobados.

Resolución:

Fueron aprobados: 250 - 55 = 195 alumnos

Ahora hallamos que % de los 250 examinados es 195 aprobados.

Planteo: Si: 250 es 100%
195 será x %

Luego:

$$x = \frac{100 \cdot 195}{250} = 78\% \text{ aprobados}$$

$\therefore$ De los 250 alumnos que rindieron examen de Matemática el 78% resultaron aprobados. **Rpta.**

Observación:

*Los tres casos de Tanto por Ciento se resuelven por medio de una **Regla de Tres Simple Directa** donde interviene siempre como dato 100.*

El esquema general del planteo es:

Si: de 100 es %
*de **b** es **P***

*Los tres casos de Tanto por Ciento se presentan cuando el elemento desconocido es **P**, **b** ó **%**.*



TALLER DE EJERCICIOS Nº 62



1. Hallar los siguientes porcentajes:

a) 48% de 625	i) 50% de 24
b) 76% de 850	j) 300% de 40
c) 25% de 180	k) 2% del 5% de 26 000
d) 0,75% de 426	l) 0,4% del 25% de 16 000
e) 0,30% de 60	m) 3% del 4% del 8% de 200 000
f) $\frac{2}{5}$% de 650	n) 0,2% del 10% del $\frac{3}{5}$% de 35 000
g) $\frac{4}{9}$% de 27 000	o) $\frac{2}{3}$% del 0,6% del 5% de 2 600
h) 150% de 624	

3. ¿De que número es:

a) 36 el 5%	e) 28 el 25%	i) 11,5 el $\frac{1}{4}$%
b) 4,5 el 2,5%	f) 165 el 20%	j) 55 el $2\frac{3}{4}$%
c) 576 el 12%	g) 7,8 el 10%	k) 104 el $5\frac{1}{5}$%
d) 90 el 4%	h) 612 el $4\frac{1}{2}$%	l) 168 el 5,6%

3. ¿Que % de:

a) 40 es 6	e) 235 es 18,8	i) 517 es 87,89
b) 32 es 25,6	f) 850 es 646	j) 936,5 es 646
c) 85 es 34	g) 2 000 es 80	k) 0,025 es 0,005
d) 600 es 84	h) 280 es 1,68	l) $\frac{2}{5}$ es $\frac{6}{20}$

RESPUESTAS TALLER

1.	a) 300	b) 646	c) 45	d) 3,195
	e) 0,18	f) 2,6	g) 120	h) 936
	i) 12	j) 120	k) 26	l) 16
	m) 19,2	n) 0,042	o) 0,0052	
2.	a) 720	b) 180	c) 4 800	d) 2 250
	e) 112	f) 825	g) 78	h) 13 600
	i) 4 600	j) 2 000	k) 2 000	l) 3 000
3.	a) 15%	b) 80%	c) 40%	d) 14%
	e) 8%	f) 76%	g) 4%	h) 0,6%
	i) 17%	j) 69%	k) 20%	l) 75%



TALLER DE EJERCICIOS Nº 63



1. En una población de 1 800 habitantes, el 9% de los mismos trabaja en una fábrica

a) De cada 100 personas. ¿Cuántas trabajan en la fábrica?
b) ¿Cuántas personas trabajan en la fábrica?
c) ¿Cuántas personas no trabajan en la fábrica?

2. Cuando decimos que 8 es el 16% de 50, queremos decir que la razon de 8 a 50 es igual a la de 16 a 100. Podemos calcular qué por ciento es 8 de 50 resolviendo la proporción: $\frac{8}{50}=\frac{n}{100}$ resuelva cada proporción siguiente:

a) $\frac{12}{50}=\frac{n}{100}$	e) $\frac{8}{25}=\frac{z}{100}$
b) $\frac{4}{50}=\frac{a}{100}$	f) $\frac{16}{20}=\frac{n}{100}$
c) $\frac{p}{100}=\frac{7}{25}$	g) $\frac{3}{5}=\frac{a}{100}$
d) $\frac{x}{100}=\frac{13}{20}$	h) $\frac{3}{4}=\frac{x}{100}$

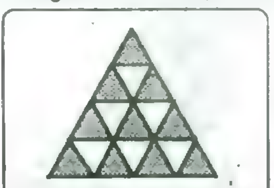
3. Escriba cada enunciado como una proporción.

a) 2 es el 50% de 4 ⇒ ***Rpta:*** $\frac{2}{4}=\frac{50}{100}$

b) 20% de 15 es 3 ⇒ ***Rpta:*** $\frac{3}{15}=\frac{20}{100}$

c) 4 es el 25% de 16	h) 5% de 40 es 2
d) 100 es el 10% de 1 000	i) 15% de 60 es 9
e) 5 es el 1% de 500	j) 250% de 30 es 75
f) 80 es el 40% de 200	k) 30% de 200 es 60
g) 25% de 80 es 20	l) 33% de 300 es 99

• En la figura mostrada; los triángulos pequeños son equiláteros.



a) ¿Qué porcentaje del área total esta sombreado?

b) ¿Qué porcentaje del área total no sombreado?

Resolución:

- # total de Δ pequeños = 16
- # de Δ pequeños (sombreados) = 10
- # de Δ pequeños (no sombreados) = 6

Luego:

a) ¿Qué porcentaje del área total está sombreado?

$$\text{Porcentaje Sombreado} = \frac{\#\ \Delta \text{ sombreados}}{\#\text{ total de } \Delta} \times 100\%$$

$$\therefore \boxed{\text{Porcentaje Sombreado} = \frac{10}{16} \times 100\% = 62{,}5\%}$$

b) ¿Qué porcentaje del área total no está sombreado?

$$\text{Porcentaje Sombreado} = \frac{\#\ \Delta \text{ no sombreados}}{\#\text{ total de } \Delta} \times 100\%$$

$$\therefore \boxed{\text{Porcentaje Sombreado} = \frac{6}{16} \times 100\% = 37{,}5\%}$$

4. En la figura de la derecha

a) ¿Qué tanto por ciento de los cuadrados pequeños esta marcado: con 1; con 2; con 3; con 4?

b) ¿Qué tanto por ciento del total de cuadrados están sombreados?

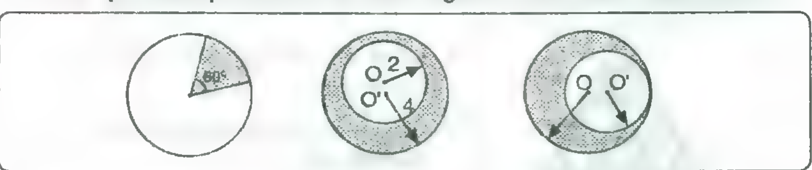
c) ¿Qué tanto por ciento del total de cuadrados están en blanco?

1	1	1	1		
2	2	2	2	2	
3	3	3	3	3	3
3	3				
4	4	4	4	4	4
4	4	4	4		

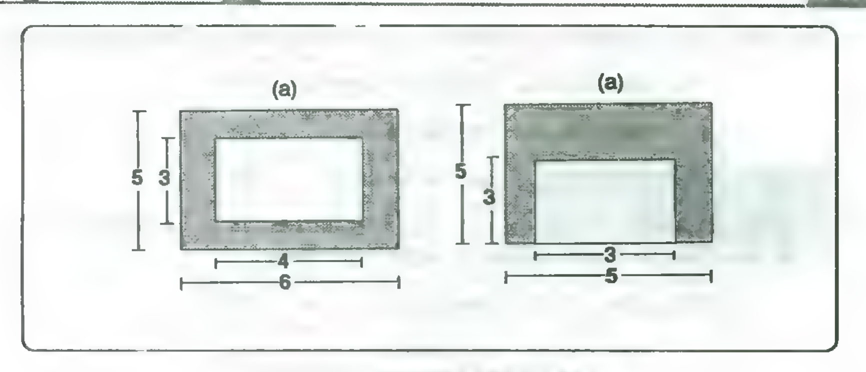
5. ¿Qué tanto por ciento de la barra está sombreado? ¿Y en blanco? ¿Cuál es la suma de estos porcentajes?



6. Estime qué tanto por ciento de cada región circular está sombreada.



7. Estime que tanto por ciento de cada región rectángular esta sombreada.



RESPUESTAS TALLER

1.	a) 9	b) 162	c) 1 638	
2.	a) 24	b) 8	c) 28	d) 65
	e) 32	f) 80	g) 60	h) 75
4.	a) $11\frac{1}{9}\%$, $13\frac{8}{9}\%$; $22\frac{2}{9}\%$, $27\frac{7}{9}\%$			
5.	40%; 60% y 100%			
6.	a) $16\frac{2}{3}\%$	b) 75%	c) 75%	
7.	a) 60%	b) 64%		

4.4.3. Problemas sobre Precios de Compra y Venta

El Tanto por Ciento tiene mucha aplicación en los problemas sobre precios de compra o de venta que se presentan en la vida diaria.

Precio de Compra (Pc): Es el valor en que se adquiere o compra una mercadería.

Precio de Venta (Pv): Es el valor en que se vende una mercadería.

Ganancia (g) o Beneficio: Es la diferencia entre el **Pv - Pc**

Perdida (p): Es la diferencia entre el **Pc - Pv**

> *Las ganancias o pérdida se expresan generalmente en un tanto por ciento sobre el* **Pc**, *salvo indicación expresa.*

Asi, decir que al vender una mercadería se ha ganado el 28% significa que:

Por cada	S/. 100	precio de compra	**(Pc)**
hay	S/. 28	de ganancia	**(g)**
Luego:	S/. 128	precio de venta	**(Pv)**

- De igual manera, si decimos que al vender un artículo se ha perdido el 16% de este dato se descompone en otros 3 que son:

Por cada	S/. 100	precio de compra	**(Pc)**
hay	S/. 16	de pérdida	**(p)**
Luego:	S/. 84	precio de venta	**(Pv)**

Los problemas sobre precios de Compra o de Venta se resuelven aplicando una Regla de Tres Simple Directa.

El supuesto de la Regla de Tres se forma con los Datos que comprende el % de Ganancia o de Pérdida.

Se presentan 3 casos:

I. Hallar el **Pc**.; conociendo el % de ganancia o pérdida.

II. Hallar el **Pv**.; conociendo el % de ganancia o pérdida.

III. Hallar el % de ganancia o pérdida, conociendo el **Pc**. y **Pv**.

I. Hallar el Precio de Compra conociendo el % de Ganancia o Pérdida.

Problema 1: Una casa comercial vende un televisor por S/. 230 ganando el 25% Hallar el precio de compra y la ganancia.

Resolución:

El 25% de ganancia significa que:

(Supuesto)

Pc. = S/. 100 +
g = S/. 25
Pv. = S/. 125

Ahora; planteamos la Regla de Tres Directa

Si: S/. 125 Pv. corresponde a S/. 100 Pc.
S/. 230 Pv. corresponde a "x" Pc.

Donde: $x = \dfrac{S/.\,100\,Pc \cdot S/.\,230\,\not{Pv}}{S/.\,125\,\not{Pv}} = S/.\,184\,Pc$

Luego: g. = Pv - Pc

g = S/. 230 - S/. 184 = S/. 46

∴ El precio de compra es de S/. 184 y la ganancia es de S/. 46. **Rpta.**

Problema 2: Nataly vende su vestido de "15 años" por S/. 840; perdiendo el 39%. Hallar el precio de compra y la pérdida.

Resolución:

El 30% de pérdida significa que:

(Supuesto)

Pc.	=	S/. 100 -
p	=	S/. 30
Pv.	=	S/. 70

Ahora; planteamos la Regla de Tres Directa

Si: S/. 70 Pv. corresponde a S/. 100 Pc.
S/. 840 Pv. corresponde a "x" Pc..

Donde: $x = \frac{S/.\,100\,Pc \cdot S/.\,840\,Pv}{S/.\,70\,Pv} = S/.\,1\,200\,Pc$

Luego: Pérdida = Pc - Pv

Pérdida = S/. 1 200 - S/. 840 = S/. 360

∴ El precio de compra es de S/. 1 200 y la pérdida es de S/. 360. **Rpta.**

II. Hallar el Precio de Venta conociendo el % de Ganancia o Pérdida.

Problema 1: Vanessa ha ganado S/. 2 400 al vender un terreno con el 24% de ganancia. Hallar el precio de venta.

Resolución:

El 24% de ganancia significa que:

(Supuesto)

Pc.	=	S/. 100 +
g	=	S/. 24
Pv.	=	S/. 124

Ahora; planteamos la Regla de Tres Directa

Si: S/. 24 g. corresponde a S/. 124 Pv.
S/. 2 400 g. corresponde a "x" Pv.

Donde: $x = \frac{S/.\,124\,Pv \cdot S/.\,2\,400\,g}{S/.\,24\,g} = S/.\,12\,400\,Pv$

∴ El precio de venta del terreno es de S/. 12 400. **Rpta.**

Problema 2: Perdiendo S/. 92 se ha vendido un televisor con el 23% de pérdida. Hallar el precio de venta y el precio de compra.

Resolución:

El 23% de pérdida significa que:

(Supuesto)

Pc.	=	S/. 100 -
p	=	S/. 23
Pv.	=	S/. 77

Ahora; planteamos la Regla de Tres Directa

Si: S/. 23 p. corresponde a S/. 77 Pv.
S/. 92 p. corresponde a "x" Pv.

Donde: $$x = \frac{S/.\,92\,p \cdot S/.\,77\,Pv}{S/.\,23\,p} = S/.\,308\,Pv$$

Luego: Pc. = Pv. + P

Pc. = S/. 308 + S/. 92 = S/. 400

∴ El precio de venta del televisor es de S/. 308 y el precio de compra es de S/. 400. ***Rpta.***

III. Hallar el % de Ganancia o Pérdida conociendo el Precio de Compra y Precio de Venta:

En este caso, de los Datos deducimos la ganancia o la pérdida y luego se plantea la Regla de Tres Directa; buscando que % del precio de compra es la ganancia o la pérdida.

Problema 1: Sara compra un automóvil por s/. 13 600 y lo vende por s/. 17 000. Hallar el % de ganancia.

Resolución:

Sabemos que: La ganancia = Pv. - Pc.

Ganancia = S/. 17 000 - S/. 13 600 = S/. 3 400

Ahora buscamos que % de S/. 13 600 es S/. 3 400

Por Regla de Tres Directa:

Si: S/. 13 600 es el 100%
S/. 3 400 será el **x%**

$$x = \frac{100\% \cdot S/.\,3\,400}{S/.\,13\,600} = 25\%$$

∴ La ganancia representa el 25% ***Rpta.***

Problema 2: Compré una refrigeradora por S/. 920 y lo vendí por S/. 736. Hallar el % de pérdida.

Resolución:

Sabemos que: **La pérdida = Pc - Pv**

Pérdida = S/. 920 - S/. 736 = S/. 184

Ahora, buscamos que % de S/. 920 es S/. 184

Por Regla de Tres Directa:

Si: S/. 920 es el 100%
S/. 184 será el x%

$$x = \frac{S/.\,184 \cdot 100\%}{S/.\,920} = 20\%$$

∴ La pérdida representa el 20% ***Rpta.***



TALLER DE EJERCICIOS Nº 64



1. Se vende un televisor por S/. 744 ganando el 24%. Hallar el precio de compra y la ganancia.

2. Se ha vendido un juego de escuadras por S/. 30 perdiendo el 40%. Hallar el precio de compra y la pérdida.

3. Se ha vendido un reloj por S/. 91 ganando el 30%. Hallar el precio de compra.

4. Un negociante gana S/. 68 al vender una lavadora con el 34% de ganancia. Hallar el precio de venta y el de compra.

5. Un carnicero ha ganado S/. 12 al vender una pierna de chancho con el 15% de ganancia. Hallar el precio de venta.

6. Manuel compra un radio por S/. 195 y luego lo vende por S/. 210,6. Hallar el % de ganancia.

7. Una libreria compra un Libro de Razonamiento Matemático del autor Manuel Coveñas por S/. 9,5 y lo vende al público por S/. 12,54. Hallar el % de ganancia.

8. Sara compró una cocina "**INRESA**" por S/. 300 y al día siguiente por fuerza mayor lo vende por S/. 240. Hallar el % de porcentaje de pérdida.

9. Un negociante ha perdido S/. 12,96 al vender un pavo enfermo con el 18% de pérdida. Hallar el precio de venta y el de compra.

10. Se ha vendido una **CONGELADORA** por S/. 592,50 perdiendo el 21%. Hallar el precio de compra y la pérdida.

11. Se ha vendido una camioneta por S/. 18 000 ganando el 12 1/2%. Hallar el precio de compra y la ganancia.

12. Franklin vendió su colección de libros por S/. 900 perdiendo el $8\frac{1}{3}$%. Hallar el

precio de compra y la pérdida.

13. Se ha vendido un televisor por S/. 420; perdiendo el 6 2/3%. Hallar el precio de compra y la pérdida.

14. Un comerciante ganó S/. 3 630 al vender su mercadería con el 16 2/3% de ganancia. Hallar el precio de venta y el de compra.

15. Miguel perdió S/. 12 420 al vender su casa con el 12 1/2% de pérdida. Hallar el precio de compra y el de venta.

16. Se vende una lavadora en S/. 608 ganando el 18 3/4%. Hallar el precio de compra y la ganancia.

17. Se compra un juego de "**ATARI**" por S/. 147 y después lo vende por S/. 171,50. ¿Qué % se ha ganado?

18. Se compra un terno por S/. 108 y luego se vende por S/. 88,56. ¿Qué porcentaje se ha perdido?

19. Un comerciante compra un "**MOTO TAXI**" en S/. 2 160 y lo vende por S/. 3 620. Hallar el % de ganancia.

20. Nataly compró una refrigeradora por S/. 936 y lo vendió luego por S/. 543. Hallar el % de pérdida.

RESPUESTAS TALLER

(1.) S/. 600; S/. 144	(11) S/. 16 000; S/. 2 000
(2.) S/. 50; S/. 20	(12) S/. 975; S/. 75
(3.) S/. 70	(13) S/. 428; S/. 28
(4.) S/. 268; S/. 200	(14) S/. 25 410; S/. 21 780
(5.) S/. 143,75	(15) S/. 99 360; S/. 86 940
(6.) 8%	(16) S/. 512; S/. 96
(7.) 32%	(17) 16 2/3%
(8.) 20%	(18) 18%
(9.) S/. 59,04; S/. 72	(19) 68%
(10) S/. 750; S/. 157,50	(20) 42%

4.5. Regla de Interés Simple

La Regla de Interés Simple es una operación que tiene por objeto calcular el interés o rédito que produce un capital prestado a un % y durante un tiempo determinado.

Ejemplo: Se ha prestado un capital de S/. 4 000 al 8% anual, durante 2 años. Esto significa que por cada S/. 100 de capital se gana S/. 8 de interés al año por S/. 1 000 se ganará S/. 80 y por S/. 4 000 se ganará S/. 320 de interés al año, luego en 2 años se ganará: 2×S/. 320 = S/. 640 de interés.

4.5.1. Elementos que Intervienen en la Regla de Interés Simple

Son: **Capital, %, Tiempo e Interés o Rédito (C; %; t; I)**

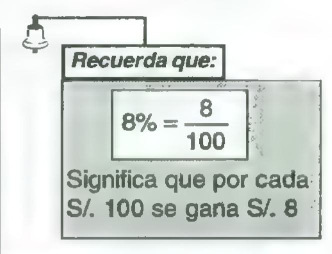
Asi en el ejemplo anterior los elementos son:

S/. 4 000 **Capital** o dinero prestado

8% **Tanto por Ciento** que gana por cada S/. 100 de capital

2 años **Tiempo** (años, meses, días) que dura el préstamo.

S/. 640 **Interés,** rédito o ganancia.



Generalmente el % de interés es anual, pero puede pactarse mensual o semestralmente. En estos casos para aplicar las fórmulas se convierte primero a % anual multiplicando por 12 o por 2 respectivamente.

Interés Simple:
Es cuando el interés o rédito se percibe al final de períodos iguales de tiempo permaneciendo invariable el capital.

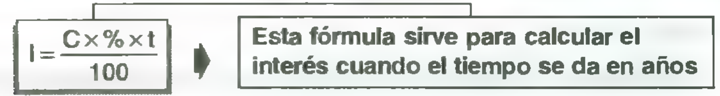
4.5.2. Fórmula para Calcular el Interés Simple:

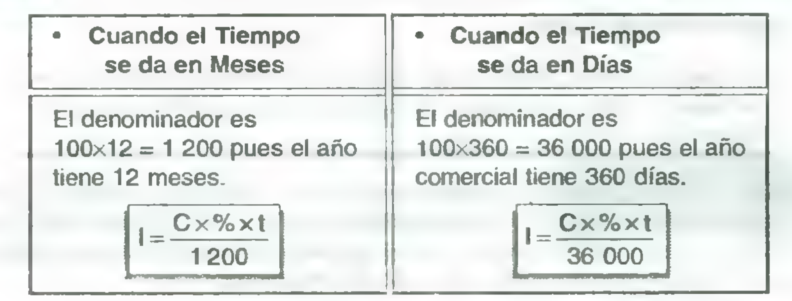
Para obtener la fórmula para calcular el interés "I" producido por un capital **C**, prestado a un **%** anual en **t** años, aplicamos una Regla de Tres Compuesta con dichos elementos del problema:

Si: S/.100 en 1 año gana **%** de interés
S/. **C** en **t** años ganará **I** de interés

Las dos Reglas de Tres Simple son Directas, luego:

El interés es igual al producto del capital por % por tiempo, dividido entre 100.





• Cuando el Tiempo se da en Meses	• Cuando el Tiempo se da en Días
El denominador es $100 \times 12 = 1\,200$ pues el año tiene 12 meses. $$I = \frac{C \times \% \times t}{1\,200}$$	El denominador es $100 \times 360 = 36\,000$ pues el año comercial tiene 360 días. $$I = \frac{C \times \% \times t}{36\,000}$$

CUADRO DE FÓRMULAS DEL INTERÉS SIMPLE

Los otros elementos como el **capital**, **%** y **tiempo**, se calculan también resolviendo una Regla de Tres Compuesta.

Asi se obtienen las siguientes fórmulas:

AÑOS	MESES	DIAS
$I = \frac{C \times \% \times t}{100}$	$I = \frac{C \times \% \times t}{1\,200}$	$I = \frac{C \times \% \times t}{36\,000}$
$C = \frac{100 \times I}{\% \times t}$	$C = \frac{1\,200 \times I}{\% \times t}$	$C = \frac{36\,000 \times I}{\% \times t}$
$\% = \frac{100 \times I}{C \times t}$	$\% = \frac{1\,200 \times I}{C \times t}$	$\% = \frac{36\,000 \times I}{C \times t}$
$t = \frac{100 \times I}{C \times \%}$	$t = \frac{1\,200 \times I}{C \times \%}$	$t = \frac{36\,000 \times I}{C \times \%}$

PROBLEMAS RESUELTOS

Calcular el Interés:

Problema 1: Hallar el interés que produce un capital de S/. 4 600 prestado al 9% anual, durante 4 años.

Resolución:

Reemplazamos los datos en la fórmula para calcular el interés en años.

Datos:

C = S/. 4 600
% = 9
t = 4 años
I = ?

Fórmula: $I = \dfrac{C \times \% \times t}{100}$

Donde: $I = \dfrac{S/.\ 4\ 600 \cdot 9 \cdot 4}{100} = S/.\ 1\ 656$

∴ El interés es de S/. 1 656. ***Rpta.***

Problema 2: Hallar el interés producido por S/. 4 800 colocado al 12 3/4% durante 1 año; 2 meses y 20 días.

Resolución:

Reemplazamos en la fórmula para calcular el interés cuando el tiempo está dado en días.

Datos:

C = S/. 4 800
% = 12 3/4 = 12,75
t = $\underbrace{1 \text{ año}}_{360\,d}$, $\underbrace{2 \text{ m.}}_{60\,d}$ y 20 d = 440 días
I = ?

Fórmula: $I = \dfrac{C \times \% \times t}{36\ 000}$

Donde: $I = \dfrac{S/.\ 4\ 800 \cdot 12{,}75 \cdot 440}{36\ 000} = S/.\ 748$

∴ El interés es de S/. 748 ***Rpta.***

Calcular el Capital:

Problema 3: Hallar el capital que prestado al 0,5% mensual durante 2 años ha producido un interés de S/. 840.

Resolución:

- Convertimos el % mensual en anual; como el año tiene 12 meses, multiplicamos 12 por el interés mensual que es 0,5% obteniendo:

Interés anual = 0,5%×12 = 6%

Datos:

% = 6
t = 2 años
I = S/. 840
C = ?

Aplicando la Fórmula: $C = \dfrac{100 \times I}{\% \times t}$

Obtenemos: $C = \dfrac{100 \times S/.\ 840}{6 \times 2} = S/.\ 7\ 000$

∴ El interés es de S/. 7 000 **Rpta.**

Problema 4: ¿Cuál es el capital que colocado al 4% durante 72 días ha producido 126,40 soles de interés?

Resolución:

Datos:

% = 4
t = 72 días
I = S/. 126,40
C = ?

Aplicando la Fórmula: $C = \dfrac{36\ 000 \times I}{\% \times t}$

Obtenemos: $C = \dfrac{36\ 000 \times S/.126{,}40}{4 \times 72} = S/.15\ 800$

∴ El capital es de S/. 15 800. **Rpta.**

Calcular el %

Problema 5: ¿A qué % anual se prestó un capital de S/. 1 700 que en 1 año y 3 meses ha producido S/. 255 de interés?

Resolución:

(*) 1 año y 3 meses = 1 año y $\dfrac{1}{4}$ año = $\dfrac{5}{4}$ años

Datos:

C = S/. 1 700
t = $\dfrac{5}{4}$ años
I = S/. 255
% = ?

Aplicando la Fórmula: $\% = \dfrac{100 \times I}{C \times t}$

Obtenemos: $\% = \dfrac{100 \times S/.\ 255}{S/.\ 1\ 700 \times \frac{5}{4}} = 12$

∴ El tanto por ciento es de 12. **Rpta.**

Nota:

En este problema también se ha podido convertir el tiempo a meses y aplicar la fórmula: $\% = \dfrac{1\ 200 \times I}{C \times t}$ *veamos:*

Reemplazando valores en la fórmula mencionada, obtenemos:

Datos:

C = S/. 1 700
t = 1 año y 3 m = 15 m ($\underbrace{1 \text{ año}}_{12\,m}$)
I = S/. 255
% = ?

Obtenemos: $\% = \dfrac{1\,200 \times S/.\,255}{S/.\,1\,700 \times 15} = 12$

∴ Como se observará el resultado es el mismo.

Problema 6: ¿A qué tanto por ciento hay que colocar S/. 2 400 para obtener S/. 144 de interés en 16 meses?

Resolución:

Datos:

C = S/. 2 400
t = 16 meses
I = S/. 144
% = ?

Aplicando la Fórmula: $\% = \dfrac{1\,200 \times I}{C \times t}$

Obtenemos: $\% = \dfrac{1\,200 \times S/.\,144}{S/.\,2\,400 \times 16} = 4{,}5$

∴ El tanto por ciento es de 4,5. ***Rpta.***

Calcular el Tiempo:

Problema 7: Hallar el tiempo que estuvo prestado S/. 1 680 que al 5% ha producido S/. 21 de interés.

Resolución:

Datos:

C = S/. 1 680
% = 5
I = S/. 21
t = ?

Aplicamos la Fórmula del tiempo en años; osea: $t = \dfrac{100 \times I}{C \times \%}$

Obteniendo: $t = \dfrac{100 \times S/.\,21}{S/.\,1\,680 \times 5} = \dfrac{1}{4} \text{ año} = \dfrac{1}{4}(12 \text{ meses})$

∴ t = 3 meses ***Rpta.***

Nota:

También se puede aplicar la fórmula del tiempo en meses osea:

$$t = \frac{1\,200 \times I}{C \times \%}$$

$$t = \frac{1\,200 \times S/.\,21}{1\,680 \times 5} = 3 \text{ meses}$$



- Como se observará el resultado es el mismo.

Problema 8: ¿Durante cuánto tiempo hay que colocar S/. 950 al 8,25% para obtener S/. 313,50 de interés?

Resolución:

Datos:

C = S/. 950
% = 8,25
I = S/. 313,50
t = ?

Aplicamos la Fórmula del tiempo en años; osea:

$$t = \frac{100 \times I}{C \times \%}$$

Obteniendo:

$$t = \frac{100 \times S/.\,313{,}50}{S/.\,950 \times 8{,}25} = 4 \text{ años}$$



$\therefore$ t = 4 años ***Rpta.***



TALLER DE EJERCICIOS Nº 65



1. Calcular el interés de S/. 2 400 al 5% durante:

a) 2 años b) 3 meses c) 36 días

2. Calcula el interés de S/. 5 000 al 4% durante:

a) 4 años b) 9 meses c) 45 días

3. Calcula el interés de S/. 12 000 al 6% durante:

a) 3 años b) 10 meses c) 40 días

4. Halla el interés que producen; S/. 2 550 colocados al 4% durante 43 años y 3 meses.

5. Halle el interés que produce, S/. 6 450 al 4,5% durante 9 meses y 10 días.

6. Halle el interés que producen; S/. 13 880 colocados al 6% durante 2 años; 3 meses y 15 días.

7. Halle el interés que producen; S/. 3 120 colocados al 4%, del 8 de Agosto al 22 de setiembre.

8. Halle el interés que producen; S/. 87 600 colocados al 6%, del 10 de Octubre al 12 de Noviembre.

9. ¿Qué interés produce S/. 3 000 al 4,8% desde 5 de Agosto hasta el 25 de Diciembre?

10. ¿Es más ventajoso colocar S/. 150 000 al 35% o comprar con dicha cantidad un auto para alquilarlo en S/. 7 000 anuales?

Calcula el capital sabiendo que su interés:

11. Al 3% durante 4 años es: a) S/. 240 b) S/. 288 c) S/. 2 520

12. Al 5% durante 6 meses es: a) S/. 45 b) S/. 165 c) S/. 67

13. Al 6% durante 72 días es: a) 30 b) S/. 63 c) S/. 129

14. Halla el capital que prestado al 4% durante 2 años y 6 meses, produce un interes de S/. 1 245.

15. Halla el capital que prestado al 6% durante 1 año, 3 meses y 10 días produce un interés de S/. 602,60.

16. Halla el capital que prestado al 3,5% desde el 2 de Enero al 13 de Febrero produce un interés de S/. 343.

17. ¿A qué tanto por ciento hay que colocar S/. 4 800 para obtener S/. 300 de interés durante 1 año 3 meses?

18. ¿A qué tanto por ciento hay que colocar S/. 3 000 para obtener S/. 33,75 de interés en 90 días?

19. ¿A qué tanto por ciento hay que colocar S/. 18 400 para obtener S/. 1 771 de interés después de 2 años y 9 meses?

20. ¿A qué tanto por ciento hay que colocar S/. 25 500 para obtener S/. 2 465 de interés después de 1 año, 7 meses y 10 días?

21. ¿Durante cuánto tiempo hay que colocar S/. 4 800 al 5% para obtener S/. 236 de interés?

Durante que tiempo hay que colocar:

22. S/. 5 000 al 6% para obtener un interés de:

a) 600 soles b) 100 soles c) 45 soles

23. S/. 4 000 al 5% para obtener un interés de:

a) 800 soles b) 150 soles c) 95 soles

24. S/. 2 000 al 4,5% para obtener un interés de:

a) 270 soles b) 60 soles c) 83 soles

25. Hallar el tiempo en que estuvo colocado un capital de S/. 950 que al $8\frac{1}{4}\%$ produjo interés por S/. 313,50.

RESPUESTAS TALLER

1. a) S/. 240 b) S/. 30 c) S/. 12	10.	18. 4,5%
2. a) S/. 800 b) S/. 150 c) S/. 25	11. a) S/. 2 000 b) S/. 2 400 c) S/. 21 000	19. 3,5%
3. a) S/. 2 160 b) S/. 600 c) S/. 80	12. a) S/. 1 800 b) S/. 6 600 c) S/. 2 680	20. 6%
4. S/. 433,5	13. a) S/. 2 500 b) S/. 5 260 c) S/. 10 750	21. 11 meses 24 días
5. S/. 255,75	14. S/. 12 450	22. a) 2 años b) 4 meses c) 1 mes 24 días
6. S/. 1 908,5	15. S/. 7 860	23. a) 4 años b) 9 meses c) 5 meses 21 días
7. S/. 16,99	16. S/. 82 046,5	24. a) 3 años b) 8 meses c) 11 meses 2 días
8. S/. 496,4	17. 5%	25. 4 años
9. S/. 40		

4.6. Descuentos Simples: Descuentos Comercial o Bancario.

4.6.1. Descuento Comercial:

En las operaciones bancarias, el descuento es el pago anticipado que hacen los bancos de los valores o descuentos de crédito (Letra de Cambio), a cambio del endoso de éste a su favor.

La operación del descuento permite hacer pagos utilizando letras, en reemplazo de dinero efectivo, y permite también recobrar los capitales invertidos manteniéndolos en constante movimiento y productividad.

Ejemplo: Jaime Vásquez compra de Felipe Monzón un televisor pagando S/. 500 de cuota inicial y por el saldo acepta una letra de cambio por S/. 4 000 para pagar después de 90 días. Felipe Monzón no puede cobrar la letra hasta la fecha de su vencimiento, pero necesitando dinero efectivo vende dicho documento al Banco de Crédito, que le anticipa el pago con una cantidad inferior a S/. 4 000. Esta diferencia entre la cantidad señalada en la letra (**valor nominal**) y la cantidad pagada por el Banco (**Valor actual o efectivo**) se llama **Descuento**.

Descuento:

Es la cantidad que se rebaja de una suma de dinero expresada en una letra por cobrarlo ante de su vencimiento. El descuento viene a ser el interés que producirá el valor nominal de la letra durante el tiempo que falta para su vencimiento.

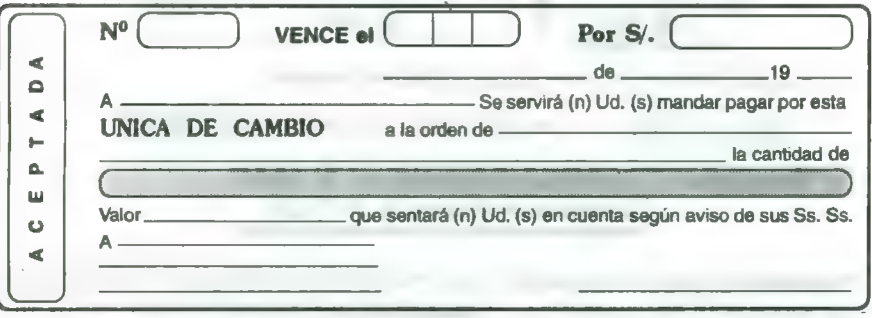
4.6.2. Letra de Cambio:

Es un documento legal de crédito por el cual una persona manda a otra pagar una cantidad de dinero a favor de una tercera persona en la fecha y lugar señalados.

- Personas que intervienen:

1. **Girador o Librador:** persona que manda pagar (Felipe Monzón)
2. **Aceptante o Pagador:** Persona que paga la letra; deudor (Jaime Vásquez).
3. **Tenedor o Portador:** Persona o Banco encargado de cobrar (el mismo Felipe Monzón o un Banco).

El Girador puede ser a la vez el tenedor de la letra, en cuyo caso intervienen solamente dos personas.


ACEPTADA

Nº ____ VENCE el ____ Por S/. ____

______ de ______ 19 ____

A ______ Se servirá (n) Ud. (s) mandar pagar por esta

UNICA DE CAMBIO a la orden de ______

______ la cantidad de

Valor ______ que sentará (n) Ud. (s) en cuenta según aviso de sus Ss. Ss.

A ______

- **Descuento Comercial o Bancario:** Es el interés cobrado sobre el valor nominal de la letra desde el día en que se negocia o descuenta hasta la fecha de su vencimiento.

4.6.3. Cálculo del Descuento Comercial:

Para calcular el descuento comercial se aplican las mismas fórmulas del interés sustituyendo el Interés "I" por el Descuento "D" y Capital "C" por el valor nominal "Vn".

Asi las fórmulas para calcular el descuento en años, meses y días son:

$$D=\frac{Vn\times\%\times t}{100} \qquad D=\frac{Vn\times\%\times t}{1\,200} \qquad D=\frac{Vn\times\%\times t}{36\,000}$$

- **Valor Nominal (Vn):** Es la cantidad escrita en la letra o pagaré.
- **Valor Actual (Va):** O valor efectivo es el valor del documento el día que se negocia o descuenta.

El descuento es igual al valor nominal menos el valor actual.

El valor actual es igual al valor nominal menos el descuento.

$$D = Vn - Va \quad \text{y} \quad Va = Vn - D$$

PROBLEMAS RESUELTOS

- **Calcular el Descuento:**

Problema 1: Hallar el descuento comercial y valor efectivo de una letra por S/. 2 560, descontada 45 días antes de su vencimiento, al 9% anual.

Resolución:

Aplicando la fórmula para el descuento en días, se tiene:

$$D = \frac{Vn \times \% \times t}{36\,000} \Rightarrow D = \frac{S/.\,2\,560 \times 9 \times 45}{36\,000} = S/.\,28{,}80$$

Luego, hallamos el valor actual o efectivo, veamos:

$$Va = Vn - D \Rightarrow Va = S/.\,2\,560 - S/.\,28{,}80 = S/.\,2\,531{,}20$$

Respuesta: El descuento comercial es: S/. 28,80 y el valor efectivo es: S/. 2 531,20.

Problema 2: Hallar el descuento y valor actual de una letra por S/. 4 200 al 9,5% que vence el 16 de noviembre y es descontada el 5 de setiembre del mismo año.

Resolución:

Hallamos los días que faltan para el vencimiento de la letra desde el 5 de setiembre al 16 de noviembre.

En:		
	Setiembre	25 días
	Octubre	31 días
	Noviembre	16 días
	Total:	**72 días**

Ahora reemplazamos los datos en la fórmula del descuento en días.

$$D = \frac{Vn \times \% \times t}{36\ 000} \Rightarrow D = \frac{S/.\ 4\ 200 \times 9{,}5 \times 72}{36\ 000} = S/.\ 79{,}80$$

Luego calculamos el valor actual o efectivo, veamos:

$$Va = Vn - D \Rightarrow Va = S/.\ 4\ 200 - S/.\ 79{,}80 = S/.\ 4\ 120{,}20$$

Respuesta: El descuento es de: S/. 79,80
y el valor actual es de: S/. 4 120,20.

• **Calcular el Valor Nominal:**

Problema 3: Hallar el valor nominal y actual de una letra descontada en S/. 85,80, al 12 %, faltando 3 meses para su vencimiento.

Resolución:

Aplicando la fórmula de Vn en meses, se tiene:

$$Vn = \frac{1\ 200 \times D}{\% \times t}$$



$$Vn = \frac{1\ 200 \times S/.\ 85{,}80}{12 \times 3} = S/.\ 2\ 860$$

Luego, hallamos el valor actual o efectivo, veamos:

$$Va = Vn - D \Rightarrow Va = S/.\ 2\ 860 - S/.\ 85{,}80 = S/.\ 2\ 774{,}20$$

Respuesta: El valor nominal es de : S/. 2 860
y el valor actual es de: S/. 2 774,20.

• **Calcular el Tiempo:**

Problema 4: Hallar el tiempo que faltaba para el vencimiento de una letra por S/. 9 600 que descontada al 9% dio un valor efectivo de S/. 9 480.

Resolución:

• En primer lugar, hallamos el descuento:

$$D = Vn - Va \Rightarrow D = S/.\ 9\ 600 - S/.\ 9\ 480 = S/.\ 120$$

• En segundo lugar, hallamos el tiempo, aplicando la fórmula del tiempo en días.

$$t = \frac{36\ 000 \times D}{Vn \times \%} \Rightarrow t = \frac{36\ 000 \times S/.\ 120}{S/.\ 9\ 600 \times 9} = 50 \text{ días}$$

Respuesta: El tiempo es de: 50 días



TALLER DE EJERCICIOS Nº 66



- Hallar el descuento comercial y el valor actual de las siguientes letras de cambio (las fechas son del mismo año).

	Vn	Fecha del Descuento	Vencimiento	% del descuento
1.	S/. 1 860	15 de Enero	28 de Febrero	14%
2.	S/. 7 236	10 de Abril	9 de Julio	6,25%
3.	S/. 4 824	14 de Junio	28 de Agosto	8,5%
4.	s/. 9 600	4 de Octubre	18 de Diciembre	12,75%

5. Hallar el valor nominal y actual de una letra descontada al 9% en S/. 376,20 faltando 4 meses para su vencimiento.

6. Hallar el valor nominal y actual de una letra descontada el 7 de mayo al 3,75% en S/. 28,12 y que vence el 6 de julio del mismo año.

7. Por una letra de S/. 9 000 descontada al 8% recibi solamente S/. 8 730. ¿Cuántos días faltaba para su vencimiento?

8. Por una letra de S/. 2 147,60 descontada al 3% recibi un valor efectivo de S/. 2 136,86. ¿Cuántos días faltaban para su vencimiento?

9. Por una letra de S/. 8 400 que vence dentro de 3 meses he recibido un valor efectivo de S/. 8 295. ¿A qué % fué descontada la letra?

10. Una letra por S/. 3 600 que vence el 4 de Julio fue descontada el 27 de marzo del mismo año, recibiéndose un valor efectivo de S/. 3520,80. ¿A que % se realizó el descuento?

RESPUESTAS TALLER

	1.	2.	3.	4.
D :	S/. 31,82	S/. 75,37	S/. 85,42	S/. 254
Va :	S/. 1 828,18	S/. 9 560,63	S/. 4 738,58	S/. 9 346

5. Vn = S/. 12 500; Va = S/. 12 123,80
6. Vn = S/. 4 500; Va = S/. 4 471,88
7. 135 días
8. 60 días
9. 5%
10. 8%



Conceptos Geométricos Básicos y el Plano Cartesiano

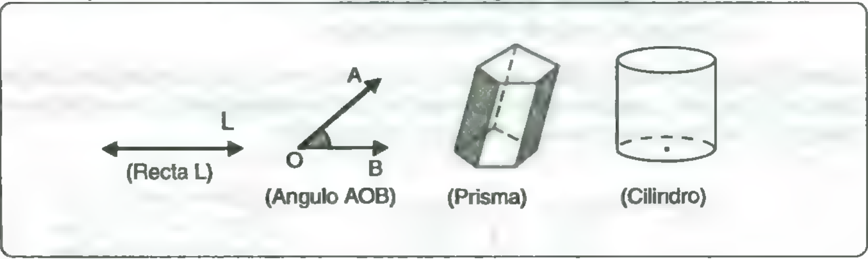
Objetivo: *Conocer y utilizar los conceptos básicos y fundamentales de la Geometria Elemental plana encuadrados en su presentación formal para aplicarlos con rigurosidad en la solución de problemas, con una introducción a la geometria del Plano Cartesiano.*

5.1. LA GEOMETRIA: Es una parte de la Matemática que estudia las propiedades de las figuras y de los cuerpos, prescindiendo de su tamaño, de su posición y de la materia que los constituye; estudia también la medida de las superficies y de los volúmenes. Es con la aritmética, una de las primeras ciencias que ha estudiado el hombre.

En efecto; desde los comienzos de la civilización, los objetos que rodearon al hombre, los hechos que acompañaron su vida, fueron formando en él, el concepto de rectas y de curvas; de figuras planas y de cuerpos; de formas y de volúmenes diferentes.

Asi, la observación de un rayo de luz que pasa a través de un pequeño hueco entre las hojas de un árbol, le dio la idea de línea recta; el borde de algunas, hojas, las márgenes de un rio, la idea de curva. Los granos de uva, los ojos de los animales, la idea de esfera, los troncos de algunas palmeras, la idea de cilindro; las piedras y las montañas, idea de las formas más diversas.

5.1.1 Figura Geométrica: Es cualquier conjunto de puntos. Una Recta, un ángulo, un prisma, un cilindro;...etc. Son **figuras geométricas**.



5.1.2. Geometría Plana.- Estudia las figuras consideradas en un plano.

5.1.3. Geometría del Espacio.- Estudia las figuras cuyos puntos no están en un solo plano.

5.2 ELEMENTOS DE GEOMETRÍA

5.2.1 Conceptos Geométricos Fundamentales.

Cuando una idea es tan sencilla que no hay posibilidad de definirla o explicarla se dice que es un concepto "primitivo" ó que es un concepto "fundamental".

En este capítulo vamos a considerar cuatro conceptos primitivos que son: **Punto, Recta, Plano y Espacio.**

Punto: La idea de un punto es fundamental y por eso no se define en vez de definirla podemos poner ejemplos que nos den idea del punto, tales son:

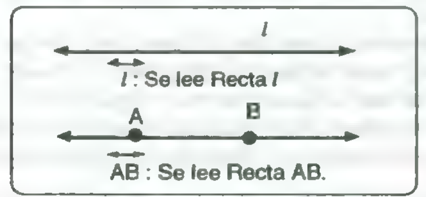
- La marca dejada en el papel por la punta aguda de un lápiz.
- Un grano de arena, La punta de un alfiler, Un punto Ortográfico, etc.

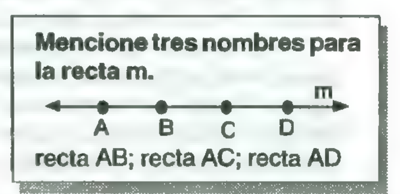
Al punto como ente matemático lo consideramos carente de Dimensiones.

El punto se representa por una marquita redonda (•) ó por una Aspa (x) y se Nombra o Designa por una letra Mayúscula tal como:



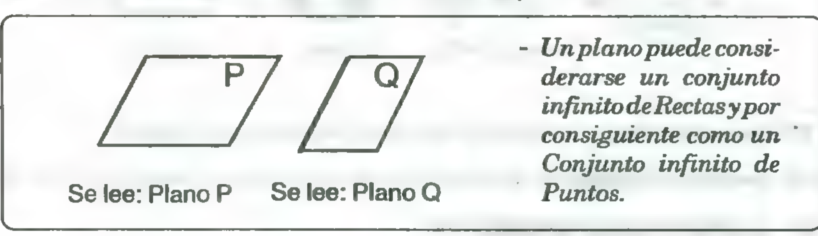
Recta: Nos da la idea de recta el borde de la pizarra o de la mesa, un hilo tirante, etc. Una recta se nombra o designa generalmente con una letra minúscula tal como "l" o con dos letras mayúsculas que corresponden a dos de sus puntos tal como: A y B y se denota por $\overleftrightarrow{AB}$ que se lee recta AB





- Una recta no tiene principio ni fin.
- La recta es ilimitada en sus dos sentidos
- La recta es un conjunto infinito de puntos

Plano: Nos da la idea de Plano la superficie de una mesa, las paredes del aula, su piso, el techo, etc. Los planos se representan por paralelogramos y se nombran o designan con letras mayúsculas. Así: Los planos P y Q.



Espacio:

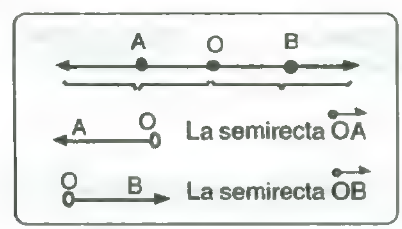
La idea de espacio es también primitiva no la vamos a definir. El espacio se extiende indefinidamente, cada lugar del espacio es un "punto". El conjunto de todos los puntos imaginables llena el espacio en su totalidad.

O sea: espacio = {puntos}

Por lo tanto todas las figuras de la geometría están en el espacio.

Semirecta y Rayo:

Sea una recta cualquiera $\overleftrightarrow{AB}$ y sobre ella tomamos un punto "O" entre A y B (Ver figura)



- Este Punto "O" divide a la recta en dos Subconjuntos de Puntos. Cada subconjunto es una semirecta de Origen "O".

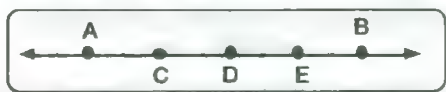
Una semirecta no contiene al origen. La cabeza de flecha nos dice el sentido de cada semirecta.

Rayo:

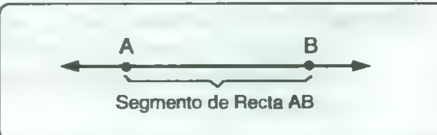
Llamaremos rayo a la figura formada por una semirecta y su punto de origen.



Segmento de una Recta: Dada una recta AB



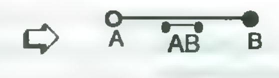
Ahora observemos que entre A y B hay un punto C. Entre C y B habrá otro punto D; entre D y B otro punto E y así sucesivamente. Por lo tanto entre A y B habrán muchísimos puntos que no podemos decir cuántos. Pero si podemos afirmar que entre A y B hay un conjunto de puntos, a este conjunto de puntos que hay entre A y B le llamaremos "segmento de recta".



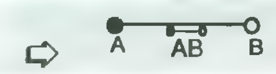
Notación: *Se denota así: $\overline{AB}$; se lee: segmento de recta AB, donde los puntos A y B se llaman extremos del segmento.*

Segmentos Abiertos y Cerrados

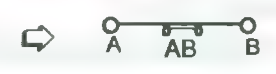
a) Un segmento $\overset{\circ\!-\!\bullet}{AB}$ es abierto por la izquierda y cerrado por la derecha cuando no contiene al extremo A, pero si contiene al extremo B. ⇨



b) Un segmento $\overset{\bullet\!-\!\circ}{AB}$ es abierto por la derecha y cerrado por la izquierda cuando no contiene al extremo B, pero si contiene al extremo A. ⇨



c) Un segmento $\overset{\circ\!-\!\circ}{AB}$ es abierto por la izquierda y por la derecha, cuando no contiene a los extremos A y B. ⇨

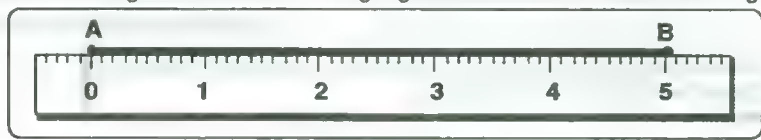


d) Un segmento $\overset{\bullet\!-\!\bullet}{AB}$ es cerrado por la izquierda y por la derecha, cuando contiene a los extremos A y B. ⇨



Medida de un Segmento

Para medir un segmento se usa una regla graduada como se indica en la figura.



Para medir un segmento se procede como sigue:

- Colocar la división cero (0) de la regla exactamente en el extremo A del segmento.
- Leer la longitud o medida del segmento, según el número de la regla que coincide con el extremo B.
- La medida de $\overline{AB}$ en la figura, es 5 cm. y se escribe:

$$m(\overline{AB}) = 5cm.$$

- Por facilidad escribiremos simplemente AB para indicar la longitud del segmento AB, Esto es:

$$AB = 5 \text{ cm.}$$

> ***Observación:*** *Tengamos en cuenta que el segmento es una figura geométrica o conjunto de puntos, en cambio la longitud o medida del segmento es la cantidad que indica la distancia entre los extremos de dicho segmento.*
>
> *Al segmento de extremos A y B se le denota por $\overline{AB}$ y a su longitud por AB.*

Segmentos Congruentes:

Dos segmentos son congruentes cuando tienen la misma longitud. $\overline{AB}$ es congruente con $\overline{CD}$ si: AB = CD

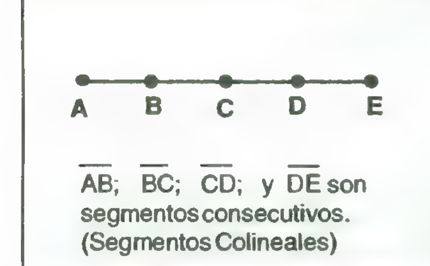


Representación Simbólica

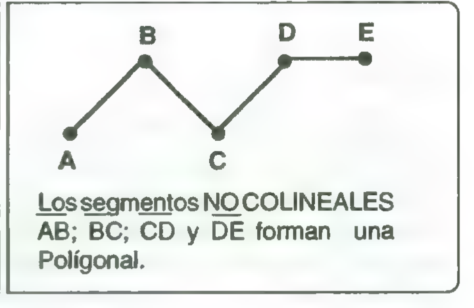
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$

Segmentos Consecutivos:

Dos o más segmentos se llaman **consecutivos**, si cada uno tiene con el siguiente un **extremo común**. Si los segmentos consecutivos están contenidos en una misma recta, se llaman **segmentos colineales** y si no están contenidos en una misma recta, se llama **poligonal**.



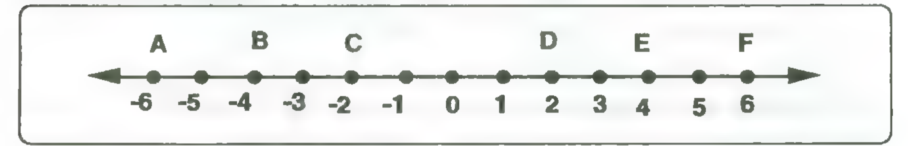
$\overline{AB}$; $\overline{BC}$; $\overline{CD}$; y $\overline{DE}$ son segmentos consecutivos. (Segmentos Colineales)



Los segmentos NO COLINEALES AB; BC; CD y DE forman una Polígonal.

Distancia entre Dos Puntos:

Observemos la recta numérica de la figura mostrada:



En está recta el número asignado a cada parte se llama **coordenada.**

Así tenemos que: A (-6); B (-4), C (-2); D (2); E (4) y F (6)

Postulado de la Distancia:

A cada par de puntos diferentes de una recta le corresponde un número positivo único.

La distancia entre dos puntos de una recta es el valor absoluto de la diferencia de las coordenadas de dichos puntos.

Ejemplo 1: Halla la distancia que existe entre los puntos A y C de la figura anterior.

Resolución:

$AC = |(-2) - (-6)| = |-2 + 6| = |4| = 4$ ó también
$CA = |(-6) - (-2)| = |-6 + 2| = |-4| = 4$

Como se observará la distancia entre dos puntos de una recta no depende del sentido; por tal razón: AC = CA.

Ejemplo 2: Halla la distancia que existe entre los puntos B y E de la figura anterior.

Resolución:

$EB = |(-4) - (4)| = |-4 - 4| = |-8| = 8$ o también
$BE = |4 - (-4)| = |4 + 4| = |8| = 8$

$\therefore$ $\boxed{BE = EB = 8}$

Longitud:

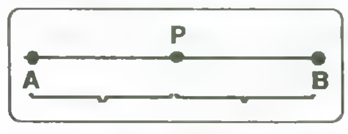
Consideremos la idea de longitud, con frecuencia utilizamos otras palabras como altura, distancia, para describir esta idea. Por ejemplo, hablamos de la longitud de un pedazo de cordel, de la distancia entre dos ciudades o de la altura del mástil de la bandera; pero entre todas estas frases encontramos la misma idea. Damos a entender que hemos elegido una unidad de medida y damos un número que aproximadamente indica cuántas de estas unidades están contenidas en la longitud, distancia o altura a que nos estamos refiriendo.

La longitud de un segmento es un número que compara su tamaño con el tamaño de un segmento unidad.



A la longitud la llamamos la Medida del segmento (AB = 1)

Punto Medio de un Segmento: Sea el segmento $\overline{AB}$ y un punto $P \in \overline{AB}$; tal que A - P - B.



Si: AP = PB, Entonces P es el punto medio del Segmento $\overline{AB}$. El punto medio de un segmento lo biseca (lo divide en partes iguales).

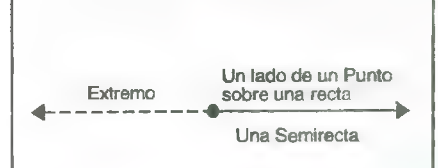
- Si la región S tiene un contorno que es una poligonal, el perímetro de S es la longitud de esta poligonal.



Perímetro de S = 7 + 4 + 3 + 6 + 4 + 10

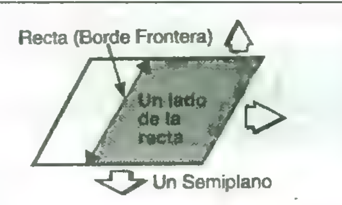
$\therefore$ $\boxed{\text{Perímetro de S} = 34}$

IDEAS REFERENTES A LA SEPARACIÓN



Sobre una recta, cada uno de los lados de un punto se llama semirecta.

Se dice: Un punto sobre una recta divide a la recta en tres conjuntos: El *punto* y las *dos semirectas*.



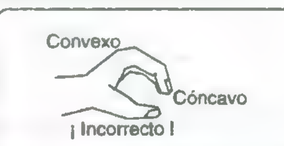
Sobre un plano, cada uno de los lados de una recta se llama semiplano.

Se dice: Una recta sobre un plano divide al plano en tres conjuntos: La *recta* y los *dos semiplanos*.

Figuras Convexas y Cóncavas.

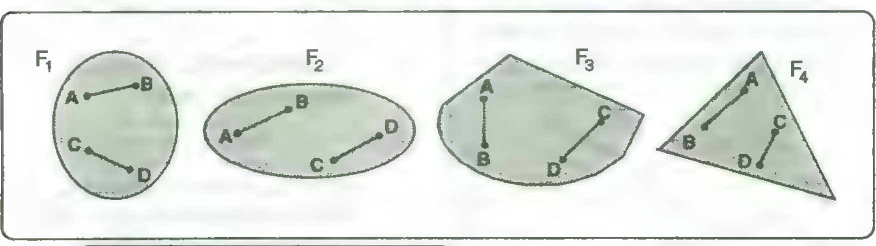
Seguramente has oido hablar de lentes cóncavas o convenxas. Quizás también hayas observado que cuando una persona pretende explicar el significado de las palabras cóncava o convexa coloca la mano como indica la figura y dice que la curvatura "hacia fuera" es convexa y la curvatura "hacia adentro" es cóncava.

Cuando conozcas el concepto correcto estarás en condiciones de señalar los errores de estas definiciones.



Definición: Se dice que una figura (o conjuntos de puntos) es convexa cuando todo par de puntos de la figura determina un segmento incluido en ella.

Por ejemplo: Las siguientes figuras son convexas.

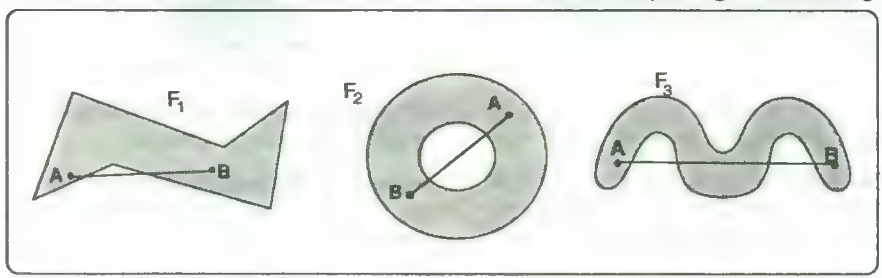


Si para todo punto $A \in F$ y $B \in F$ se verifica que $\overline{AB} \subset F$  F es convexa

Definición: Se dice que una figura es cóncava cuando no es convexa.

Para afirmar que una figura es cóncava, es suficiente encontrar un par de puntos de la figura que determine un segmento no incluida en ella.

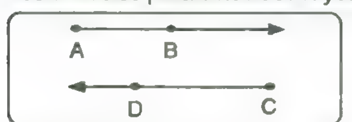
Por ejemplo: Las siguientes figuras son cóncavas pues $A \in F_1$, $B \in F_2$ pero: $\overline{AB} \not\subset F_3$.



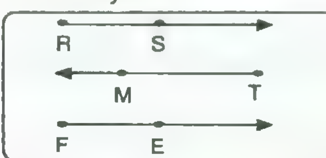


TALLER DE EJERCICIOS Nº 

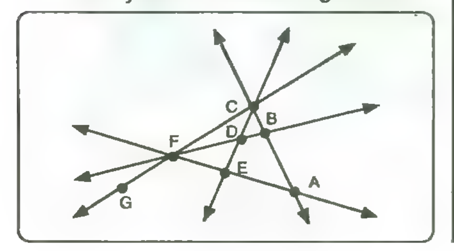
1. Los símbolos para estos dos rayos.



son: $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$. Escriba los nombres de los otros tres rayos.



2. En las cinco rectas que se muestran se observan siete puntos. Nombrar y dar el total de segmentos.

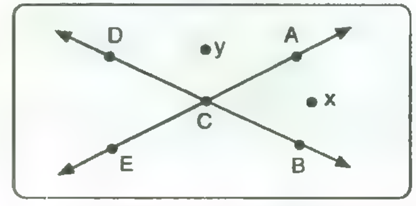


3. En la figura mostrada:

a). Describa dos semiplanos, tales que el punto **x** esté en uno de ellos y **y** en el otro.

b). Describa el semiplano que contiene a **x** y **y**.

c). ¿Qué semiplano no contiene ni a **x** ni a **y**?



4. El perímetro de un triángulo está dado por la fórmula:

$$p = a + b + c$$

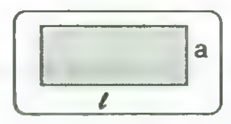
donde: a, b y c son las longitudes de los lados del triángulo. Utilice está fórmula para hallar las partes que faltan en cada fila de la tabla.

	a	b	c	p
a).	17	20	23	
b).	25	30		94
c).	138		213	496

5. Una fórmula para el perímetro de una zona rectángular sería:

p = □(ℓ + a) ó p = □ . ℓ + □ . a

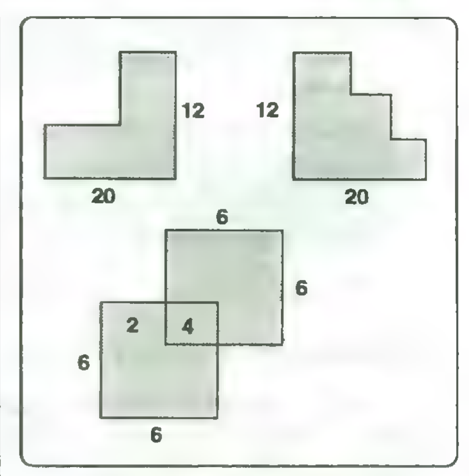
completa el enunciado con los números que faltan en cada □



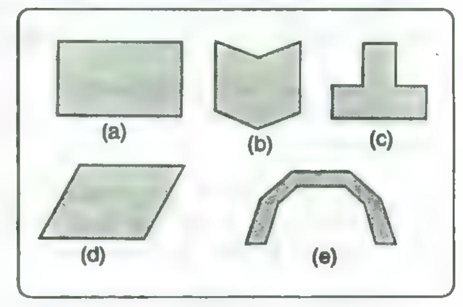
6. Utilice la fórmula de perímetro del rectángulo para hallar los números que faltan en cada parte de la tabla.

	ℓ	a	p
a).	18	6	
b).	47	28	
c).		35	186

7. ¿Cuál es el perímetro de cada región?

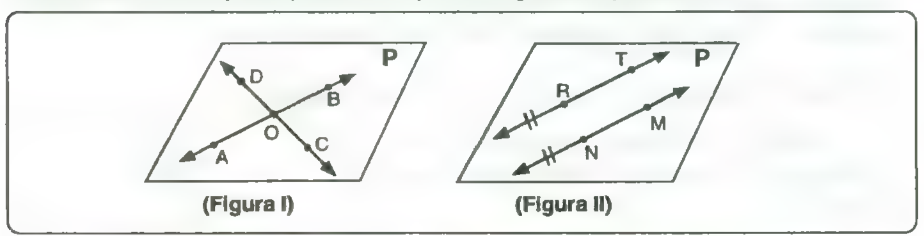


8. ¿Cuáles de las siguientes figuras geométricas son **convexos.**



Posiciones Relativas de dos rectas en un Plano.

Dos rectas sobre un plano pueden ocupar las siguientes posiciones.



(Figura I) (Figura II)

a) Rectas Secantes: Dos rectas son secantes si tienen un solo punto común. (Ver figura I).

En dicha figura, observamos que: $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$, tienen un solo punto común O.

De donde: $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}$ = Punto 0 = {0}

b) **Rectas Paralelas:** Son aquellas que no tienen ningún punto en común. También se las define como aquellas que situadas en un mismo plano conservan la misma distancia.

En la figura (II), observamos que las rectas $\overleftrightarrow{RT}$ y $\overleftrightarrow{NM}$ no tienen ningún punto común.

De donde: $\boxed{\overleftrightarrow{RT} \cap \overleftrightarrow{NM} = \varnothing}$

Las rectas paralelas se denotan de la siguiente manera:

$\overleftrightarrow{RT} \,//\, \overleftrightarrow{NM}$ (Se lee: recta RT paralela a la recta NM)

Construcciones con Regla y Compás:

En muchos casos es útil poder describir un problema mediante distintos tipos de dibujo. Por ejemplo, un ingeniero naval dibuja cada parte de un nuevo barco para ayudarse a captar, los problemas que se pueden presentar. Un ingeniero electrónico hace un diagrama para mostrar como debe ser construida una calculadora electrónica. Un ingeniero mecánico diseña cada parte de un nuevo automóvil para poder establecer donde está algún problema que se puede presentar. En la práctica el dibujo de una figura es una representación hecha en un papel usando solamente una regla y un compás.

Hay una manera simple e importante de hacer geometría, que consiste en hacer uso de regla y compás. Las reglas básicas que gobiernan estos dos instrumentos son como siguen:

1. Una regla puede ser usada solamente para trazar líneas.
2. Un compás puede ser usado para marcar segmentos iguales y para construir círculos o arcos de círculos, pero de ninguna manera podemos medir ángulos.

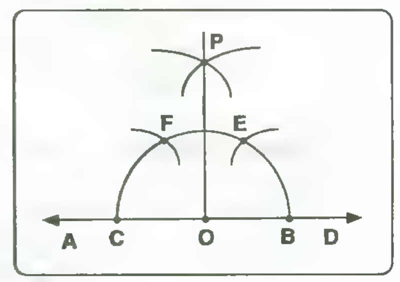
Este es el esquema desarrollado por los antiguos griegos. Este esquema es de gran interés para los matemáticos de hoy y conduce a algunos problemas curiosos cuando tratamos de averiguar que tipos de figuras podemos trazar con la regla y el compás. Las resoluciones de estos problemas tienen valor práctico en el dibujo mecánico, por eso, los dibujantes profesionales las conocen bien.

Construcción de Perpendiculares, oblicuas y Paralelas

La Regla, el Compás y la escuadra son los instrumentos que vamos a emplear para hacer estos trazos.

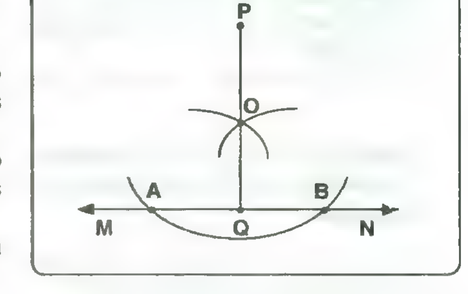
1. ***Trazado de la perpendicular con la regla y el compás.***

A. **Por un punto O de la recta AB, trazar la perpendicular a dicha recta.**



1º. Haciendo centro en O se traza el arco DC.
2º. Con el mismo radio se determinan los arcos DE y EF.
3º. Con el mismo radio y haciendo centro en E y F se trazan dos arcos, que se cortan en el punto P.
4º. Uniendo P con O se tiene: PQ perpendicular a AB en el punto O.

B. Desde un punto P, situado fuera de la recta MN, trazar la perpendicular a dicha recta.

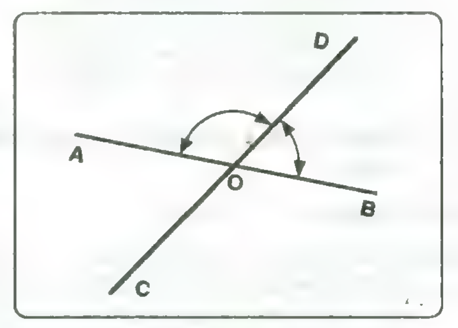


1º. Haciendo centro en P y con un radio cualquiera se corta a MN en los puntos A y B.
2º. Con un radio más pequeño y haciendo centros en A y B se trazan dos arcos que se cortan en el punto O.
3º. Uniendo P con O y prolongando hasta Q, se tiene PQ perpendicular a MN.

2. *Trazado de Oblícuas:*

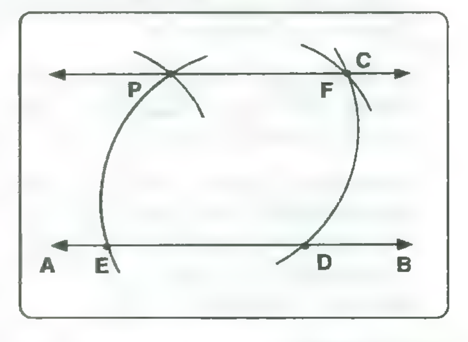
Trazar dos rectas oblícuas entre si, basta hacer que se corten de tal modo que los ángulos adyacentes que se formen no sean iguales.

Así, las rectas AB y CD **son oblícuas,** porque los ángulos adyacentes AOD y DOB son desiguales.



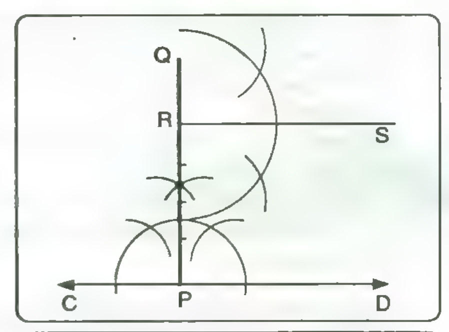
3. *Trazado de Paralelas:*

A. Por un punto P, situado fuera de la recta AB, trazar la paralela a dicha recta empleando regla y compás.



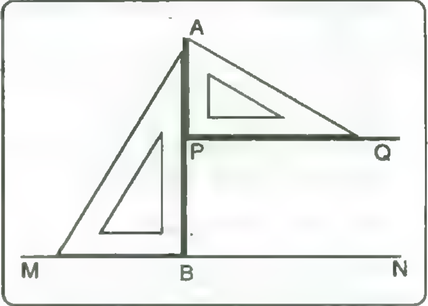
1º. Con un radio cualquiera y haciendo centro en P, se traza el arco CD, que corta a la recta AB en el punto D.
2º. Con el mismo radio y haciendo centro en D, se traza el arco EP, que pasa necesariamente por P.
3º. Haciendo centro en E se traza el arco que pase por P.
4º. Con este mismo radio y haciendo centro en D se traza el arco que corta a CD en el punto F.
5º. Uniendo P con F se obtiene: PF paralelas a AB pasando por P.

B. Dado una recta CD, trazar la paralela situada a una distancia determinada (Por ejemplo a 4cm). Empleando la Regla y el Compás.



1º. Por un punto cualquiera P de la recta CD, se traza la perpendicular QP.
2º. Sobre esta recta se toma RP = 4 cm.
3º. Por el punto R se traza RS perpendicular a QP.
4º. RS es la paralela a CD, situado a 4cm.

C. Trazar por un punto P, la paralela a la recta MN, empleando la regla y la escuadra.

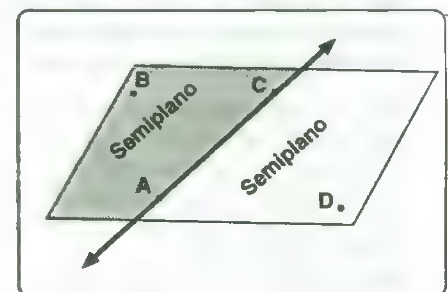


1º. Por un punto cualquiera de la recta MN se traza la perpendicular AB.
2º. Por un punto cualquiera de la recta AB, se traza PQ perpendicular AB.
3º. La recta PQ es paralela a MN?

5.3. Angulos. Su medición y construcción. Angulo Recto; Rectas perpendiculares.

5.3.1.Angulos en el Plano:

5.3.1.1.Concepto de Semiplano: Si sobre un plano P tomamos varios puntos no colineales tales como: A, B, C y D y si por dos de ellos trazamos una recta $\overleftrightarrow{AC}$ esta separa al conjunto plano en tres subconjuntos, un subconjunto es la recta $\overleftrightarrow{AC}$ y los otros dos subconjuntos son las otras partes o regiones de infinitos puntos que llamaremos Semiplanos.

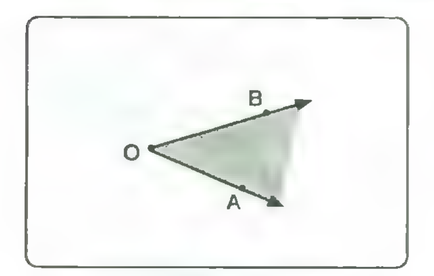


Al subconjunto recta $\overleftrightarrow{AC}$ se le llama Frontera de cada semiplano y no pertenece a ninguno de ellos.

En la figura el punto B está en un lado de la recta $\overleftrightarrow{AC}$ y el punto D está en el otro lado. Por eso se puede decir semiplano del lado B de $\overleftrightarrow{AC}$ y semiplano del lado D de $\overleftrightarrow{AC}$.

5.3.1.2. Angulo:

Si en un plano tomamos dos rayos, $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ de origen común O, el conjunto $\overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}$ se llama ángulo.



Asi en la figura:

$\overleftrightarrow{OA}$ y $\overleftrightarrow{OB}$ son los lados del ángulo y el punto O es el vertice del ángulo.

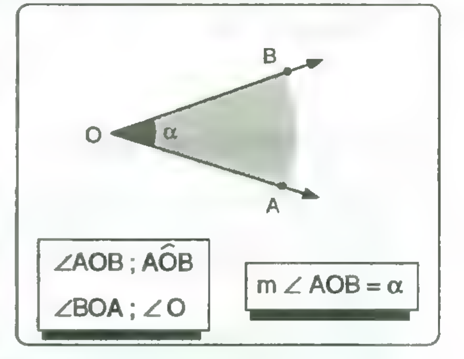
Definición

Se llama **ángulo** a la reunión de dos rayos que tienen el mismo origen

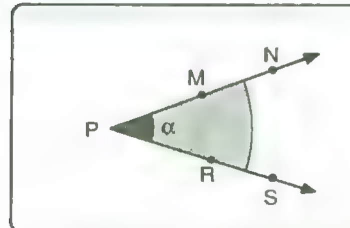
5.3.1.3. Notación

- Para nombrar un ángulo se acostumbra utilizar tres letras donde la letra del vertice siempre va entre las otras dos.
- Algunas veces se usa únicamente la letra del vértice para mencionar un ángulo.

El Símbolo	∠ = ∠ se lee: ángulo m ∠ AOB se lee: medida del ángulo AOB



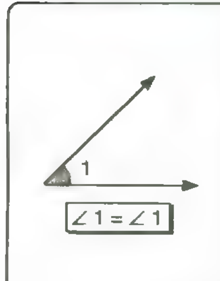
Observación:

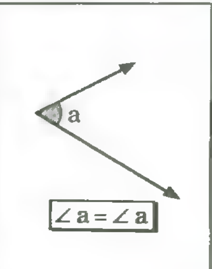


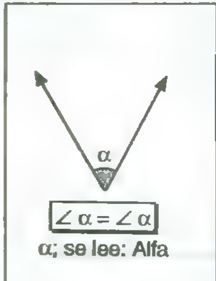
De la figura mostrada, podemos afirmar que:

∠ RPM = ∠SPM = ∠MPR = ∠MPS, como se observará los cuatro ángulos son de igual magnitud.

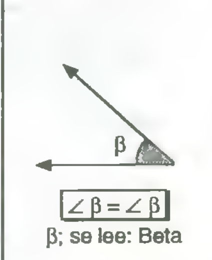
- También se acostumbra a indicar los ángulos por números o letras minúsculas tanto del alfabeto castellano o letras del alfabeto griego.





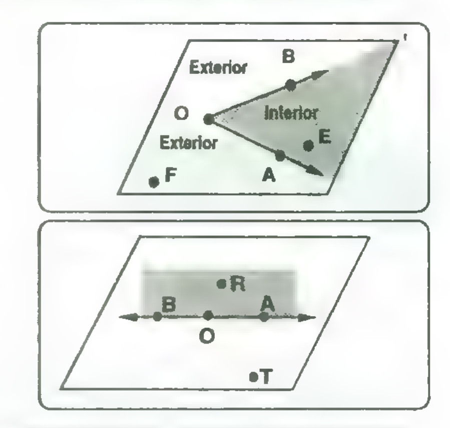


α; se lee: Alfa

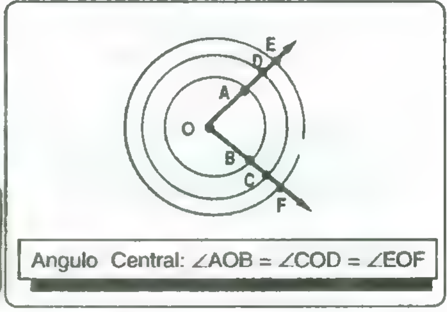


β; se lee: Beta

5.3.1.4. Interior y Exterior de un Angulo:



- Todo ángulo divide al plano en dos regiones llamadas: Interior y Exterior en la figura "E" es un punto interior y "F" un punto exterior del ángulo AOB.



- En la figura "R" pertenece al interior del ángulo AOB y "T" pertenece al exterior del ángulo AOB.

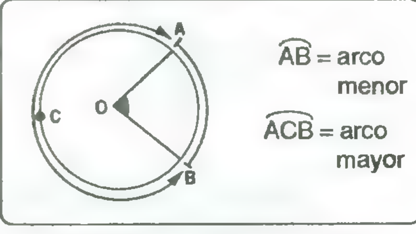
5.3.1.5. Medida de un Angulo:

En la figura mostrada observamos que el vertice "O" (centro de la circunsferencia) puede ser el centro de infinidad de circunferencias.

Se llama ángulo Central en una circunferencia al ángulo cuyo vertice coincide con el centro de la circunferencias.

Angulo Central: $\angle AOB = \angle COD = \angle EOF$

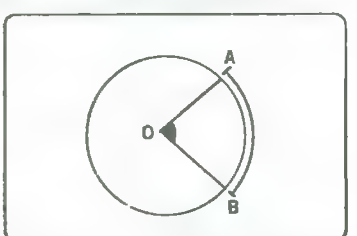
* Un ángulo central divide a la circunferencia en dos subconjuntos de puntos. Uno llamado **arco menor** y el otro **arco mayor.** (ver figura)



$\overset{\frown}{AB}$ = arco menor

$\overset{\frown}{ACB}$ = arco mayor

* La medida de un ángulo central es igual a la medida de su correspondiente arco en la circunferencia.

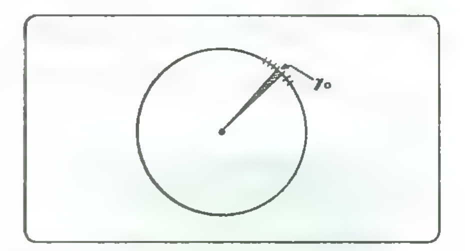


De la figura:

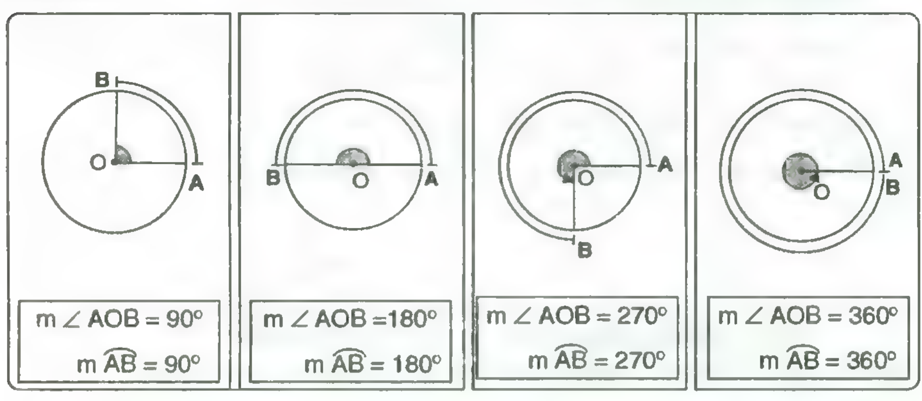


$$m\angle AOB = m\overset{\frown}{AB}$$

* La circunferencia se ha dividido en 360 partes iguales para asi facilitar la medición de arcos. Cada una de estas partes es un grado sexagesimal (1°).

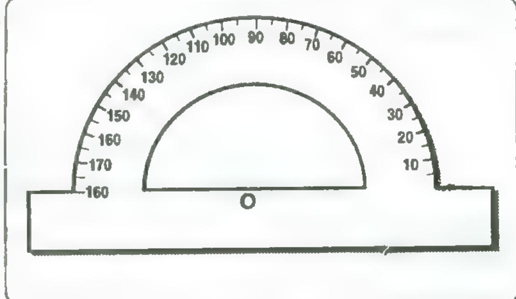


Ejemplos:

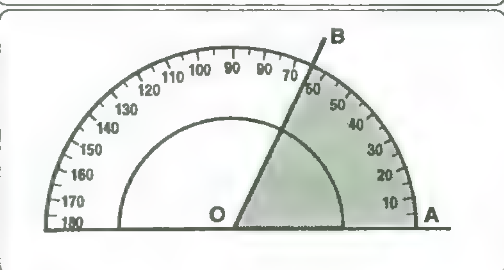


* En el comercio se venden semicircunferencias de plásticos u otro material divididas en 180 grados (18°). Este instrumento se llama transportador.

5.3.1.6. Empleo del Transportador.



Para medir un ángulo usando el transportador, conviene trazar desde el centro O de esta, los lados que van a A y a B. Luego se sitúa el transportador con su centro (que ya viene marcado en el aparato) coincidiendo con el de la circunsferencia y el número "O" con uno de los lados del ángulo está dada por el número que coincide con el otro lado (OB)



(La medida del ángulo AOB = 65° ó m ∠ AOB = 65°)

Esta explicación no tiene ningún valor si no prácticas con el transportador.

5.3.1.7. Sistema de medidas angulares.

La medida de un ángulo, en grados (o en radianes) se llama tambien magnitud del ángulo.

Para la medición de ángulos se pueden utilizar los sistemas sexagesimal o radial según se emplean los grados o los radianes respectivamente.

I. Medición de los Angulos en Grados sexagesimales.

Se toma como unidad principal el ángulo de un grado (1°) sexagesimal, el ángulo de 1° es el que es igual a 1/360 parte de la medida de la circunferencia.

- El ángulo igual a 1/60 parte de 1° es el ángulo de un minuto (1 ,
- El ángulo igual a 1/60 parte de 1' es el ángulo de un segundo (1")

Es decir:

$1^\circ <> 60'$ (se lee: un grado equivale a 60 minutos)
$1' <> 60''$ (se lee: un minuto equivale a 60 segundos)

Formas de Escribir un Angulo en Grados, Minutos y Segundos.

Ejemplo (1): Un angulo mide 80°. Deseamos expresar dicha medida en grados , minutos y segundos.

Resolución:

$$80^\circ = 79^\circ + 1^\circ = 79^\circ + 60'$$

$$80^\circ = 79^\circ + 60' = 79^\circ + (59' + 1') = 79^\circ + (59' + 60'')$$

$$\therefore \quad \boxed{80^\circ = 79^\circ + 59' + 60'' = 79^\circ\,59'\,60''} \textbf{ Rpta.}$$

Ejemplo (2): Un ángulo mide 36,15°. Deseamos expresar dicha medida en grados, minutos y segundos.

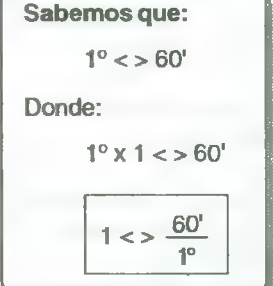
Resolución:

$$36{,}15^\circ = 36^\circ + (0{,}15)^\circ$$

$$36{,}15^\circ = 36^\circ + (0{,}15)^\circ \times 1$$

$$36{,}15^\circ = 36^\circ + (0{,}15^\circ) \times \boxed{\frac{60'}{1^\circ}}$$

$$36{,}15^\circ = 36^\circ + 9' \qquad ....(I)$$



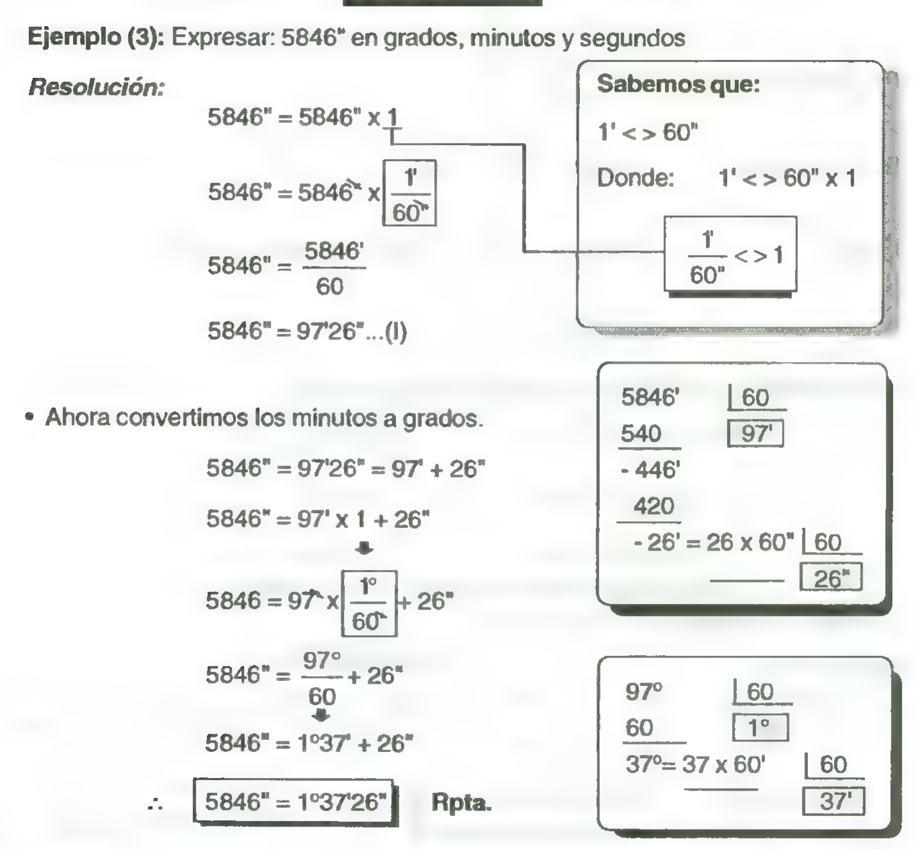
Los 9' se puede escribir de la manera siguiente:

$$9' = 8' + 1' = 8' + 60''$$

$$9' = 8' + 60'' \qquad ....(II)$$

Sustituimos (II) en (I): $36{,}15^\circ = 36^\circ + 8' + 60'' = 36^\circ\, 8'\, 60''$

$$\therefore \quad \boxed{36{,}15^\circ = 36^\circ 8' 60''} \quad \textbf{Rpta.}$$



Ejemplo (3): Expresar: 5846" en grados, minutos y segundos

Resolución:

$$5846'' = 5846'' \times 1$$

$$5846'' = 5846'' \times \boxed{\frac{1'}{60''}}$$

$$5846'' = \frac{5846'}{60}$$

$$5846'' = 97'26'' ...(I)$$

Sabemos que:

1' < > 60"

Donde: 1' < > 60" x 1

$$\boxed{\frac{1'}{60''} < > 1}$$

- Ahora convertimos los minutos a grados.

$$5846'' = 97'26'' = 97' + 26''$$

$$5846'' = 97' \times 1 + 26''$$

$$5846 = 97' \times \boxed{\frac{1^\circ}{60'}} + 26''$$

$$5846'' = \frac{97^\circ}{60} + 26''$$

$$5846'' = 1^\circ 37' + 26''$$

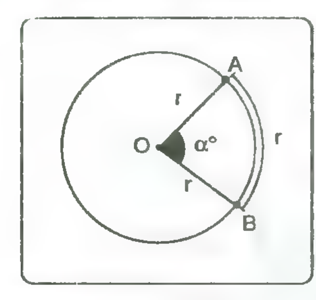
$$\therefore \quad \boxed{5846'' = 1^\circ 37' 26''} \quad \textbf{Rpta.}$$

5846'	60
540	97'
- 446'	
420	
- 26' = 26 x 60"	60
	26"

97°	60
60	1°
37°= 37 x 60'	60
	37'

II) Medición de los Angulos en Radianes.

Se toma como unidad principal el ángulo de un radián (1 rad.) un ángulo central mide 1 radián cuando la longitud del arco subtendido arc AB es igual a la longitud del radio r de la circunsferencia de centro O.



Si:	arc AB = r
Entonces:	$\widehat{AOB}$ = 1 radian

De la figura:



$$2\pi r \longrightarrow 360^\circ$$
$$r \longleftarrow \alpha^\circ$$

Por Regla de Tres: $\alpha = \dfrac{360^\circ \cdot r}{2\pi r} = \dfrac{180^\circ}{\pi}$

En consecuencia: $1\,\text{radian} = \dfrac{180^\circ}{\pi}$; pero: $\pi = 3{,}1416$

Luego: $1\ \text{radian} = \dfrac{180^\circ}{3.1416} = 57^\circ 17'$ (Aproximadamente)

$\therefore$ $\boxed{1\ \text{radian} = 57^\circ 17'}$

Equivlencias entre Radianes y Grados Sexagesimales.

2π radianes = 360°	;	$\dfrac{\pi}{3}$ radianes = 60°
π radianes = 180°	;	$\dfrac{\pi}{4}$ radianes = 45°
$\dfrac{\pi}{2}$ radianes = 90°	;	$\dfrac{\pi}{6}$ radianes = 30°

Ejemplo 1: Expresar: 105° a radianes.

Resolución.

Sabemos que:
$$\left.\begin{array}{l} 180^\circ \rightarrow \pi\text{rad.} \\ 105^\circ \rightarrow x\text{rad.} \end{array}\right\}$$

Por Regla de Tres:

$$x = \frac{105^\circ \times \pi}{180^\circ} = \frac{105^\circ(3{,}1416)}{180^\circ} \Rightarrow \boxed{x = 1{,}83}$$

Luego: $\boxed{105^\circ = 1{,}83\ \text{radianes}}$ **Rpta.**

OTRA FORMA: $105^\circ = 105^\circ \times 1 \Rightarrow 105^\circ = 105\boxed{\dfrac{\pi\text{rad}}{180^\circ}}$

$$105^\circ = \frac{105\pi \cdot \text{rad}}{180} = \frac{105 \times 3{,}1416\text{rad}}{180}$$

$\therefore$ $\boxed{105^\circ = 1{,}83\ \text{rad.}}$ **Rpta.**

Recuerda que:

$180^\circ = \pi$rad.

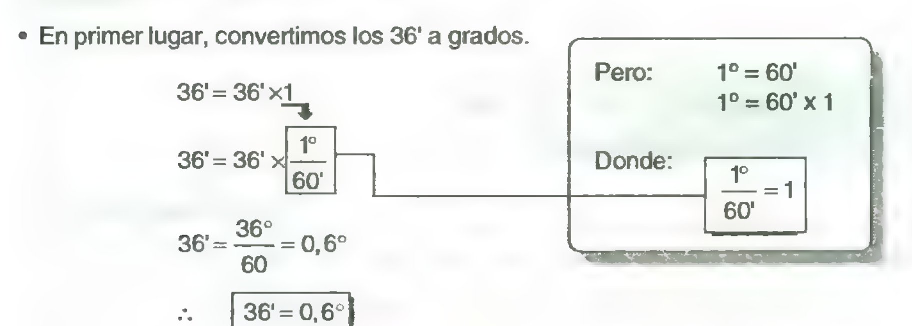
Donde: $180^\circ \times 1 = \pi$rad.

$$\boxed{1 = \frac{\pi\text{rad}}{180^\circ}}$$

Ejemplo 2: Expresa: 30°36' a radianes

Resolución:

- En primer lugar, convertimos los 36' a grados.



Luego: $30°\,36' = 30° + 0{,}6° = 30{,}6°$

- En segundo lugar convertimos los 30,6° a radianes.

$$30{,}6 = 30{,}6° \times \boxed{1} = 30{,}6° \times \boxed{\frac{\pi rad}{180°}} = \frac{30{,}6 \times (3{,}1416)rad.}{180°}$$

$$\therefore \quad \boxed{30°36' = 30{,}6° = 0{,}534\ 072\ rad.} \qquad \textbf{Rpta.}$$

Ejemplo 3: Expresa: $\frac{3\pi}{5}$ radianes en grados sexagesimales.

Resolución:

$$\frac{3\pi}{5} rad. = \frac{3}{5}(\pi rad.) \quad ; \quad \text{pero}: \boxed{\pi rad. = 180°}$$

$$\frac{3\pi}{5} rad. = \frac{3}{5}(180°) = 3(36°) = 108°$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{3}{5}\pi rad. = 108°} \qquad \textbf{Rpta.}$$

Ejemplo 4: Expresa: $\frac{5\pi}{8}$ radianes en grados sexagesimales.

Resolución:

$$\frac{5}{8}\pi radianes = \frac{5}{8}(\pi radianes)$$

$$= \frac{5}{8}(180°)$$

$$= \frac{900°}{8} = \frac{225°}{2}$$

$$= 112{,}5°$$

$\therefore$ $\boxed{\frac{5}{8}\pi\text{radianes} = 112{,}5°}$ **Rpta.**

```
225°  |_2_
 2     112,5
-2
 2
-5
 4
10
```

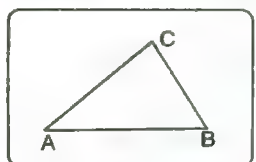
> Nota: Cuando la medida de un ángulo esta expresada en radianes se obvia dicha palabra y solo se escriben los números osea: $\frac{3}{4}\pi$ radianes $= \frac{3}{4}\pi$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 68

1. Un ángulo de este triángulo es $\angle ACB$.

Uno de sus lados es $\overline{AC}$. Nombra los otros dos ángulos y los otros dos lados.



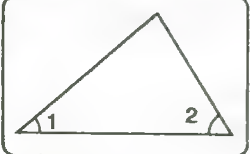
2.



a) Nombra los tres segmentos de esta figura
b) Nombra cuatro rayos.

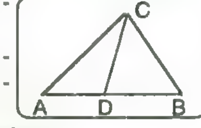
3. Dibuja un triángulo que tenga dos ángulos en la figura.

Emplea letras para marcarlo, de manera que $\angle$ 1 sea $\angle$ DEF y $\angle$ 2 sea $\angle$EDF



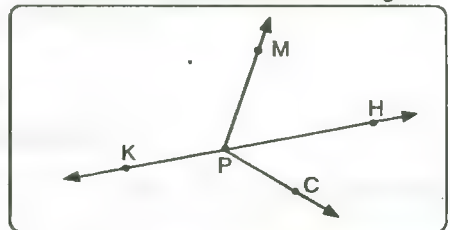
¿Como se llama el tercero?

4. En la siguiente figura:

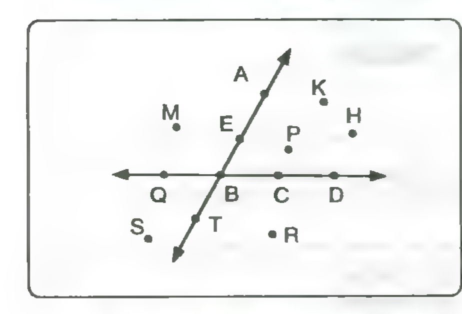


a) Nombra tres triángulos en esta figura.
b) Nombra siete ángulos.
c) Nombra siete segmentos.
d) ¿Cuál segmento es un lado de dos triángulos distintos?
e) ¿A cuál de los dos triángulos pertenece el $\angle$A?.

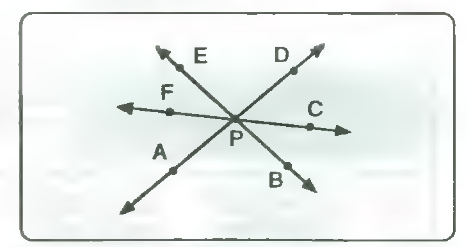
5. En la figura, los puntos K,P y H estan alineados.Nombra los cinco ángulos.



6. ¿Qué puntos de la fgura estan en:
a) El interior de $\angle$ CBA?
b) El exterior del $\angle$ EBC?
c) El interior del $\angle$ ABD?
d) El interior del $\angle$ ABQ?



7). ¿Cuántos ángulos hay en la figura? (hay más de seis?





TALLER DE EJERCICIOS Nº 

1). ¿A que es igual el triple del ángulo 28°10'42"?

2). Hallar la mitad de cada uno de los siguientes ángulos:

$\alpha = 28°16'48"$; $\beta = 27°16"$ y

$\theta = 48°15'18"$

3). Hallar la tercera parte de cada uno de los ángulos del ejercicio anterior.

4). Expresa la medida de cada ángulo en grados, minutos y segundos.

a) 45° b) 68° c) 106°	d) 13,45° e) 17,80° f) 40,58°	g) 6 874" h) 5 154" i) 8 600"

5). Expresa la medida de cada ángulo en radianes.

a) 75° b) 45°	c) 160° d) 270°	e) 60°45' f) 125°20'

6). Expresa la medida de cada angulo en el sistema sexagesimal.

(a) $\frac{5}{6}\pi$	(c) $\frac{3}{10}\pi$	(e) $\frac{9}{12}\pi$
(b) $\frac{2}{5}\pi$	(d) $\frac{4}{9}\pi$	(f) $\frac{11}{6}\pi$

7). La suma de dos ángulos es igual a 43°24'15". Su diferencia es 13°7'11". Calcular dichos ángulos.

8) Hallar la suma del ángulo: 24°13'20" más su cuádruplo.

RESPUESTAS TALLER

1) 84°32'6"	2) 14°8'24" ; 13°38" y 24°7'39"
3) 9°25'35" ; 9°5"1/3 y 16°5'16"	
4) a) 44°59'60" d) 13°26'60" g) 1°54'34" b) 67°59'60" e) 17°47'60" h) 1°25'54" c) 105°59'60" f) 40°34'48" i) 2°23'20"	
5). a) 1,309 d) 4,712 4 b) 0,785 4 e) 1,058 89 c) 2,792 53 f) 2,187 48	6). a) 150° d) 80° b) 72° e) 135° c) 54° f) 330°
7) 28°15'43" y 15°8'32"	8). 121°6'40"

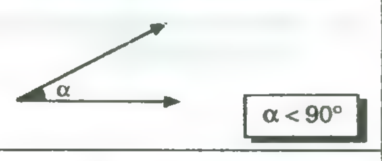
5.3.2. Clasificación de los Angulos:

I) De acuerdo a su medida:

Los ángulos según su medida se clasifican en:

a) Angulo Agudo b) Angulo recto c) Angulo obtuso
d) Angulo nulo e) Angulo llano

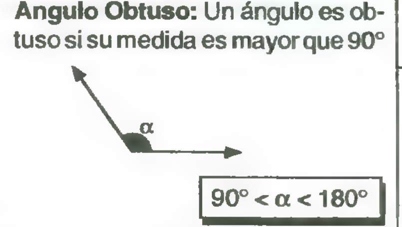
a) **Angulo Agudo:** Un ángulo es agudo si su medida es menos de 90°



b) **Angulo Recto:** Un ángulo es recto si su medida es 90°



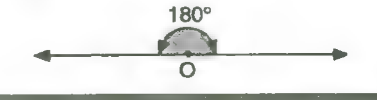
c) **Angulo Obtuso:** Un ángulo es obtuso si su medida es mayor que 90°



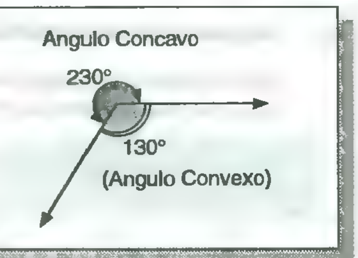
d) **Angulo Nulo:** Un ángulo es nulo si su medida es 0°

O

e) **Angulo LLano:** Un ángulo es llano si su medida es 180°



- **Angulo Concavo:** Un ángulo es concavo si su medida es mayor que 180° y menor que 360°.
- **Angulo Convexo:** Un ángulo es convexo si su medida es mayor que 0° pero menor que 180°.



II. De acuerdo a su posición:

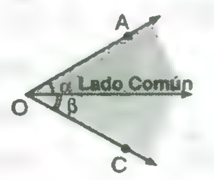
Los ángulos según su posición se clasifican en:

a). Angulos adyacentes
b). Angulos consecutivos
c). Angulos opuestos por el vértice.

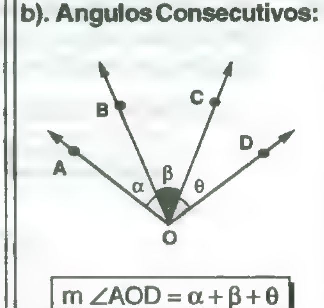
a). Angulos adyacentes: Son los que tienen el vértice y un lado común, pero no tienen puntos interiores comunes.

Se dice:
$\angle AOB$ es adyacente a $\angle BOC$.

$m\angle AOC = \alpha + \beta$

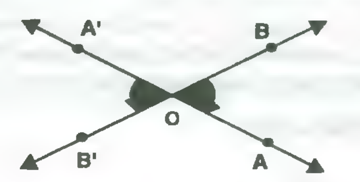


b). Angulos Consecutivos:



$m\angle AOD = \alpha + \beta + \theta$

c). Angulos opuestos por el vértice: Dos ángulos son opuestos por el vértice si tienen un vértice común y los lados de uno son la prolongación de los lados del otro, tales como $\angle AOB$ y $\angle A'OB'$.



- Dos ángulos opuestos por el vértice, tienen igual medida.

$m\angle AOB = m\angle A'OB'$

$m\angle BOA' = m\angle AOB'$

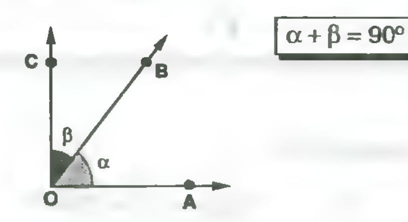
Relación de Angulos

a). Angulos complementarios:

Dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es 90°.

$$m\angle AOB + m\angle BOC = 90°$$

$$\alpha + \beta = 90°$$



- **Complemento de un ángulo:** Es lo que le falta a un ángulo para ser igual a 90°.
  Así:
- Complemento de 50° es 40°.
  porque: $90° - 50° = 40°$
- Complemento de 60° es 30°
  porque: $90° - 60° = 30°$

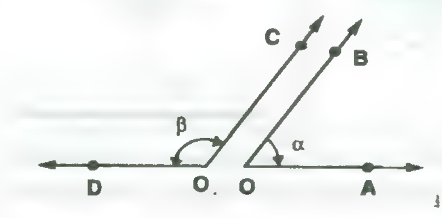
En General:

Complemento del ángulo $x = (90° - x)$

b). Angulos suplementarios:
Dos ángulos son suplementarios si la suma de sus medidas es 180°.

$$m\angle AOB + m\angle COD = 180°$$

$$\alpha + \beta = 180°$$



- **Suplemento de un Angulo:** Es lo que le falta a un ángulo para ser igual a 180°.
  Así:
- El suplemento de 70° es 110°
  porque: $180° - 70° = 110°$
- El suplemento de 30° es 150°
  porque: $180° - 30° = 150°$

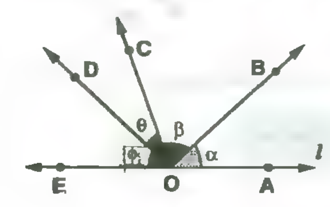
En General:

Suplemento del ángulo x $= (180° - x)$

Teorema: La suma de las medidas de los ángulos consecutivos formados alrededor de un mismo vértice y a un mismo lado de una recta es 180°.

$$m\angle AOB + m\angle BOC + m\angle COD + m\angle DOE = 180°$$

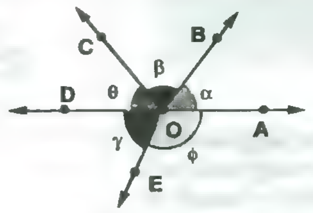
$$\alpha + \beta + \theta + \phi = 180°$$



Teorema: La suma de las medidas de los ángulos consecutivos formados alrededor de un punto en un plano es 360°.

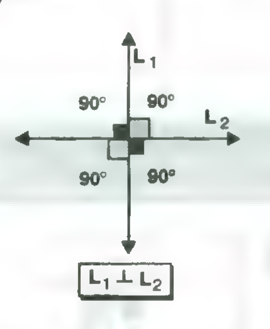
m ∠AOB + m ∠BOC + m ∠COD + m ∠DOE + m ∠EOA = 360°

$\alpha + \beta + \theta + \gamma + \phi = 360°$

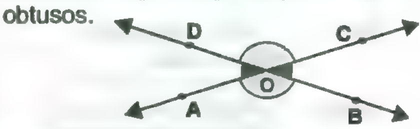


Rectas Perpendiculares: Dos rectas son perpendiculares si al intersectarse forman cuatro ángulos rectos.

En la figura:



Rectas Oblícuas: Dos rectas son oblícuas si al cortarse determinan en el plano dos ángulos agudos y dos ángulos obtusos.



Las rectas $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{BD}$ son oblícuas.

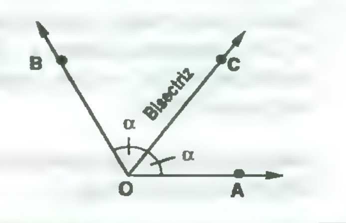
Siendo:
∠BOC y ∠DOA (ángulos agudos)
∠COD y ∠AOB (ángulos obtusos)

Simbólicamente se expresa así:

$\overleftrightarrow{AC} \not\perp \overleftrightarrow{BD}$

- **Bisectriz de un ángulo:** Se denota bisectriz de un ángulo al rayo cuyo origen es el vértice del ángulo y divide a dicho ángulo en dos ángulos congruentes.
  De la figura:

  m ∠AOC = m ∠COB = α

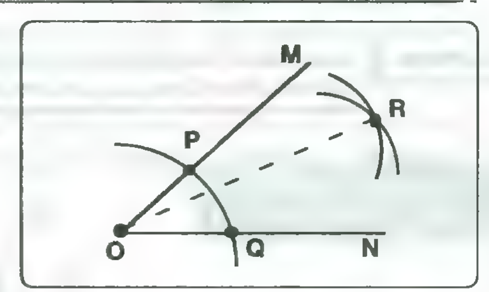


CONSTRUCCIÓN DE LA BISECTRIZ DE UN ANGULO:

Sea el ángulo MON cuya bisectriz se desea trazar.

1º. Haciendo centro en el vértice O, se traza el arco QP.
2º. Haciendo centro en Q y P se trazan dos arcos, que en este caso se cortan en R.

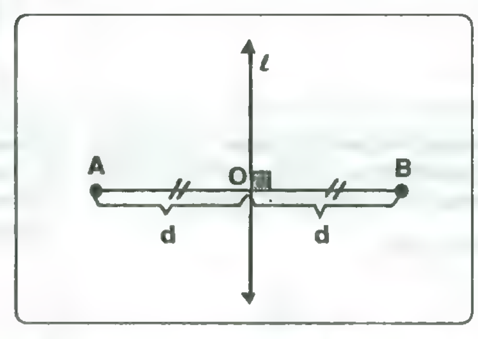
3º. Trazando la semirecta que pase por O y R se tiene OR, bisectriz del ángulo MON.



- **Mediatriz de un segmento:** La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular trazada en el punto medio de dicho segmento, quedando, así el segmento dividido en segmentos iguales de la figura:

Sea: $\overline{AB}$ = segmento y ℓ = recta

Luego: $m\,\overline{AO} = m\,\overline{OB} = d$



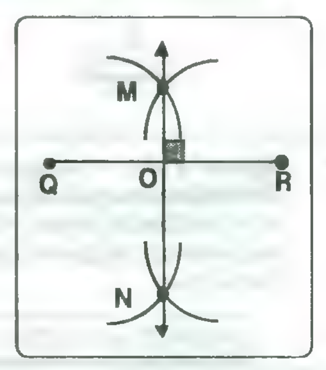
Importante: La perpendicular en el punto medio de un segmento se llama mediatriz del segmentos, así la recta ℓ es la mediatriz de $\overline{AB}$.

Construcción de la mediatriz de un segmento:

Dado un segmento QR, trazar una perpendicular en su punto medio.

1º. Con un radio mayor que la mitad del segmento QR y haciendo centro en Q y R se trazan cuatro arcos, los que se cortan dos a dos en los puntos M y N.

2º. Uniendo M con N se tiene MN perpendicular a QR en su punto medio O.

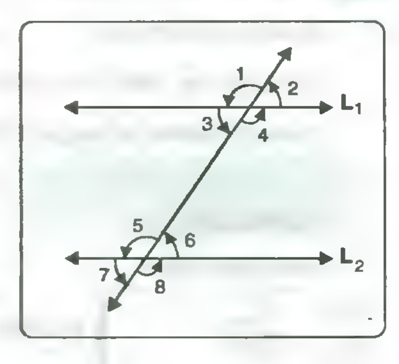


5.3.3 Angulos formados por dos rectas paralelas cortadas por una sectante (o transversal).

Si las rectas L_1 y L_2 s·›n paralelas y están cortadas por la secante S se cumplen las siguientes propieda·

1). **Angulos correspondientes congruentes:**

$\angle 1 \cong \angle 5$; $\angle 6 \cong \angle 2$
$\angle 7 \cong \angle 3$; $\angle 8 \cong \angle 4$



2) **Angulos Alternos Internos Congruentes:**

$\angle 3 \cong \angle 6$; $\angle 5 \cong \angle 4$

3) **Angulos alternos externos congruentes:**

$\angle 1 \cong \angle 8$; $\angle 7 \cong \angle 2$

4) **Angulos conjugados externos suplementarios:**

$m\angle 1 + m\angle 7 = 180°$
$m\angle 2 + m\angle 8 = 180°$

5. **Angulos conjugados internos suplementarios:**

$m\angle 5 + m\angle 3 = 180°$
$m\angle 4 + m\angle 6 = 180°$

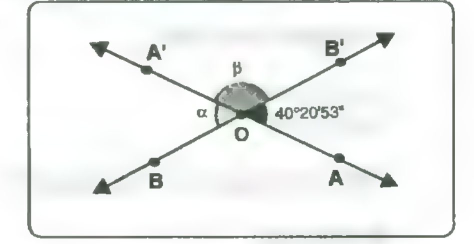
Congruencia de Angulos

Dos ángulos son congruentes si tienen igual medida.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. En la figura mostrada:
Hallar la medida de los ángulos:

α y β



Resolución:

De acuerdo a la figura:

$\alpha = 40°20'53"$ (por ser opuestos por el vértice)

De la figura: $\beta + 40°20'53" = 180°$ (Por ser ángulos suplementarios)

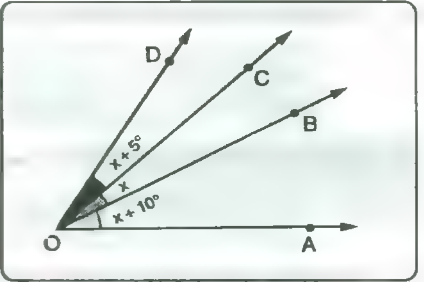
$\beta = 180° - 40°20'53"$

$\beta = 179°59'60" - 40°20'53"$ ⇨ $\boxed{\beta = 139°39'7"}$

2. En la figura mostrada:

$m\angle AOB + m\angle BOC + m\angle COD = 80°$

Hallar la medida del ángulo BOD.



Resolución:

De la expresión:

$$\begin{array}{l} 65° \;\; \underline{|\,3\;\;} \\ \underline{6} \quad\;\; \boxed{21°} \\ -5° \\ \underline{\;3\;} \\ 2° = 2x60' = 120' \;\underline{|\,3\;\;} \\ \qquad\qquad\qquad\quad \boxed{40'} \end{array}$$

$\underbrace{m\angle AOB}_{} = \underbrace{m\angle BOC}_{} + \underbrace{m\angle COD}_{} = 80°$; obtenemos:

$(x + 10°) \quad + \quad x \quad + \quad (x + 5°) = 80°$

$3x = 80° - 15° \;\Rightarrow\; 3x = 65° \;\Rightarrow\; x = \dfrac{65°}{3}$

$\therefore \; \boxed{x = 21°40'}$

Luego: $m\angle BOD = x + (x + 5°) = 2x + 5°$ ......(I)

Reemplazamos el valor de "x" en (I):

$m\angle BOD = 2\,(21°40') + 5° \;\Rightarrow\; m\angle BOD = 42°80' + 5° = 47°80'$

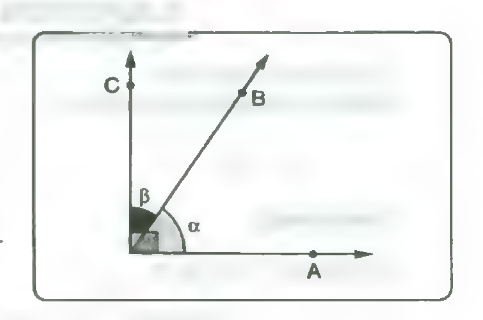
$m\angle BOD = 47°(60' + 20') \;\Rightarrow\; m\angle BOD = 47°\,(1° + 20')$

$\therefore \; \boxed{m\angle BOD = 48°20'}$

3. En la figura mostrada:

- $\alpha = 3x - 10°$
- $\beta = 2x + 5°$

Hallar el complemento del ángulo "α".



Resolución:

De acuerdo a la figura: $\alpha + \beta = 90°$

$(3x - 10°) + (2x + 5°) = 90°$

$5x - 5° = 90° \;\Rightarrow\; 5x = 95° \;\Rightarrow\; \boxed{x = 19°}$

Reemplazamos el valor de $x = 19°$ en la expresión:

$\alpha = 3x - 10° \;\Rightarrow\; \alpha = 3\,(19°) - 10° \quad \therefore \; \boxed{\alpha = 47°}$

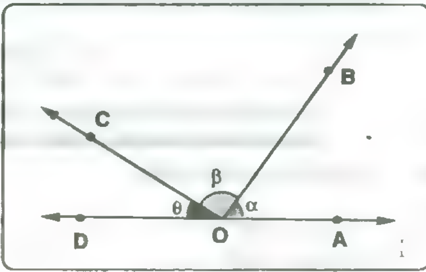
Luego; calculamos:

– El complemento del ángulo "α" = $90° - \alpha$

$= 90° - 47° = 43°$

$\therefore$ El complemento del ángulo "α" = 43° **Rpta.**

4. En la figura mostrada:



- $\alpha = x + 8°$
- $\beta = 3x + 4°$
- $\theta = x - 2°$

Hallar el suplemento del ángulo "θ".

Resolución:

Por propiedad: $\alpha + \beta + \theta = 180°$

$(x + 8°) + (3x + 4°) + (x - 2°) = 180°$

$5x + 10° = 180° \Rightarrow 5x = 170° \quad \therefore \boxed{x = 34°}$

Reemplazamos el valor de x = 34°; en la expresión:

$\theta = x - 2° \Rightarrow \theta = 34° - 2° \quad \therefore \boxed{q = 32°}$

Luego; calculamos: El suplemento del ángulo "θ" = $180° - \theta$

$= 180° - 32° = 148°$

$\therefore$ El suplemento del ángulo "θ" = 148° **Rpta.**

5. Dos ángulos complementarios están en la relación de 3 a 2. Hallar la medida de cada uno de estos ángulos.

Resolución:

> ***Recuerda que:***
>
> *Dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es 90°.*

Sean los ángulos: α y β

Estos ángulos están en la relación de 3 a 2; osea:

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{3}{2}\beta}$ ......(I)

Como α y β son ángulos complementarios, deben sumar 90°; osea:

$$\alpha + \beta = 90° \qquad \text{.......(II)}$$

Reemplazamos (I) en (II):

$$\frac{3}{2}\beta + \beta = 90° \quad \Rightarrow \quad 3\beta + 2\beta = 180°$$
$$5\beta = 180° \quad \therefore \quad \boxed{\beta = 36°}$$

Reemplazamos el valor de $\beta = 36°$ en (I):

$$\alpha = \frac{3}{2}(36°) \quad \Rightarrow \quad \alpha = 54°$$

$\therefore$ **La medida de los ángulos pedidos es: 54° y 36° respectivamente.** **Rpta.**

6. En la figura mostrada:

- $\alpha = x + 5°$
- $\beta = x + 20°$
- $\theta = 4x + 10°$
- $\phi = 100° - x$

Hallar la medida del ángulo "ϕ"

Resolución:

Por propiedad: $\alpha + \beta + \theta + \phi = 360°$

$$(x + 5°) + (x + 20°) + (4x + 10°) + (100° - x) = 360°$$

$$5x + 135° = 360° \quad \Rightarrow \quad 5x = 360° - 135°$$
$$5x = 225° \quad \therefore \quad \boxed{x = 45°}$$

Luego; la medida del ángulo "ϕ" es: $\phi = 100° - x \quad \Rightarrow \quad \phi = 100° - 45°$

$$\therefore \quad \boxed{\phi = 55°} \qquad \textbf{Rpta.}$$

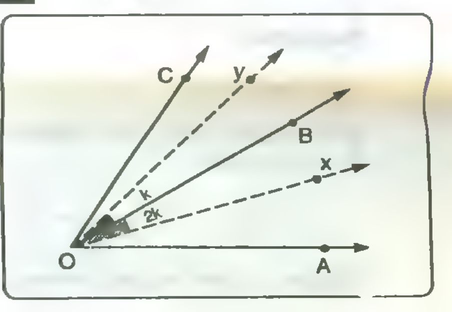
7. En la figura mostrada:

$\overrightarrow{OX}$ es bisectriz del ángulo AOB

$\overrightarrow{OY}$ es bisectriz del ángulo BOC

$$m\angle AOC = 72°$$

Calcular la medida del ángulo que forman dichas bisectrices.



Resolución:

Recuerda Que:

La bisectriz divide al ángulos en dos ángulos congruentes (de igual medida)

Del dato: $\underbrace{m\angle AOC}$ = 72°

$$2K + 2K + K + K = 72° \Rightarrow 6K = 72° \quad \therefore \quad \boxed{K = 12°}$$

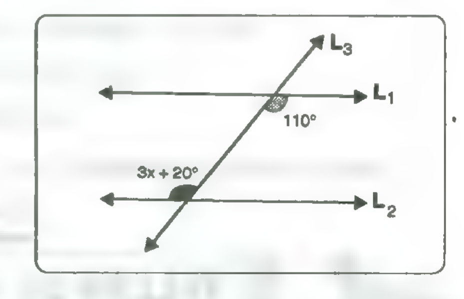
Luego, la media del ángulo que forman dichas bisectrices es:

$$m\angle xoy = \theta = 3K \qquad ....(I)$$

Reemplazamos el valor de K = 12° en (I):

$$\therefore \quad \boxed{m\angle xoy = q = 3(12°) = 36°} \qquad \textbf{Rpta.}$$

8. En la figura mostrada:
   - Las rectas L_1 y L_2 son paralelas
   - La recta L_3 es secante o transversal
   - Hallar el valor de "x".



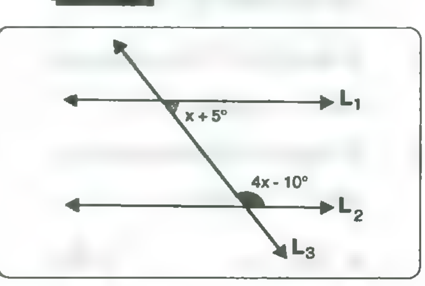
Resolución:

Por ángulos alternos internos:

$$3x + 20° = 110°;\ \text{resolviendo la ecuación:}\ 3x = 110° - 20°$$

$$3x = 90° \quad \therefore \quad \boxed{x = 30°} \quad \textbf{Rpta.}$$

9. En la figura mostrada:
   - Las Rectas L_1 y L_2 son paralelas.
   - La Recta L_3 es secante o transversal
   - Hallar el valor de "x".



Resolución:

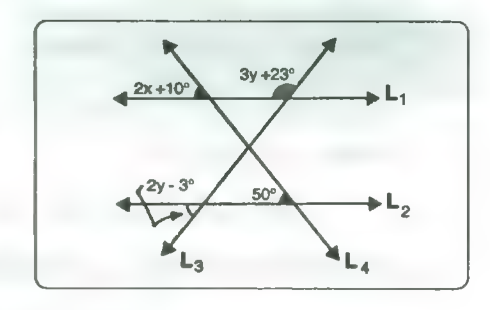
Por ángulos conjugados internos suplementarios:

$(x + 5°) + (4x - 10°) = 180°$; resolviendo la ecuación:

$$5x - 5° = 180°$$

$$5x = 185° \quad \therefore \quad \boxed{x = 37°} \quad \text{Rpta.}$$

10. En la figura mostrada:



- Las Rectas $L_1 // L_2$
- Las Rectas L_3 y L_4 son secantes.
- Hallar el valor de "x + y"

Resolución:

Por ángulos correspondientes congruentes:

$$2x + 10° = 50 \quad ; \text{resolviendo la ecuación:}$$

$$2x = 40° \quad \therefore \quad \boxed{x = 20°}$$

Por ángulos conjugados externos suplementarios:

$$(2y - 3°) + (3y + 23°) = 180° \quad ; \text{resolviendo la ecuación:}$$

$$5y + 20° = 180°$$

$$5y = 160° \quad \therefore \quad \boxed{y = 32°}$$

Luego, calculamos el valor de: $x + y = 20° + 32° = 52°$

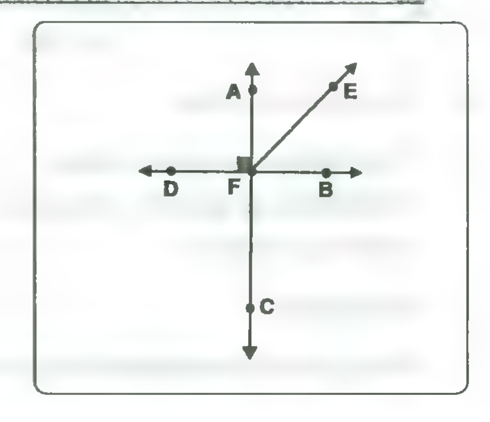
$$\therefore \quad \boxed{x + y = 52°} \quad \text{Rpta.}$$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 70



1. Utilice la figura de la derecha para los ejercicios del 1 a 4.



a. El ángulo BFC es suplemento del ∠........y del ∠.......

b. El ángulo AFB es suplemento del ∠........y del ∠.......

2. a) $\overline{AC} \perp$ ...... b) $\overline{BD} \perp$......

   c) ∠AFD ≅ ∠...... ≅ ∠...... ≅ ∠......

3. ¿Es el $\angle AFE$ adyacente al

a) $\angle BFC$ b) $\angle CFD$ c) $-EFB$

4. ¿Los ángulos siguientes son agudos, obtusos o rectos?

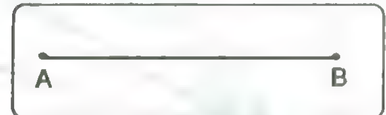
a) $\angle EFB$ b) $\angle DFE$ c) $\angle AFB$

5. Trace $\overline{PQ}$,de 3cm de largo. Marque un puntoA a 1cm de un extremo y construya una perpendicular a $\overleftrightarrow{PQ}$ en A.

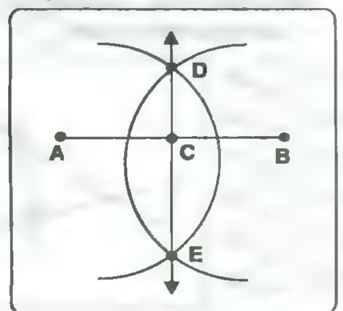
6. Trace una recta q y marque un punto A fuera de ella. Construya una perpendicular a q que pase por A.

7. Trace un segmento de 3cm y biséquelo aplicando la regla y el compas.

8. Construya, con regla y compás, un segmento cuya longitud sea 1 1/2 veces la de $\overline{AB}$.



9. Trace $\overline{AB}$. Con A y B como centros trace los arcos de circunferencia indicados, que se cortan en D y E. Dibuje $\overleftrightarrow{DE}$



a) ¿Es $\overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AB}$?

b) ¿Es $\overleftrightarrow{AC} \cong \overleftrightarrow{BC}$?

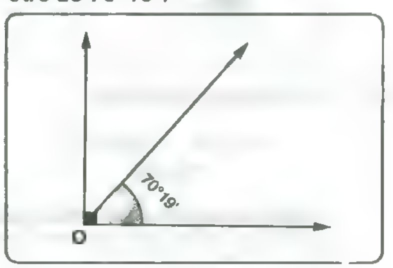
El punto C e. .l punto medio de $\overline{AB}$ y la r.cta DE se llama mediatriz de $\overline{AB}$.

10. Si el $\angle AOB$ es un ángulo llano. ¿Cuál es el valor de los siguientes ángulos?

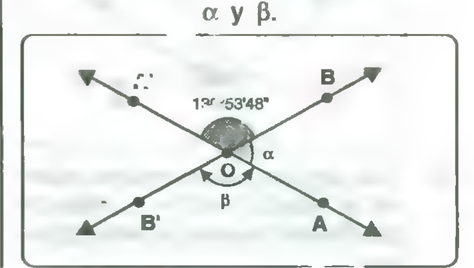
a) $\angle COB$

b) $\angle COA$

c) $\angle AOD$



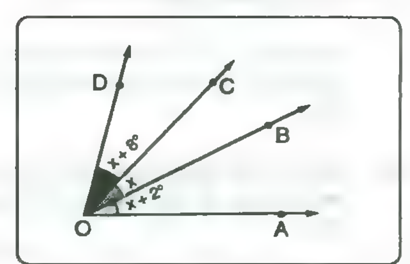
11. Se dice que dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es 90°.¿Cuál es el valor de un ángulo que sea el complemento de otro de 70°19'?



12. En la figura n.ostrada:
Hallar el medida de los ángulos:
α y β.

13. En la figura mostrada:

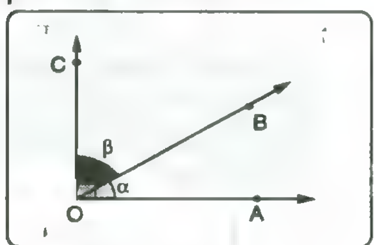
m ∠BOD = 60°; Hallar la m ∠AOB.



14. En la figura mostrada:

• $\alpha = \frac{x}{2} + 6°$ • $\beta = 2x + 14°$

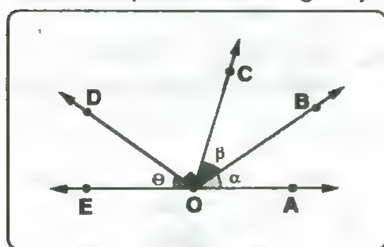
Hallar el complemento del ángulo "β"



15. En la figura mostrada:

• $\alpha = x$ • $\beta = 3x$
• $\theta = 2x$

Hallar el suplemento del ángulo "β".

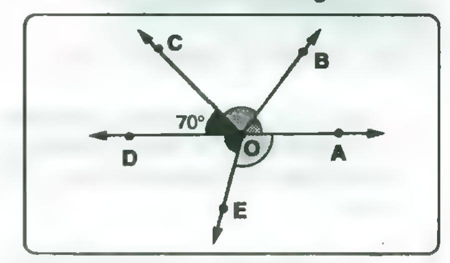


16. Dos ángulos suplementarios están en la relación de 3 y 5. Hallar la medida de cada uno de estos ángulos.

17. En la figura mostrada:

• $\alpha = x + 8°$ • $\beta = x + 12°$
• $\theta = x + 6°$ • $\phi = 2x - 6°$

Hallar la medida del ángulo "θ".



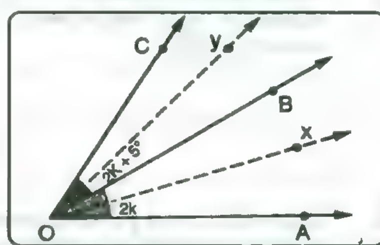
18. En la figura mostrada:

$\overrightarrow{OX}$ es bisectriz del ∠AOB

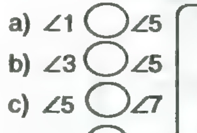
$\overrightarrow{Oy}$ es bisectriz del ∠BOC

m ∠ XOB = 16°

Calcular la medida del ángulo que forman dichas bisectrices.

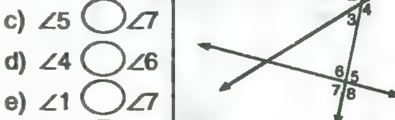


19. Dos rectas m y n, que se cortan en los límites del dibujo, estan cortados por una secante. ¿Qué signo, <, > ó =, corresponde a cada ◯?



a) ∠1 ◯ ∠5

b) ∠3 ◯ ∠5



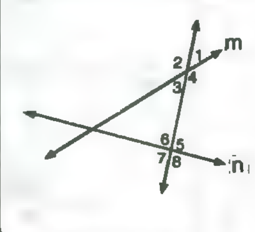
c) ∠5 ◯ ∠7

d) ∠4 ◯ ∠6

e) ∠1 ◯ ∠7

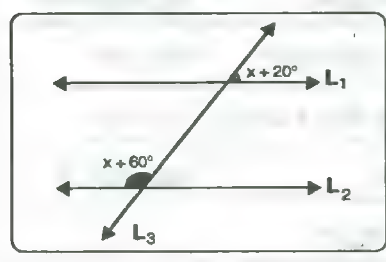


f) ∠2 ◯ ∠4



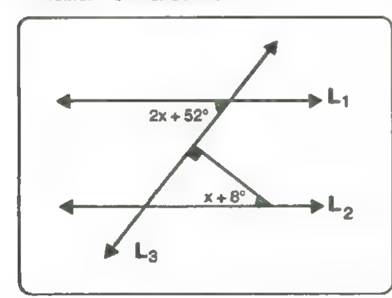
20. En la figura mostrada:

- Las rectas: L_1 y L_2 son paralelas
- La recta L_3 es secante o transversal
- Hallar el valor de "x".

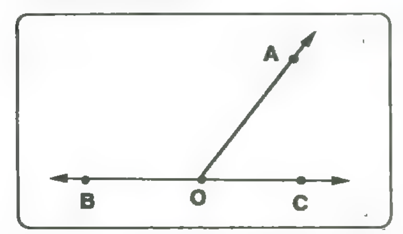


21. En la figura mostrada:

- Las rectas L_1 y L_2 son paralelas
- La recta L_3 es secante o transversal
- Hallar el valor de "x"

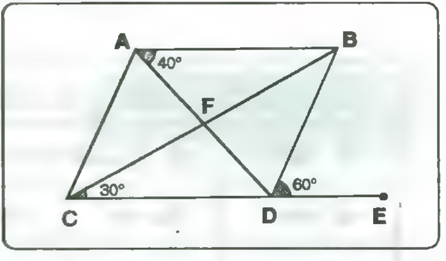


22. Si la m ∠AOC = 50°31'. ¿Cuánto mide el ∠AOB?



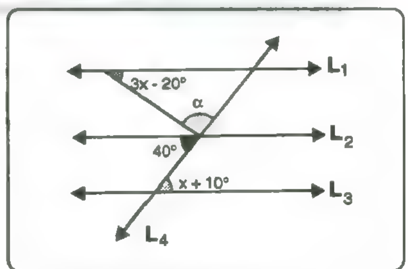
23. En la paralelogramos ABCD determine la medida, en grados, de los ángulos siguientes:

a) ∠ABC
b) ∠ADC
c) ∠ADB
d) ∠BFD



24. En la figura mostrada:

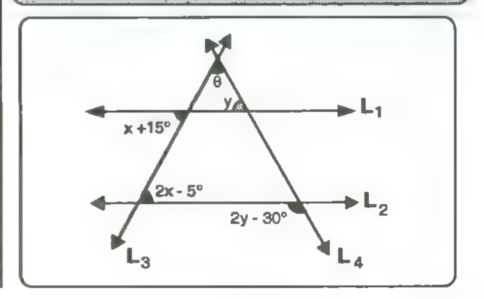
- Las rectas L_1, L_2 y L_3 son paralelas
- La recta L_4 es secante o transversal
- Hallar el valor del ángulo α.



25. En la figura mostrada:

- Las rectas L_1 y L_2 son paralelas
- La recta L_3 y L_4 son secantes
- Hallar el valor del ángulo "θ"

(Recuerda que: La suma de los ángulos internos de un triángulo es de 180°)

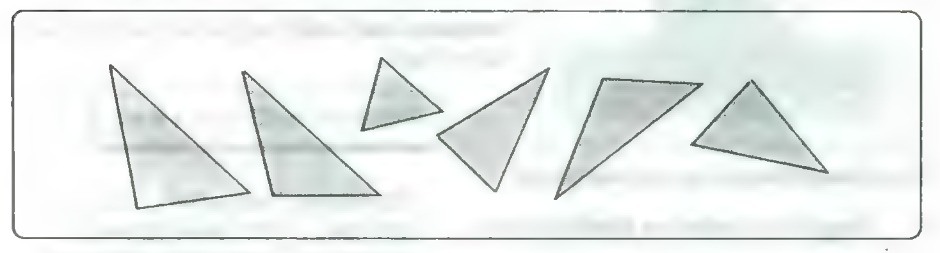


RESPUESTAS TALLER

10. a). $\angle COB = 153°7'$	b). $\angle COA = 26°43'$		c). $\angle AOD = 74°$
11. 19°41'	**12.** $\alpha = 49°6'12''$; $\beta = 130°53'48''$		**13.** 28°
14. 20°	**15.** 45°	**16.** 67°30' y 112°30'	**17.** 60°
18. 37°	**20.** 50°	**21.** 10	**22.** 129°29'
23. a). 30°, b). 40°; c). 80° y d) 70°			
24. 70°	**25.** 75°		

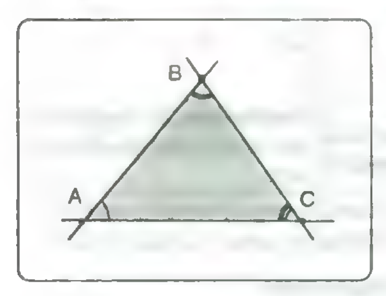
5.4 Triángulos: Elementos y Clases - Propiedades

Ya desde la escuela primaria sabemos cuál es la figura que se llama **triángulo.** Asi todos reconocen como triángulos los que aparecen dibujados a continuación.



Pero Ahora hay que tratar de dar una definición matemática de triángulo.

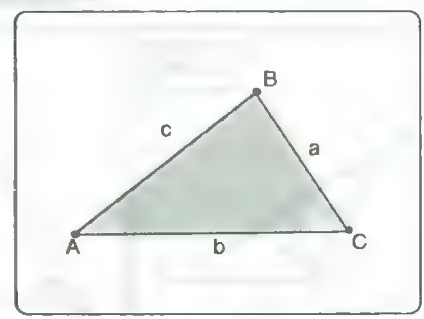
> ***Definición:*** *dados en un plano tres puntos A, B, C,* ***no alineados****, es decir, que no pertenecen a la misma recta, se llama triángulo ABC a la figura formada por los puntos comunes a los ángulos convexos $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ y $\widehat{BCA}$, es decir, el conjunto de puntos intersección de los tres ángulos.*



5.4.1. Notación: Para indicar el triángulo ABC se escribe: Δ ABC, luego:

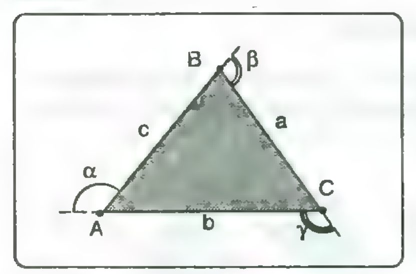
$$\Delta ABC = \widehat{BAC} \cap \widehat{ABC} \cap \widehat{BCA}$$

5.4.2. Elementos: Dado el triángulo ABC; los puntos **A, B y C** se llaman ***vértices;*** los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ se llaman ***lados,*** los ángulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ se llaman ***ángulos interiores*** del triángulo.



- En el Δ ABC el lado $\overline{AB}$ se dice opuesto al ángulo $\widehat{C}$.
- El lado $\overline{BC}$ opuesto al ángulo $\widehat{A}$
- El lado $\overline{AC}$ opuesto al ángulo $\widehat{B}$

* Los lados se designan también con una letra igual a la del vértice del ángulo opuesto, pero **minúscula**; así el lado $\overline{AB}$ se designa por la letra **c** el lado $\overline{BC}$ por la letra a y el lado $\overline{CA}$ por la letra **b**.
* Los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ se dicen **adyacentes** al lado **c.**
* Los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ se dicen **adyacentes al lado a**.
* Los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{C}$ se dicen **adyacentes** al lado **b**.



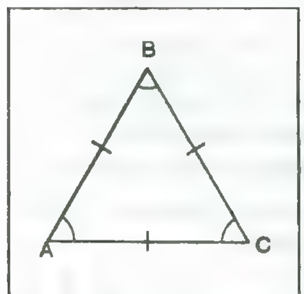
Los ángulos $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ y $\widehat{\gamma}$, adyacentes a los ángulos interiores del triángulo, se llaman **ángulos exteriores** del mismo.

Perímetro del Δ **ABC** es igual a la suma de sus lados; osea:

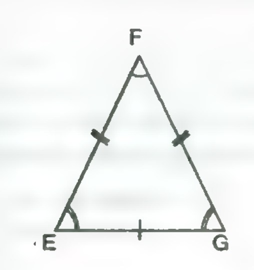
$$\text{Perímetro } \Delta \text{ ABC} = a + b + c$$

5.4.3.Clasificación de los triángulos:

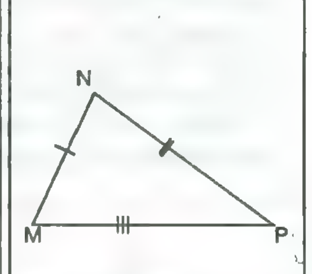
I. Según sus lados se clasifican en:
- *Equiláteros:* Tres lados iguales
- *Isósceles* : Dos lados iguales
- *Escalenos* : Tres lados desiguales



Equiláteros: Si sus tres lados son de igual longitud.



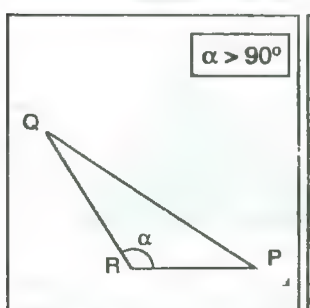
Isósceles: Si dos de sus lados son de igual longitud.



Escalenos: Si ningún par de lados tienen igual longitud.

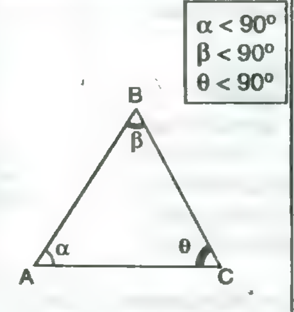
II. Según sus ángulos se clasifican en:
- **Oblicuángulos**
  - Acutángulos: 3 ángulos agudos
  - Obtusángulos: 1 ángulo obtuso
- **Rectángulos:** 1 ángulo recto

$\alpha > 90^{o}$

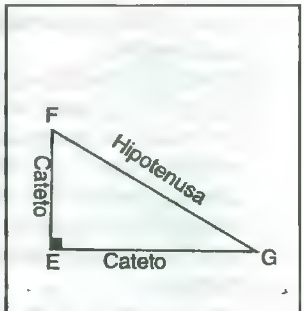


Obtusángulo: Si uno de sus ángulos mide más de 90º.

$\alpha < 90^{o}$
$\beta < 90^{o}$
$\theta < 90^{o}$



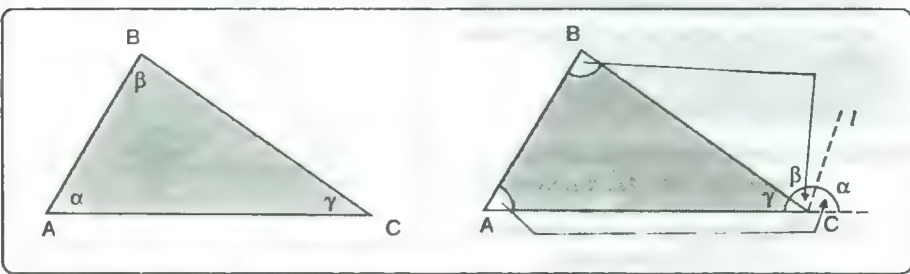
Acutángulo: Si sus tres ángulos son agudos.



Rectángulo: Si uno de sus ángulos mide 90º.

5.4.4 Propiedades:

Recorta un triángulo cualquiera en papel o cartulina.
Corta dos de sus ángulos y adósalos al tercero tal como se indica en la figura.



Observa:

1. *La suma de los tres ángulos interiores del triángulos es igual a 1 llano (2 rectos) ó 180º.*
2. *La suma de $\widehat{\alpha}$ y $\widehat{\beta}$ es igual al ángulo exterior adyacente a $\widehat{\gamma}$.*

Esta experiencia nos ha permitido descubrir una relación de los ángulos interiores de un triángulo y otra propiedad de los ángulos exteriores que podemos demostrar con carácter general.

Para la demostración te será útil esta observación:
Como $B\widehat{A}C = \widehat{\alpha}$ son ángulos correspondientes, entonces l es paralelo al lado BA. Recuerdala.

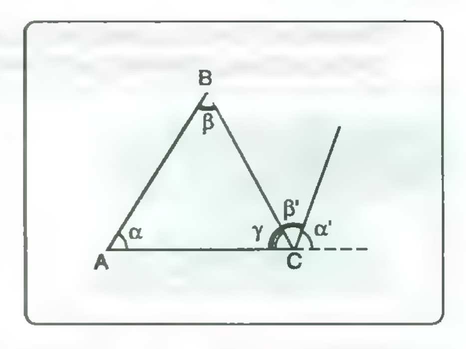
Propiedad de los ángulos interiores de un triángulo.

En todo triángulo, la suma de los ángulos interiores es igual a dos ángulos rectos (180º).

	Hipótesis	Tesis
B, β, α, γ, A, C	• Δ ABC • $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ y $\widehat{\gamma}$ ángulos interiores del Δ	• $\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} = 2R = 180^\circ$

Demostración:

- Se traza por C la recta ℓ paralelo al lado $\overline{AB}$. Se prolonga el lado $\overline{AC}$.
- Con vértice C quedan determinados tres ángulos cuya suma es un ángulo llano (180°)



$$\widehat{\alpha}' + \widehat{\beta}' + \widehat{\gamma} = 180° \qquad \text{......(1)}$$

Pero: $\widehat{\alpha}' = \widehat{\alpha}$ (ángulos correspondientes entre ℓ // $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ transversal).

y $\widehat{\beta}' = \widehat{\beta}$ (ángulos alternos internos entre ℓ // $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ transversal).

Reemplazando: $\widehat{\alpha}' = \widehat{\alpha}$ y $\widehat{\beta}' = \widehat{\beta}$ en la expresión (1), obtenemos:

$$\boxed{\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} = 180°} \qquad \text{L.q.q.d.}$$

> ***Observación:** Puedes demostrar esta propiedad trazando la recta paralela a uno cualquiera de los lados; por el vértice opuesto. Inténtalo.*

Propiedad de los Angulos Exteriores de un Triángulo.

> *En todo triángulo, cada ángulo exterior es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes a él.*

Hipótesis	Tesis
• Δ ABC • $\widehat{\gamma}$ ángulo exterior adyacente a $\widehat{C}$	• $\widehat{\gamma} = \widehat{A} + \widehat{B}$

Demostración:

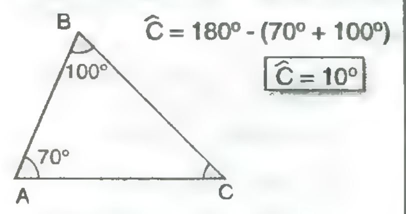
1. $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$ ....propiedad de los ángulos interiores
2. $\widehat{\gamma} + \widehat{C} = 180°$ ....por ser adyacentes

Restamos miembro a miembro las expresiones (1) y (2):

$$(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}) - (\widehat{\gamma} + \widehat{C}) = 180^\circ - 180^\circ$$

$$\widehat{A} + \widehat{B} - \widehat{\gamma} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{\gamma}} \quad \text{L.q.q.d.}$$

I. En todo triángulo un ángulo interiore es igual a 180°, menos la suma de los otros dos ángulos.

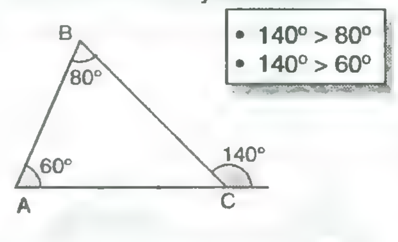


$\widehat{C} = 180^\circ - (70^\circ + 100^\circ)$

$\boxed{\widehat{C} = 10^\circ}$

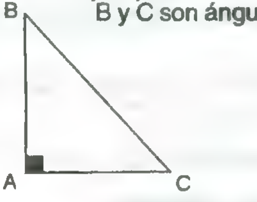
II. En todo triángulo, cada ángulo exterior es mayor que cualquiera de los ángulos interiores no adyacentes.

- $140^\circ > 80^\circ$
- $140^\circ > 60^\circ$

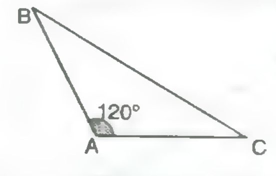


III. Si en un triángulo, un ángulo es recto (mide 90°) u obtuso (mide más de 90°), los otros dos son agudos.

Si: $\widehat{A} = 90^\circ$ (Recto)
Entonces:
$\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ son ángulos agudos.

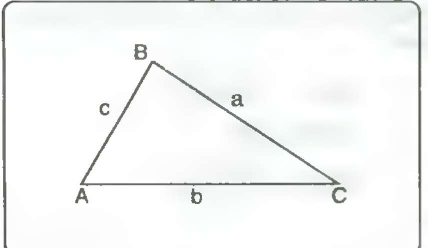


Si: $\widehat{A} = 120^\circ$ (obtuso)
Entonces:
$\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ son ángulos agudos.



- Angulo Agudo: Es aquel que mide menos de 90°

- **Otras Propiedades del Triángulo:**



1º) En todo triángulo un lado es menor que la suma de los otros dos; pero mayor que su diferencia.

En el Δ ABC: Lado menor = C

Luego:

$$\boxed{b - a < c < b + a}$$

2º) En todo triángulo al mayor lado se opone el mayor ángulo.

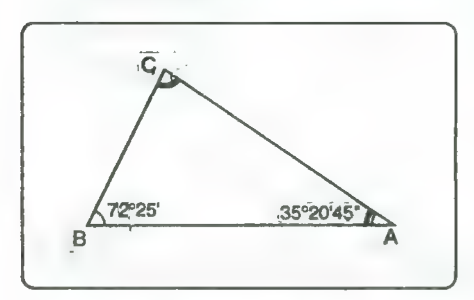
3º) En todo triángulo al menor lado se opone el menor ángulo.

4º) En todo triangulo a ángulos iguales, se oponen lados iguales.
5º) La suma de los ángulos exteriores de un triángulo o de cualquier polígono es igual a 360º.

EJERCICIO RESUELTOS

1. En el triángulo ABC, el $\hat{A} = 35°20'45''$ y $\hat{B} = 72°25'$. Calcular el ángulo $\hat{C}$.

Resolución: **Por propiedad:** $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$



Luego:

$35°20'45'' + 72°25' + \hat{C} = 180°$

$107°45'45'' + \hat{C} = 180°$

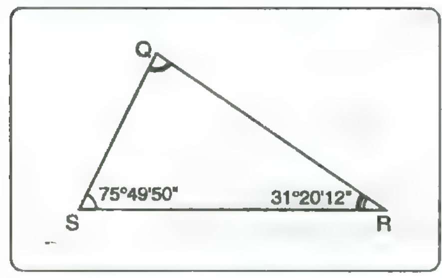
$\hat{C} = 180° - 107°45'45''$

$\hat{C} = 179°59'60'' - 107°45'45''$

$\therefore$ $\boxed{\hat{C} = 72°14'15''}$ **Rpta.**

2. En el triángulo QRS, el $\hat{R} = 31°20'12''$ y $\hat{S} = 75°49'50''$. Calcular el ángulo $\hat{Q}$.

Resolución: **Por propiedad:** $\hat{R} + \hat{S} + \hat{Q} = 180°$



Luego:

$31°20'12'' + 75°49'50'' + \hat{Q} = 180°$

$106°69'62'' + \hat{Q} = 180°$

$\hat{Q} = 180° - 106°69'62''$

$\hat{Q} = 179°59'60'' - 106°69'62''$ ....(II)



° Como se podrá observar no se pueden restar los minutos ni los segundos, pues para esto procedemos de la manera siguiente:

$179°59'60'' = 179°58'(1'60'')$; pero: $\boxed{1' = 60''}$

$= 179°58'(60''60'') = 179°58'120''$

$= 178°(1°58')120''$; pero: $\boxed{1° = 60'}$

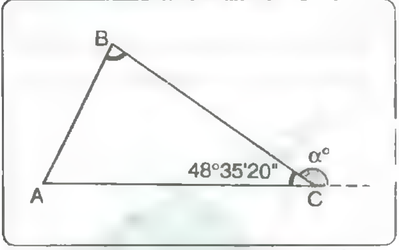
$= 178°(60'58')\ 120''$

$\boxed{179°59'60'' = 178°118'120''}$ .....(II)

Reemplazamos (II) en (I): $\widehat{Q} = 178°118'120" - 106°69'62" =$ $\boxed{72°49'58"}$ **Rpta.**

3. Un ángulo de un triángulo es de 48°35'20"; calcular el ángulo exterior del mismo vértice.

Resolución:



Por propiedad:

$$\alpha° + 48°35'20" = 180°$$

$$\alpha = 180° - 48°35'20"$$

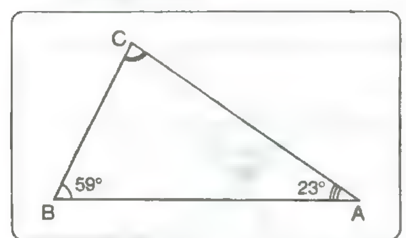
$$\Downarrow$$

$$\alpha = 179°59'60" - 48°35'20"$$

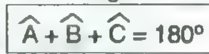
$\therefore$ $\boxed{\alpha = 131°24'40"}$ **Rpta.**

4. El triángulo ABC, en cual $\widehat{A} = 23°$ y $\widehat{B} = 59°$. De que clase de triángulo se trata.

Resolución:



Por propiedad:



$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$$

Luego:

$$23° + 59° + \widehat{C} = 180°$$

$$82° + \widehat{C} = 180°$$

$$\widehat{C} = 180° - 82°$$

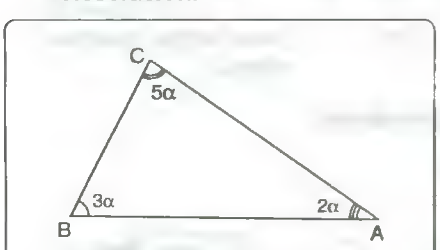
Donde:

$$\boxed{\widehat{C} = 98°}$$

$\therefore$ Se trata de un triángulo obtusángulo porque uno de sus ángulos mide más de 90°. ($\widehat{C} = 98°$). **Rpta.**

5. En un triángulo ABC: $\widehat{A} = 2\alpha$; $\widehat{B} = 3\alpha$ y $\widehat{C} = 5\alpha$. Hallar el valor de cada ángulo de dicho triángulo.

Resolución:



Por propiedad:

$$\boxed{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°}$$

Luego:

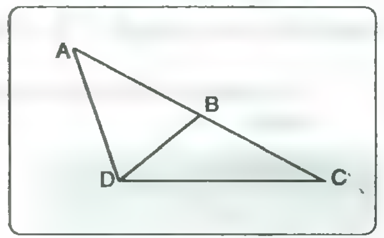
$$2\alpha + 3\alpha + 5\alpha = 180°$$

$$10\alpha = 180°$$

$$\alpha = \frac{180°}{10} \Rightarrow \therefore \boxed{\alpha = 18°}$$

$\therefore$ Cada ángulo del Δ ABC miden: $\widehat{A} = 2\alpha = 2\,(18°) = 36°$; $\widehat{B} = 3\alpha = 3\,(18°) = 54°$ y $\widehat{C} = 5\alpha = 5(18°) = 90°$ **Rpta.**

6. Si: $\overline{BD} \cong \overline{BC}$, m BDC = 23° y m ∠ A = 55°.
¿Cuánto mide el ángulo ADC?



Resolución:

Si: $\overline{BD} \cong \overline{BC}$ y m ∠ BDC = 23°

Entonces: El Δ DBC, es isósceles, siendo:
m ∠ BDC = m ∠ BCD = 23°

En el Δ ADC: **Por propiedad:**

$\widehat{A} + \widehat{D} + \widehat{C} = 180°$

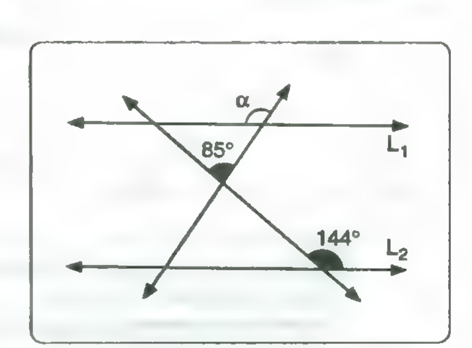
⇩ ⇩ ⇩

55° + ∠ ADC + 23° = 180°

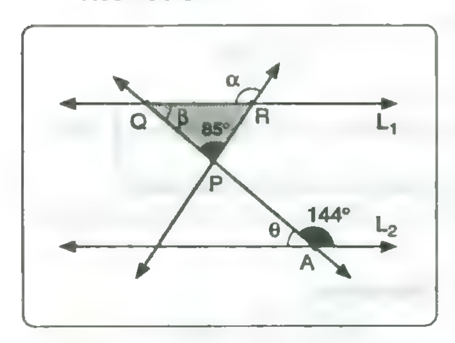
m ∠ ADC + 78° = 180°

∴ **m ∠ ADC = 102°** **Rpta.**

7. En la figura mostrada: $L_1 // L_2$.
Calcular la medida del ángulo "α"



Resolución:



De la figura: **Por propiedad:**

θ + 144° = 180° ⇨ **θ = 36°**

- β = θ ..... Por ser ángulo alternos internos

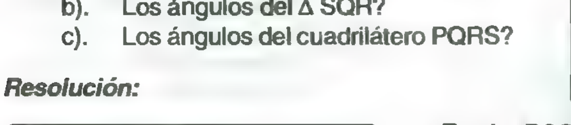
- En el Δ PQR: **Por propiedad del ángulo exterior:**

85° + β = α ⇨ 85° + θ = α

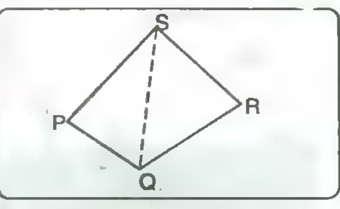
⇩

85° + 36° = α ⇨ ∴  **Rpta.**

8. ¿Cuál es la suma de las medidas de:



a). Los ángulos del Δ PQS?
b). Los ángulos del Δ SQR?
c). Los ángulos del cuadrilátero PQRS?



Resolución:

- En el Δ PQS: **Por propiedad:**

$\widehat{a}+\widehat{b}+\widehat{c}=180°$ ......(I)

- En el Δ SQR: **Por propiedad:**

$\widehat{d}+\widehat{e}+\widehat{f}=180°$ ....(II)

Luego:

- En el cuadrilátero PQRS:

$\widehat{P}+\widehat{S}+\widehat{R}+\widehat{Q}=\widehat{a}+(\widehat{b}+\widehat{e})+\widehat{f}+(\widehat{c}+\widehat{d})$

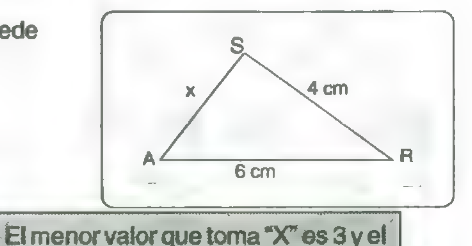
$\widehat{P}+\widehat{S}+\widehat{R}+\widehat{Q}=(\widehat{a}+\widehat{b}+\widehat{c})+(\widehat{d}+\widehat{e}+\widehat{f})$ ....(III)

Reemplazamos (I) y (II) en (III):

$$\widehat{P}+\widehat{S}+\widehat{R}+\widehat{Q}=180°+180°=\boxed{360°}$$ **Rpta.**

9. Dado el Δ ABC:

- Cuál es el menor perímetro que puede tener dicho triángulo.



Resolución:

Por propiedad: $(6 - 4) < x < (6 + 4)$

$2 < x < 10$

El menor valor que toma "X" es 3 y el mayor valor que toma "x" es 9.

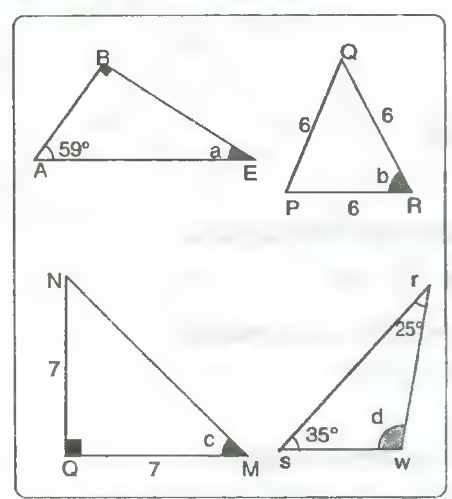
Luego; como nos piden el menor perímetro del Δ ABC; el valor de "X" debe ser igual a 3.

$\therefore$ Perímetro Δ ABC = 4 + 6 + x = 4 + 6 + 3 = 13 cm **Rpta.**

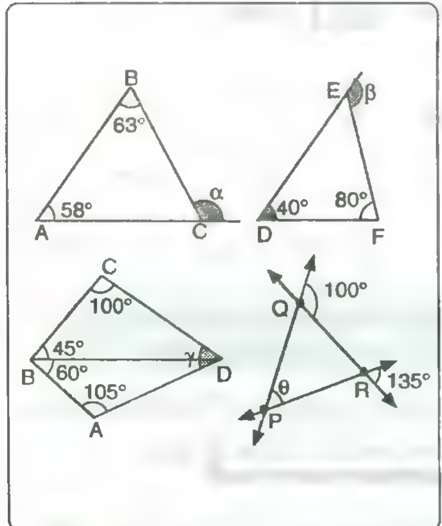


TALLER DE EJERCICIOS Nº 71

1. En las figuras siguientes se muestran las medidas en grados de algunos ángulos. Calcule las medidas delos ángulos "a"; "b"; "c", "d".



2. En las figuras siguientes las medidas en grados de algunos ángulos. Calcule las medidas de los ángulos "α", "β", "γ" y "θ".



3. En el triángulo MNP el $\widehat{M} = 101°25'40"$ y $\widehat{N} = 47°10'8"$. Calcular el $\widehat{P}$.

4. En el triángulo xyz el $\widehat{x} = 41°45'59"$ y $\widehat{z} = 37°19'$. Calcular $\widehat{y}$.

5. Clasificar por sus ángulos cada uno de los siguientes triángulos:

   a) Δ MNP en el cual $\widehat{M} = 48°25'$ y $\widehat{N} = 51°33'$

   b) Δ xyz en el cual $\widehat{x} = 37°49'20"$ y $\widehat{y} = 52°10'40"$.

6. Un ángulo de un triángulo es de 63°47'40". Calcular el ángulo exterior del mismo vértice.

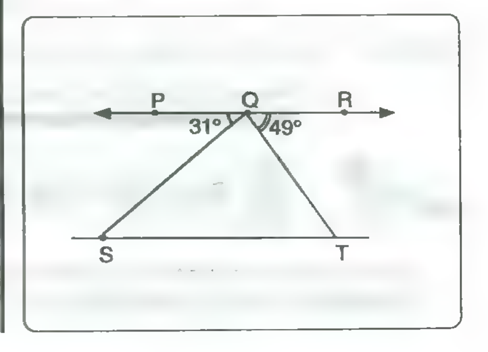
7. Si en el Δ ABC se designa con $\widehat{\alpha}$ el ángulo exterior adyacente a $\widehat{A}$, con $\widehat{\beta}$ el ángulo exterior adyacente a $\widehat{B}$ y con $\widehat{\gamma}$ al ángulo exterior adyacente al ángulo C, Calcular los ángulos que se indican a continuación:

   Si: B = 32° y γ = 175° ; Calcular: $\widehat{A}$
   Si: C = 95° y α = 140°; Calcular: $\widehat{B}$
   Si: A = 26° y β = 84° ; Calcular: $\widehat{C}$

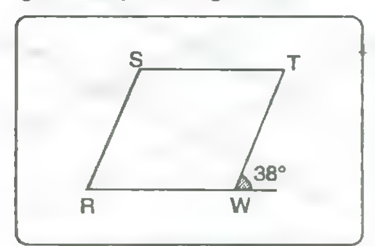
8. ¿Cuántos ángulos exteriores de un triángulo se pueden dibujar en un mismo vértice del triángulo?

9. En el Δ QST, $\overleftrightarrow{PR} // \overleftrightarrow{ST}$, m ∠PQS = 31° y m ∠RQT = 49°

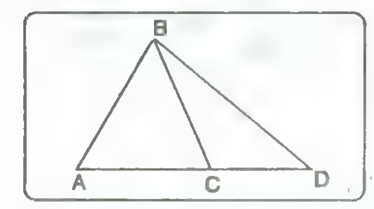
   a) ¿Cuál es m ∠SQT?
   b) ¿Cuál es m ∠QST?
   c) ¿Cuál es m ∠QTS?
   d) ¿Cuál es m ∠SQT + m ∠QST + m ∠QTS



10. ¿Cuáles son las medidas de los ángulos del paralelogramo.



11. Si: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
m $\angle BCA = 56°$ y
m $\angle D = 35°$
¿Cuánto es m $\angle BAD$



12. En el paralelogramo ABCD. Determine la medida en grados, de los ángulos siguientes:

a) $\angle$ ABC
b) $\angle$ ADB
c) $\angle$ ADC
d) $\angle$ BFD

13. $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ son ángulos de un triángulo completa el cuadro calculando los ángulos que faltan.

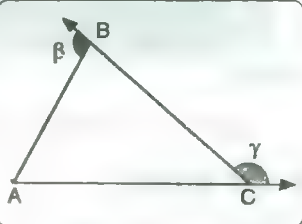
	$\widehat{A}$	$\widehat{B}$	$\widehat{C}$
1	35°12	49°46'	
2		72°17'	56°7'
3	105°12'	32°9'	
4	97°40'		26°25'

14. Dado el Δ ABC, Si: $\widehat{A} = 5\alpha$; $\widehat{B} = 3\alpha$ y $\widehat{C} = 4\alpha$. Hallar la medida de cada uno de dichos ángulos.

15. **Datos**:

$\widehat{\beta} = 118°30'$

$\widehat{\gamma} = 123°15'$



Calcular:

a) m $\angle$ A
b) m $\angle$ B
c) m $\angle$ C

16. $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ y $\widehat{\gamma}$ son ángulos exteriores de un triángulo. Calcula los ángulos que faltan en el cuadro siguiente:

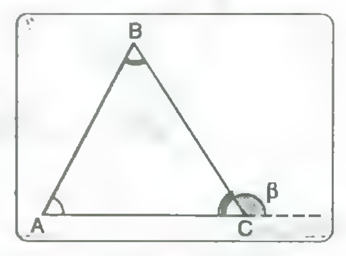
	$\widehat{\alpha}$	$\widehat{\beta}$	$\widehat{\gamma}$
1	54°	155°	
2		90°	117°
3	125°7'		148°12'
4		100°25'	131°30'

17. **Datos:**

$\widehat{A} = 48°22'32"$ $\widehat{B} = 3\widehat{A} - 90°34'55"$

Calcula:

a) m $\angle$ B
b) m $\angle$ C
c) m $\angle \beta$

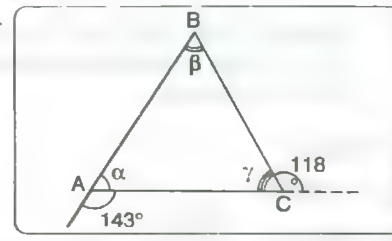


18. Dibuja un triángulo que tenga:

a) Un ángulo exterior agudo.
b) Un ángulo exterior recto.

¿Qué clase de triángulo obtienes en cada caso?

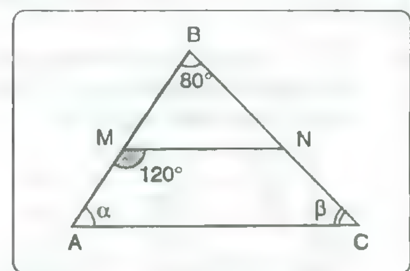
19.



Calcular:

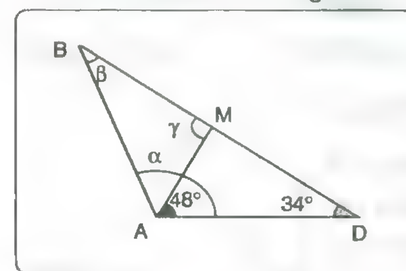
a) m ∠α b) m ∠β c) m ∠γ

20. Si: $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$.



Calcular: a) m ∠α b) m ∠β

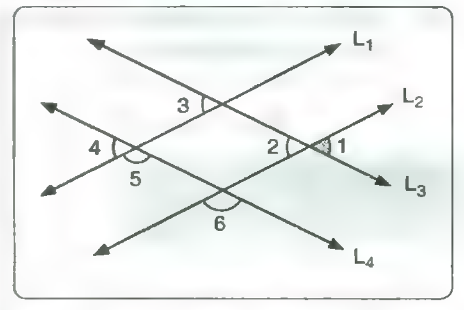
21. Si: $\overline{AM}$ es bisectriz del ángulo A.



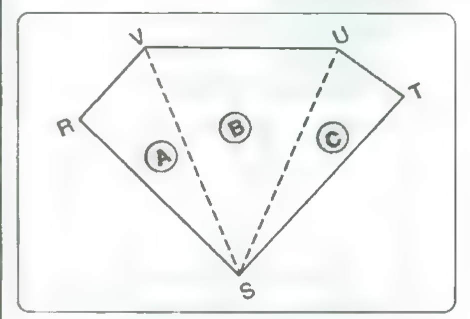
Calcular:

a) m ∠α b) m ∠β c) m ∠γ

22. En la figura que sigue; $L_1 \parallel L_2$ y $L_3 \parallel L_4$; el ángulo 1 mide 50°. Calcule los otros ángulos indicados.



23. ¿Cuál es la suma de las medidas de:

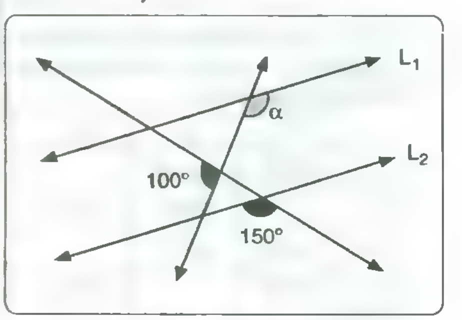


a) Los ángulos del triángulo A?
b) Los ángulos del triángulo B?
c) Los ángulos del triángulo C?
d) Los ángulos del pentagono RSTUV?

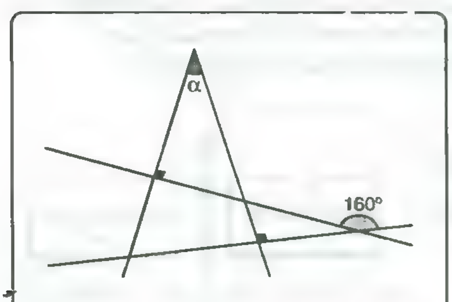
24. ¿Cuál es la suma de las medidas de los ángulos internos de un exágono?

25. Si: $L_1 \parallel L_2$

Calcular: a). m ∠α

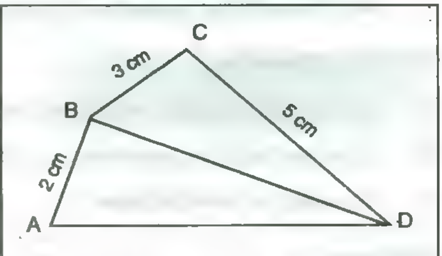


26. En la figura mostrada calcular la m∠α.



27. Dado el cuadrilátero ABCD.

Cuál es el máximo perímetro que puede tener dicho cuadrilátero.



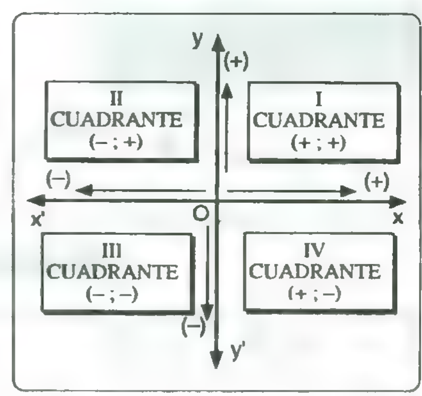
RESPUESTAS TALLER

1.	a = 39°, b = 60°, c = 45° y d = 120°	**14.**	$\widehat{A}$ = 75, $\widehat{B}$ = 45° y $\widehat{C}$ = 60°
2.	α = 121°, β = 120°, γ = 50°, θ = 65°	**15.**	a) 61°45', b) 61° 30', c) 56°45'
3.	31°24'12"	**16.**	1. 151° 2. 153° 3. 86°41' 4. 28°5'
4.	100°55'1"	**17.**	a). 54°32'61" b). 77°4'27" c). 102°55'33"
5.	a). Acutángulo b) Rectángulo	**19.**	a) 37° b) 81° c). 62°
6.	116°12'20"	**20.**	a) 60° b) 40°
7.	$\widehat{A}$ = 27°, $\widehat{B}$ = 135° $\widehat{C}$ = 58°	**21.**	a) 82° b) 50° c) 96°
9.	a). 100°, b) 31°, c). 49°, d).180°	**22.**	∠2 = 50°; ∠3 = 50°; ∠4 = 50°; ∠5 = 130°; ∠6 = 130°
10.	142° y 38°	**23.**	a). 180° b). 180° c) 180° d) 540°
11.	68°	**24.**	720°
12.	a) 30°, b) 100°, c) 20°, d) 50°	**25.**	110°
13.	1. 95°2' 2. 51°36' 3. 42°39' 4. 55°55'	**26.**	20°
		27.	18 cm

5.5. El Plano Cartesiano:

5.5.1.Plano Cartesiano.- Es la reunión de dos rectas dirigidas perpendicular, una horizontal y otra vertical, que se cortan en un punto ("o") sobre un plano.
Por convención, posee las siguientes características o propiedades.

Ejes Coordenados



$\overleftrightarrow{xx'}$: Es el eje de las **abscisas** o eje de las x.

$\overleftrightarrow{yy'}$: Es el eje de las **ordenadas** o eje de las y.

"o" : Es el eje de **coordenadas**

Semiejes

$\overrightarrow{Ox}$: Es el semieje (+) de las **abscisas**

$\overrightarrow{Ox'}$: Es el semieje (-) de las **abscisas**

$\overrightarrow{Oy}$: Es el semieje (+) de las **ordenadas**

$\overrightarrow{Oy'}$: Es el semieje (-) de las **ordenadas**

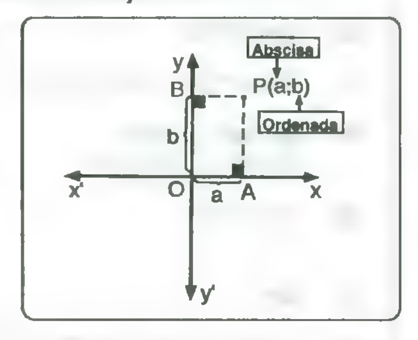
Cuadrantes

xoy : Es el I cuadrante.
x'oy' : Es el III cuadrante

yox' : Es el II cuadrante
y'ox : Es el IV cuadrante

5.5.2.Abscisa y Ordenada de un Punto:

Un punto P cualquiera del plano cartesiano esta determinado por dos números, que miden en magnitud y signo su distancia a cada uno de los ejes.



Abscisa del Punto: Es la distancia del punto al eje de ordenadas.

Ejemplo: PB = a

Ordenada del Punto: Es la distancia del punto al Eje de Abscisas.

Ejemplo: PA = b

Toda distancia que se mida se hará siempre apartir del origen de coordenadas y sobre los ejes.

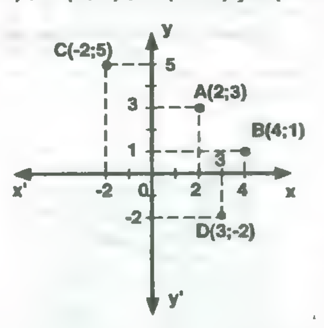
- ***Simbología:*** Un punto P que tiene como abscisa **a** y como ordenada **b**, se escribe: P(a; b); leyendose; punto P cuya abscisa es a y ordenada b; siempre en ese orden el conjunto (a; b); se denomina; coordenadas del punto P.

5.5.3.Determinación de un Punto por sus coordenadas.

Todo punto del Sistema Cartesiano estará siempre determinado por sus coordenadas (**Abscisa** y **Ordenada**).

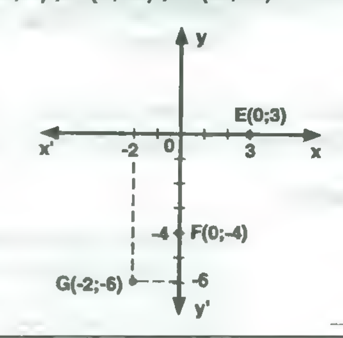
Ejemplo 1: Ubicar los siguientes puntos en el Plano Cartesiano.

A (2; 3) ; B (4; 1) ; C (-2; 5) y D(3; -2)



Ejemplo 2: Ubicar los siguientes puntos en el Plano Cartesiano.

E (3; 0) ; F (0; -4) ; G (-2; -6)



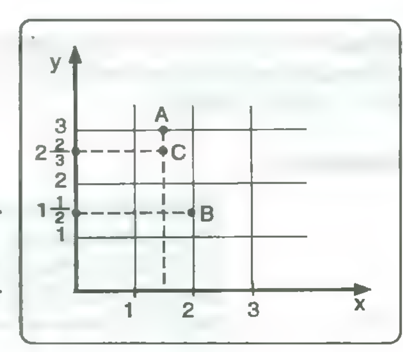
Nota: *Todo punto P determina un par ordenado (a; b) y todo par ordenado (a, b) determina un punto. Por consiguiente, no habrá confusión si pasamos por alto la diferencia entre puntos y pares de números. Esto nos permitirá abreviar utilizando frases convenientes tales como "El punto (2; 3)" y "P = (3; 4)".*

Coordenadas con Números Racionales:

Trazar una Gráfica con números racionales es semejante a trazar gráficas con números enteros. Al marcar puntos para coordenadas de racionales, a menudo debes aproximar su localización. Es posible que necesites hallar las coordenadas de un punto dado, representadas por racionales.

Ejemplo: Ubicar los siguientes puntos en el Plano Cartesiano.

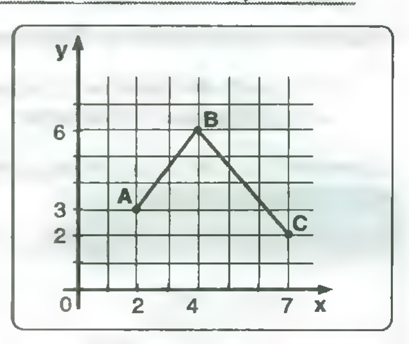
$$A\left(1\frac{1}{2};3\right) \; ; \; B\left(2;1\frac{1}{2}\right) \; ; \; C\left(1\frac{1}{2};2\frac{2}{3}\right)$$



5.5.4.Ubicar puntos con coordenadas racionales y describe sus trayectorias.

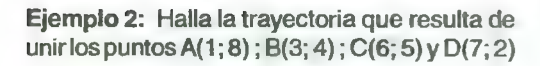
Trayectoria: Es la línea recta o curva que describe un móvil.

Ejemplo 1: Halla la trayectoria que resulta de unir los puntos A(2; 3); B(4; 6) y C(7;2).

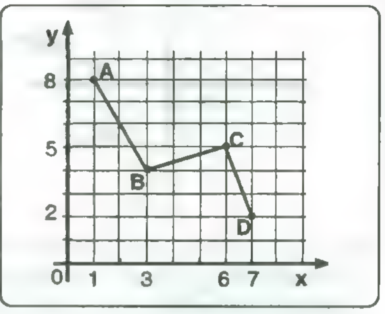


Resolución:

* Para hallar la trayectoria que ha resultado de unir los puntos A, B y C, se ha tenido que unir A con B y luego B con C. (Ver figura).

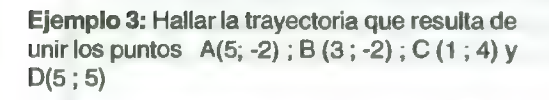


Ejemplo 2: Halla la trayectoria que resulta de unir los puntos A(1; 8) ; B(3; 4) ; C(6; 5) y D(7; 2)

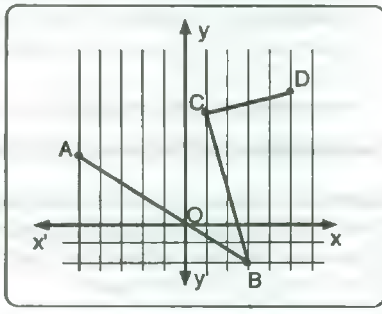


Resolución:

* Para hallar la trayectoria que ha resultado de unir los puntos A, B, C y D, se ha tenido que unir A con B; B con C y C con D. (Ver figura).

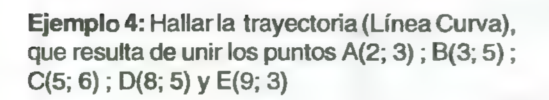


Ejemplo 3: Hallar la trayectoria que resulta de unir los puntos A(5; -2) ; B (3 ; -2) ; C (1 ; 4) y D(5 ; 5)



Resolución:

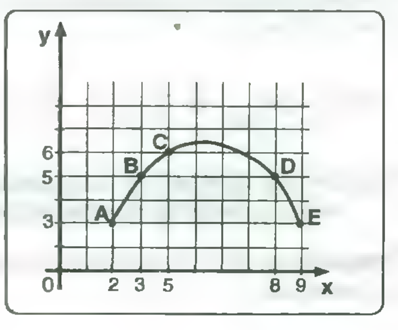
* Para hallar la trayectoria que ha resultado de unir los puntos A, B, C y D se ha tenido que unir A con B; B con C y C on D (Ver figura).



Ejemplo 4: Hallar la trayectoria (Línea Curva), que resulta de unir los puntos A(2; 3) ; B(3; 5) ; C(5; 6) ; D(8; 5) y E(9; 3)



Resolución:

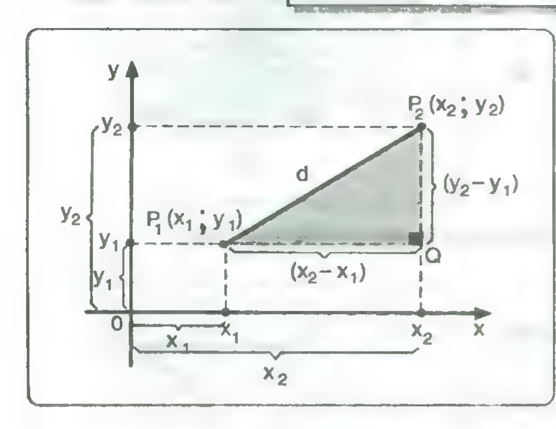


* Para hallar la trayectoria que ha resultado de unir los puntos A, B, C, D y E, se ha tenido que unir A con B, B con C, C con D y D con E. (Ver figura).

5.5.5. La Distancia entre dos puntos:

La distancia **d** entre dos puntos $P_1(x_1; y_1)$ y $P_2(x_2; y_2)$; puede encontrarse usando la fórmula:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



- El diagrama adjunto muestra que esta fórmula proviene de una aplicación del **Teorema de Pitágoras**, veamos:

$$\overline{P_1P_2}^2 = \overline{P_1Q}^2 + \overline{P_2Q}^2$$

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Extrayendo la raiz cuadrada a ambos miembros, obtenemos la fórmula para d. **(Fórmula)**

$$\therefore \quad d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo 1: Hallar la distancia del punto A(2; 3) al punto B(5 ; 7)

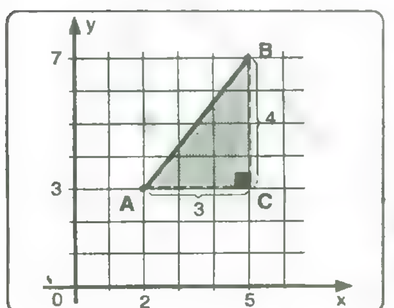
Resolución: Sea el primer punto $(x_1; y_1)$; luego: $x_1 = 2$; $y_1 = 3$

Sea $(x_2; y_2)$ el segundo punto; luego: $x_2 = 5$; $y_2 = 7$

Reemplazando estos valores en la fórmula, obtenemos:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \Rightarrow d = \sqrt{(5-2)^2 + (7-3)^2}$$

$$d = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} \Rightarrow \therefore \quad d = 5$$



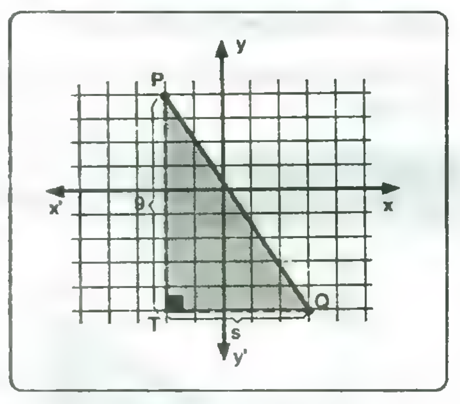
* La distancia entre dos puntos puede hallarse rápidamente del diagrama como sigue: a través de "A" trazar una línea paralela al eje x. y a través de "B"; una línea paralela al eje y. Estas paralelas se encuentran en "C". Como la abscisa de A es 2 y la abscisa de B es 5, la longitud de AC = 3, como la ordenada de A es 3 y la de B es 7, la longitd BC = 4. Por el Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \Rightarrow \overline{AB}^2 = 3^2 + 4^2$$

$$\overline{AB}^2 = 9 + 16 = 25$$

$$\therefore \quad \overline{AB} = \sqrt{25} = 5$$

Ejemplo 2: Hallar la distancia del punto P (-2; 4) al punto Q(3; -5)



Resolución:

En el PTQ: Por el Teorema de Pitágoras: obtenemos:

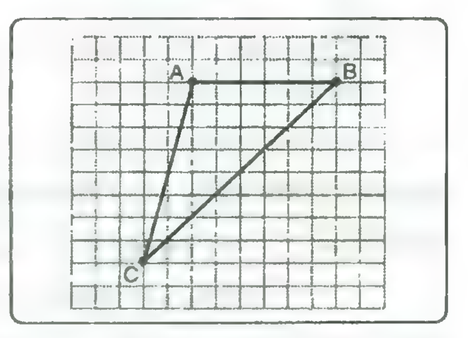
$$\overline{PQ}^2 = \overline{TQ}^2 + \overline{PT}^2$$

$$\overline{PQ}^2 = 5^2 + 9^2 = 25 + 49$$

$$\overline{PQ}^2 = 74$$

$$\therefore \quad \boxed{\overline{PQ}^2 = \sqrt{74}}$$

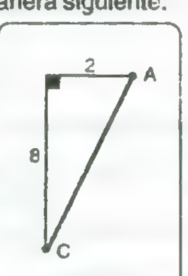
Ejemplo 3: En la figura mostrada: Hallar el perímetro del triángulo ABC.



Resolución:

* Calculamos $\overline{AC}$ de la manera siguiente:

Por el Teorema de Pitágoras



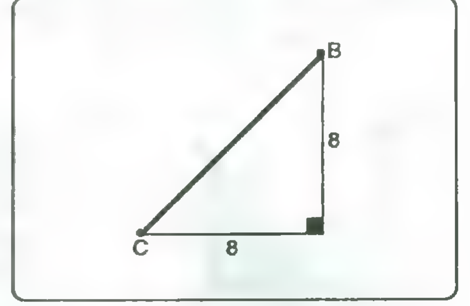
$$\overline{AC}^2 = 2^2 + 8^2$$

$$\overline{AC}^2 = 4 + 64 = 68$$

$$\overline{AC} = \sqrt{68} = \sqrt{4.17}$$

$$\therefore \quad \boxed{\overline{AC} = 2\sqrt{17}}$$

* Calculamos BC de la manera siguiente:



Por el Teorema de Pitágoras:

$$\overline{BC}^2 = 8^2 + 8^2 = 2(8)^2$$

$$\overline{BC} = \sqrt{2(8)^2} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{8^2} = \sqrt{2}\cdot 8$$

$$\therefore \quad \boxed{\overline{BC} = 8\sqrt{2}}$$

Luego: Perímetro ΔABC = Suma de sus lados

$$= \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$$

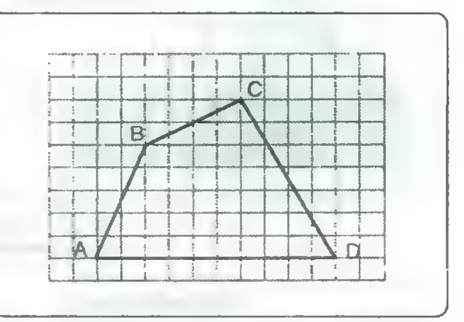
$$= 6 + 8\sqrt{2} + 2\sqrt{17}$$

$$\therefore \quad \boxed{\text{Perímetro } \Delta\ ABC = 6 + 8\sqrt{2} + 2\sqrt{17}}$$ **Rpta.**

Ejemplo 4: En la figura mostrada: Hallar el perímetro del cuadrilátero ABCD.

Resolución:

* Calculamos $\overline{AB}$ de la manera siguiente:

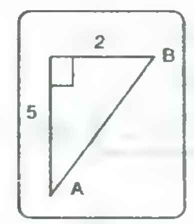


Por el Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AB}^2 = 2^2 + 5^2$$

$$\overline{AB}^2 = 4 + 25 = 29$$

$$\therefore \quad \boxed{\overline{AB} = \sqrt{29}}$$



Calculamos $\overline{BC}$ de la manera siguiente:

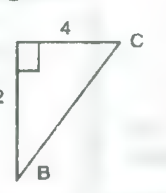
Por el Teorema de Pitágoras

$$\overline{BC}^2 = 2^2 + 4^2$$

$$\overline{BC}^2 = 4 + 16 = 20$$

$$\overline{BC} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5}$$

$$\therefore \quad \boxed{\overline{BC} = 2\sqrt{5}}$$



Calculamos $\overline{CD}$ de la manera siguiente:

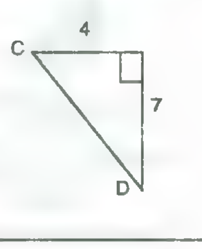
Por el Teorema de Pitágoras

$$\overline{CD}^2 = 4^2 + 7^2$$

$$\overline{CD}^2 = 16 + 49$$

$$\overline{CD}^2 = 65$$

$$\therefore \quad \boxed{\overline{CD} = \sqrt{65}}$$



Luego:

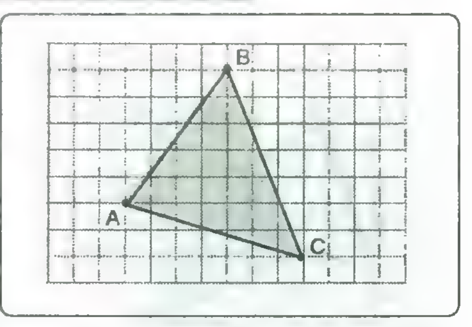
$$\text{Perímetro } \triangle \text{ ABCD} = \underbrace{\overline{AB}} + \underbrace{\overline{BC}} + \underbrace{\overline{CD}} + \underbrace{\overline{DA}}$$

$$= \sqrt{29} + 2\sqrt{5} + \sqrt{65} + 10$$

$$\therefore \quad \boxed{\text{Perímetro } \triangle \text{ ABCD} = \sqrt{29} + 2\sqrt{5} + \sqrt{65} + 10} \quad \textbf{Rpta.}$$

Ejemplo 5: En la figura mostrada:

Calcular el área del triángulo ABC.

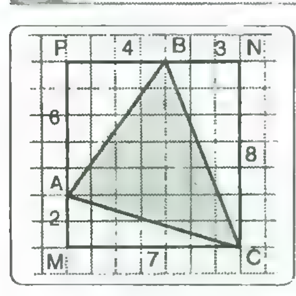


Resolución:

Para calcular el área del Δ ABC, se procede de la manera siguiente:

Al área del rectángulo MCNP le quito las áreas de los triángulos APB; BNC y AMC, quedando asi el área del Δ ABC. Osea:

Area Δ ABC = área ▭ MCNP - área ◸ APB - área ◹ BNC - área ◺ AMC



Luego:

$$\text{área } \Delta\, ABC = \overline{MC} \times \overline{CN} - \frac{\overline{PB} \times \overline{AP}}{2} - \frac{\overline{BN} \times \overline{CN}}{2} - \frac{\overline{MC} \times \overline{AM}}{2}$$

$$= 7 \times 8 - \frac{4 \times 6}{2} - \frac{3 \times 8}{2} - \frac{7 \times \not{2}}{\not{2}}$$

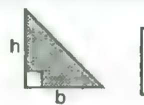
$$= 56 - 12 - 12 - 7$$

$$= 25$$

$\therefore$ **área Δ ABC = 25 u²** **Rpta.**

Recuerda Que:

- Area del Triángulo Rectángulo.



$$\text{área} = \frac{b \times h}{2}$$

- Area del Rectángulo

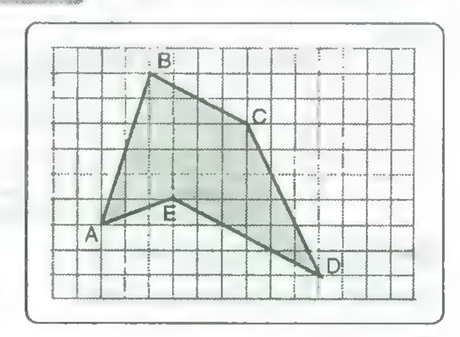


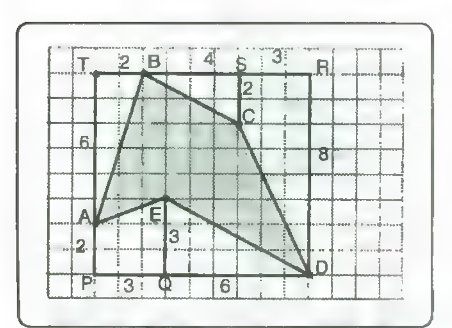
Nota: u² Significa unidades cuadradas, estas unidades pueden ser cualquier medida de longitud; osea; cm, m, mm, etc.

Ejemplo 6:

En la figura mostrada:

Calcular el área del pentágono ABCDE.





Resolución:

Para calcular el área del pentágono ABCDE (Región sombreada); se procede de la manera siguiente:

Al área del rectángulo PDRT le quitamos las áreas de los triángulos ATB; BSC, EQD y de los trapecios SCDR y APEQ, osea:

Area del pentágono ABCDE = área ▭ PDRT - area ◸ ATB - área ◹ BSC - área ◺ EQD - área ◺ SCDR - área ◺ APEQ.

$$= \overline{PD}\times\overline{DR} - \frac{\overline{TB}\times\overline{AT}}{2} - \frac{\overline{BS}\times\overline{CS}}{2} - \frac{\overline{QD}\times\overline{EQ}}{2} - \frac{(\overline{DR}+\overline{SC})}{2}\times\overline{SR} - \frac{(\overline{EQ}+\overline{AP})}{2}\times\overline{PQ}$$

$$= 9\times 8 - \frac{2\times 6}{2} - \frac{4\times 2}{2} - \frac{6\times 3}{2} - \left(\frac{8+2}{2}\right)\times 3 - \left(\frac{3+2}{2}\right)\times 3$$

$$= 72 - 6 - 4 - 9 - 15 - 7{,}5$$

$$= 30{,}5u^2$$

Recuerda Que:

- área del Trapecio Rectángulo

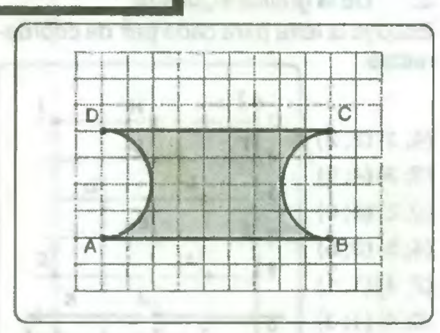
$$\text{Area} = \left(\frac{B+b}{2}\right)\times h$$

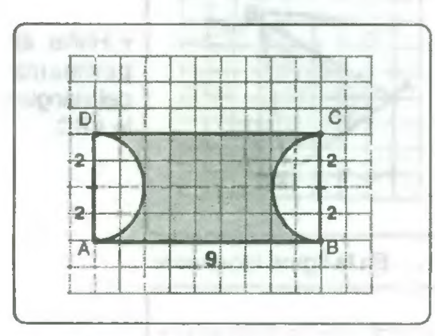
∴ Area del pentágono ABCDE = 30,5 u^2 **Rpta.**

Ejemplo 7:

En la figura mostrada:

El área de la Región sombreada.

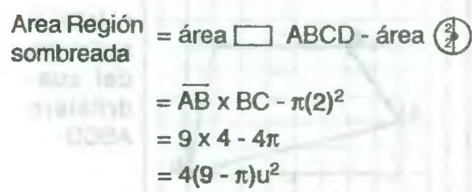




Resolución:

- Para calcular el área de la Región sombreada, se procede de la manera siguiente:

- Al área del rectángulo ABCD le quitamos las áreas de los dos semicírculos; osea:

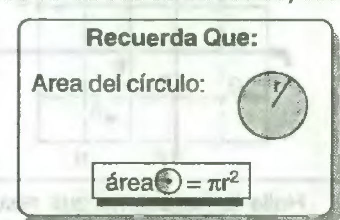


Area Región sombreada = área ▭ ABCD - área ⊙

$$= \overline{AB}\times BC - \pi(2)^2$$

$$= 9\times 4 - 4\pi$$

$$= 4(9-\pi)u^2$$



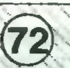
Recuerda Que:

Area del círculo:

$$\text{área} = \pi r^2$$

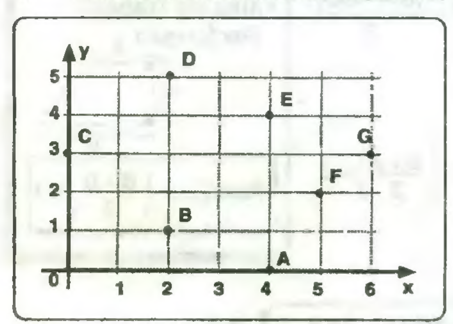
∴ área de la Región sombreada = 4 (9 - π) u^2 **Rpta.**





TALLER DE EJERCICIOS Nº 72

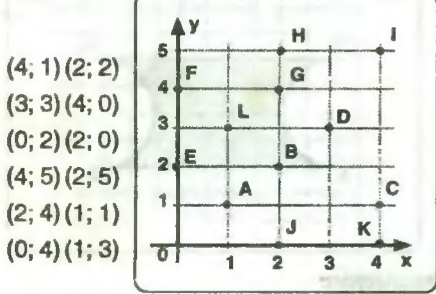
1. Halla las coordenadas de cada letra.



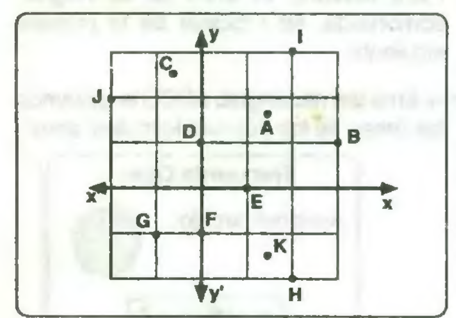
2. De la gráfica siguiente:

Escoge la letra para cada par de coordenadas.

(4; 1) (2; 2)
(3; 3) (4; 0)
(0; 2) (2; 0)
(4; 5) (2; 5)
(2; 4) (1; 1)
(0; 4) (1; 3)



3. Halla las coordenadas de cada letra.



4. Halla la trayectoria que resulta de unir los puntos A(3; 4) ; B(5, 2); C(4; 6) y D(7; 8)

5. Halla la trayectoria que resulta de unir los puntos A(-2; -3) ; B(-1; 3) y C(6; -2)

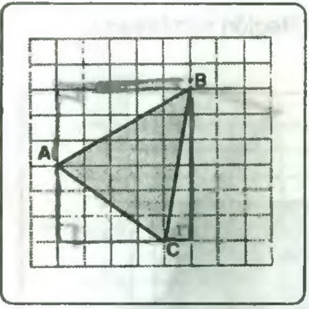
6. Hallar la trayectoria (Línea Curva) que resulta de unir los puntos A(3; -3) ; B(5 ; 1) ; C(7; 5) ; D(8; 6) y E(10 ; 3).

7. Hallar la distancia del punto A(5; 7) al punto B(3; 4)

8. Hallar la distancia del punto A(-2; 3) al punto B(-3, -5)

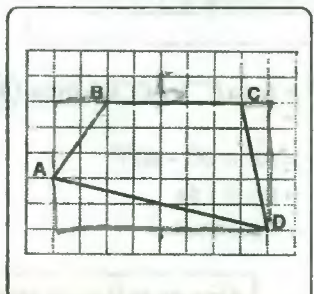
9. Hallar la distancia del punto M(-4; -1) al punto B(4; 2)

10. En la figura mostrada:



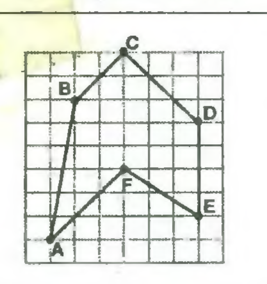
• Hallar el perímetro del triángulo ABC.

11. En la figura mostrada:



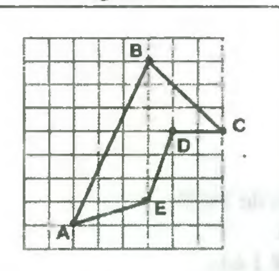
• Hallar el perímetro del cuadrilátero ABCD.

12. En la figura mostrada:



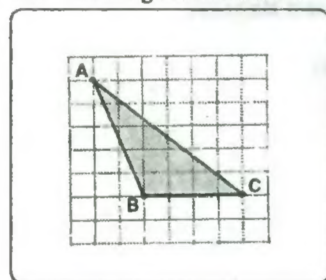
Hallar el perímetro del exágono ABCDEF.

13. En la figura mostrada:



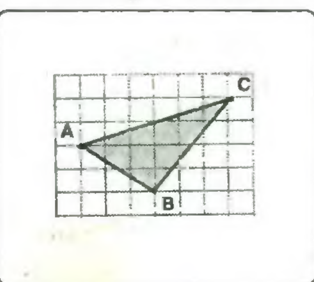
Hallar el perímetro del pentágono ABCDE.

14. En la figura mostrada:



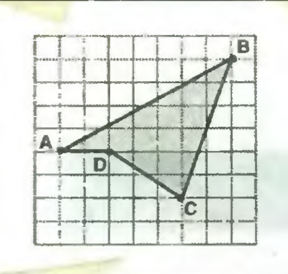
Hallar el área del triángulo ABC.

15. En la figura mostrada:



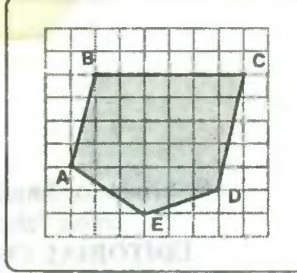
Hallar el área del triángulo ABC.

16. En la figura mostrada:



Calcular el área del cuadrilátero ABCD.

17. En la figura mostrada:



Calcular el área del pentágono ABCDE.

RESPUESTAS TALLER

7. $\sqrt{13}$ **8.** $\sqrt{65}$ **9.** $\sqrt{73}$

10. Perím. $\Delta ABC = \sqrt{34} + \sqrt{37} + 5$

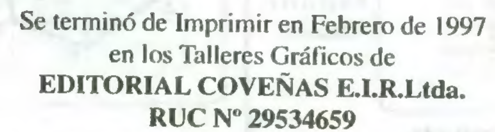
11. Perím.$= \sqrt{13} + 5 + 5\sqrt{26} + 2\sqrt{5}$

12. Perím.$= 8\sqrt{2} + \sqrt{13} + \sqrt{37} + 4$

13. Perím.$= \sqrt{58} + 3\sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{10}$

14. $10\ u^2$ **15.** $9\ u^2$

16. $15\ u^2$ **17.** $32\ u^2$



Se terminó de Imprimir en Febrero de 1997
en los Talleres Gráficos de
EDITORIAL COVEÑAS E.I.R.Ltda.
RUC Nº 29534659
Jr. Las Verdolagas Nº 199 - Urb. Micaela Bastidas
Los Olivos - Lima/Perú
Telfs. 486-7957 • 521-0949